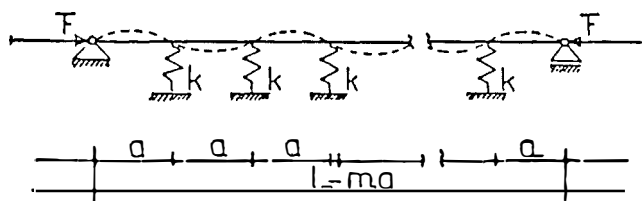


Rapportnr. BI-87-59

VEREND GESTEUNDE STAVEN



Deel I: Hoofdrapport

TNO Rapport

Titel VEREND GESTEUNDE STAVEN

Rapportnr. BI-87-59

Datum 06-05-1988

Projectnr. 63.4.3360

Auteur A. Koster

Trefwoord Stabiliteit, Knik

WP-onderwerp 214.1 Sterkte en Stabiliteit

Kader Staalbouwkundig Genootschap
 Stimuleringsubsidie EZ

INHOUDSOPGAVE**Inhoudsopgave deel I: Hoofdrapport**

	INHOUDSOPGAVE.	I
	WOORD VOORAF.	IV
	SYMBOLENLIJST.	V
1.	INLEIDING.	1
2.	PROBLEEM- EN DOELSTELLING.	4
3.	LITERATUURONDERZOEK	5
3.1.	Inleiding.	5
3.2.	Oplossingsmethoden.	5
3.3.	Oplossingen m.b.v. differentiaalvergelijkingen.	6
3.3.1.	Bepaling Eulerse knikkracht van een verend gesteunde kolom.	6
3.3.2.	Afleiding en oplossing van de D.V. voor een initieel uitgebogen kolom.	9
3.3.3.	Toepassingen en uitbreidingsmogelijkheden.	10
3.3.3.1.	Veersterkte.	10
3.3.3.2.	Momenten en dwarskrachtenverdeling.	10
3.3.3.3.	Invloed van rotatieveren en de torsiestijfheid van de kolom.	10
3.3.3.4.	Meerdere kolommen.	11
3.3.3.5.	Verend gesteunde plaat.	12
3.4.	Schematiseringen en benaderingsformules.	12
3.4.1.	Schematiseringen.	12
3.4.2.	Benaderingsformules.	15
3.5.	Imperfecties.	16
3.5.1.	Imperfecties van de kolom.	16
3.5.2.	Excentriciteit van de verende ondersteuning.	17
3.5.2.1.	Excentriciteit in langsrichting van de kolom.	17
3.5.2.2.	Excentriciteit in dwarsrichting van de kolom.	18
3.5.3.	Speling in de verbinding: kolom - ondersteuning.	19
3.6.	Het elasto-plastisch, plastisch gebied.	19
3.6.1.	De gemodificeerde Et-modulus theorie.	19
3.6.2.	Fictieve buigstijfheid.	22
3.6.3.	Reduceren van hoge benodigde veerstijfheden.	25
3.6.4.	Onderzoek m.b.v. de eindige elementenmethode.	25
3.7	Resterende conclusies en/of opmerkingen.	28

4.	VOORSTEL ONDERZOEK EN MODELFORMING.	30
4.1.	Voorstel onderzoek.	30
4.2.	Modelvorming.	30
5.	DE GEMODIFICEERDE Et-MODULUS THEORIE EN EEN AANGEREIKTE OPLOSSING.	32
5.1.	De gemodificeerde Et-modulus theorie.	32
5.1.1.	Algemeen.	32
5.1.2.	E_t - σ relaties.	34
5.1.2.1.	Parabolische E_t - σ relatie.	34
5.1.2.2.	Parabolische σ - ϵ relatie.	38
5.1.3.	Oplossingen voor k_{kr} - $\bar{\lambda}_s$ relatie.	41
5.1.3.1.	Parabolische E_t - σ relatie.	41
5.1.3.2.	Parabolische E_t - σ relatie; knikcurve ECCS(b).	44
5.1.3.3.	Parabolische σ - ϵ relatie; Knikcurve ECCS(b).	47
5.1.3.4.	Parabolische E_t - σ relatie; fictieve knikcurve ECCS(b).	50
5.1.4.	Resume en conclusies.	63
5.2.	Aangereikte oplossing.	65
6.	NUMERIEKE VERIFICATIE MET DIANA.	67
6.1.	Algemeen.	67
6.2.	Schematisering constructie.	67
6.3.	Modelvorming binnen DIANA.	69
6.3.1.	Elementtype en elementenverdeling.	69
6.3.2.	Restspanningsverdeling.	70
6.3.3.	Geometrische imperfectie.	71
6.3.3.1.	Pin-ended kolom en de vervangende geometrische imperfectie.	71
6.3.3.2.	IJking.	72
6.3.3.3.	Verend gesteunde kolom.	74
6.3.4.	Veerstijfheid.	77
6.4.	Resultaten.	78
6.4.1.	Snap-back.	78
6.4.2.	Verwerking en presentatie van de resultaten.	80
6.4.2.1.	Niet-lineaire regressie analyse.	80
6.4.2.2.	Resultaten in tabellen en grafieken.	81
6.4.2.3.	Bespreking DIANA resultaten.	92
6.4.3.	Conclusies.	94
6.5.	Verificatie.	95
6.5.1.	Veersterkte.	105
6.5.2.	Bespreking oplossingen.	106
6.5.3.	Voorstel relatie k_{kr} - $\bar{\lambda}_s$.	107

7.	SAMENVATTING CONCLUSIES.	111
8.	VOORSTEL VOOR VERVOLGONDERZOEK.	113
	LITERATUUR.	114

Inhoudsopgave Deel II: Bijlagen

	INHOUDSOPGAVE.	I
	WOORD VOORAF.	IV
	SYMBOLENLIJST.	V
	BIJLAGEN	
1.	Rekenvoorbeeld 1.	
2.	Rekenvoorbeeld 2.	
3.	Behandeling van publicaties betreffende verend gesteunde kolommen.	
4.	Resultaten DIANA berekeningen.	

Woord Vooraf

Dit rapport is het resultaat van een onderzoek in het kader van de eindstudie aan de afdeling Civiele Techniek van de Technische Universiteit Delft, afstudeerrichting Mechanica en Constructies, sectie Staalconstructies. Het onderzoek is verricht in dienst van de afdeling Staalconstructies van het TNO-Instituut voor Bouwmaterialen en Bouwconstructies (TNO-IBBC) te Rijswijk.

Onderzoek is verricht naar de stabiliteit van op druk belaste verend gesteunde staven, met name naar de benodigde stijfheid en sterkte van de verende ondersteuning in het elasto-plastisch gebied. Theoretische oplossingen zijn vergeleken met geometrisch en fysisch niet-lineaire computerberekeningen, uitgevoerd met het eindige elementenpakket DIANA.

Het onderzoek stond onder leiding van:

Prof. dr. ir. J. Wardenier (TU-DELFT)
Prof. ir. J. Witteveen (TU-DELFT; TNO-IBBC)

met begeleiding van:

ir. F.S.K. Bijlaard (TNO-IBBC)
ir. H.H. Snijder (TNO-IBBC)
ir. H. de Jong (TU-DELFT)

Met dank aan bovengenoemden voor hun waardevolle adviezen.

Delft, mei 1988

A. Koster

Symbolenlijst.

Symbol	Betekenis
A	Oppervlakte van de profieldoorsnede.
E	Elasticiteitsmodulus van staal.
E_T	Tangent-modulus.
F	Kracht.
F_D	Draagkracht volgens DIANA berekeningen.
F_E	Eulerse knikkracht.
F_k	De instabiliteitskracht.
F_0	Draagkracht ongesteunde kolom.
F_v	De kracht die een verende ondersteuning moet kunnen weerstaan.
F_p	De normaalkracht in een staaf, waarbij de grenstoestand van algehele instabiliteit van de staaf optreedt.
I	Traagheidsmoment.
M	Buigend moment.
N	Normaalkracht.
$\bar{N}$	Relatieve instabiliteitsspanning σ_k / σ_e volgens de ECCS.
Q	Dwarskracht.
L	Het aantal verend gesteunde kolommen, gekoppelde kolommen.
a	Onderlinge afstand van de verende ondersteuning.
$a_{1,2}$	Coëfficiënt.
$b_{1,2}$	Coëfficiënt.
$c_{1,2}$	Coëfficiënt.
e	Excentriciteit.
k	Veerstijfheid.
k_{kr}	Kritieke veerstijfheid.
$k_{kr}(E)$	Eulerse kritieke veerstijfheid.
l	Lengte van de staaf, gemeten tussen de scharnierend opgelegde einden.
l_k	Kniklengte.
m	Het aantal velden, waarin de staaf door de verende ondersteuning wordt verdeeld.
n	Het veldnummer (eerste veld $\rightarrow n = 0$). Verhouding tussen de Eulerse knikkracht en de aanwezige normaalkracht.
p	De verhouding tussen de proportionaliteitsgrens en de vloeigrens.
w	Uitbuiging.
w_0	Initiële uitbuiging.

ε	Relatieve rek.
σ	Normaalspanning.
σ_E	Eulerse knikspanning.
σ_θ	De rekenwaarde voor de vloeigrens.
σ_k	De instabiliteitsspanning.
σ_P	Proportionaliteitsspanning.
λ	Slankheid van de staaf.
$\bar{\lambda}$	De relatieve slankheid van de staaf.
λ_θ	Een parameter die de invloed van de rekenwaarde vloeigrens weergeeft ($\lambda_\theta = \pi\sqrt{E/\sigma_\theta}$).
$\bar{\lambda}_s$	De relatieve systeemslankheid van de staaf.
π	Pi.
ξ	Een functie van m.

1. Inleiding.

In veel constructies komen op druk belaste staven voor. Deze staven moeten voldoende sterk en stabiel zijn. Controle op instabiliteit (o.a. knik) vindt plaats door het bepalen van de instabiliteitsspanning (σ_k), welke groter moet zijn dan de in de staaf aanwezige rekenspanning.

De draagkracht van een op druk belaste staaf kan worden vergroot door de staaf te ondersteunen (fig. 1.1). Cruciale vraag is echter hoe stijf en sterk de ondersteuning moeten zijn, zodat de staaf de gewenste draagkracht bereikt.

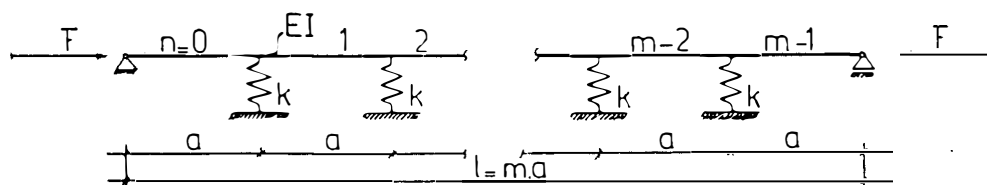


fig. 1.1: Schematisering verend gesteunde staaf.

Voor het berekenen van de benodigde veerstijfheid (k) wordt bij de huidige methode uitgegaan van de lineaire elasticiteitstheorie. Door nu de differentiaal vergelijking (D.V.) van het evenwicht voor elk veld op te stellen en op te lossen m.b.v. de juiste rand- en overgangsvoorwaarden, wordt de relatie tussen de Eulerse knikkracht en de veerstijfheid verkregen (fig. 1.2).

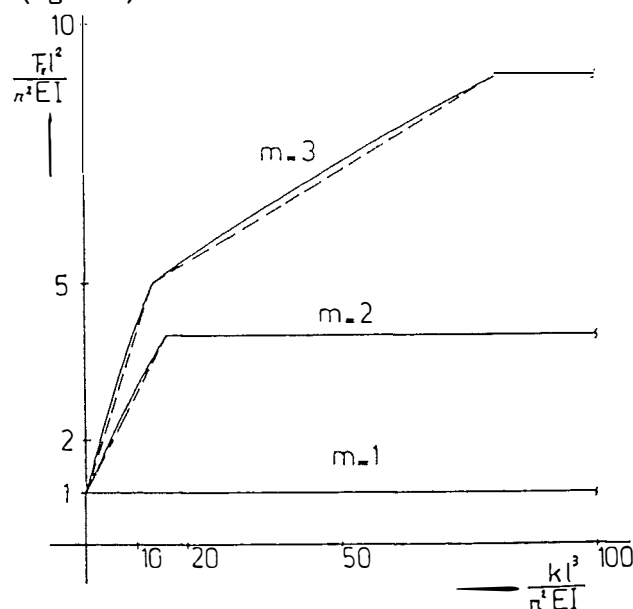


Fig. 1.2: Eulerse knikkracht als functie van de veerstijfheid.

Uit figuur 1.2 blijkt nu dat de Eulerse knikkracht na een bepaalde veerstijfheid niet meer toeneemt. Deze veerstijfheid wordt de kritieke

veerstijfheid (k_{kr}) genoemd. De formule voor de kritieke veerstijfheid ([25]) in het elastische gebied luidt:

$$k_{kr} = \frac{m^3 \pi^2 EI}{l^3 \xi} \quad (1.1)$$

Waarin:

m Het aantal velden, waarin de staaf door de verende ondersteuning wordt verdeeld.

ξ Een functie van m ; $\xi = \frac{1}{2(1 + \cos(\frac{\pi}{m}))}$

Is de veerstijfheid van de ondersteuning groter dan of gelijk aan de kritieke veerstijfheid, dan is de kniklengte (l_k) gelijk aan de veldlengte (a). Indien de veerstijfheid lager is dan de kritieke veerstijfheid, dan wordt de relatie tussen de Eulerse knikkracht en de veerstijfheid gegeven door krommen. Deze krommen verschillen maar weinig van rechte lijnen, zodat ook voor dit gebied eenvoudige formules zijn op te stellen.

Formule (1.1) kan worden herschreven door $\bar{\lambda}_s^2 = \sigma_s / \sigma_E$ in (1.1) te substitueren. Zo vinden we de relatie tussen de slankheid van de staaf en de kritieke veerstijfheid:

$$\begin{aligned} k_{kr} &= \frac{m^3 \pi^2 EI}{l^3 \xi} = \frac{\pi^2 EIA}{a^2 a \xi A} = \frac{\sigma_E A}{a \xi} = \frac{A \sigma_s \sigma_E}{a \xi \sigma_s} \\ &= \frac{A \sigma_s}{a \xi \bar{\lambda}_s^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Uitgaande van een slankheid van een kolom kan de instabiliteitsspanning en de benodigde veerstijfheid worden berekend. In bijlage 1 is van deze rekenmethode een voorbeeld gegeven.

Voor slanke staven blijkt deze op de lineaire elasticiteitstheorie gefundeerde methode goede resultaten te geven, maar niet voor de meer gedrongen staven ($\bar{\lambda}_s \leq 1$). Hierbij levert deze methode, naarmate de slankheid kleiner wordt, steeds grotere waarden op voor de benodigde veerstijfheid.

In bijlage 2 is een voorbeeld gegeven, met reële waarden voor de verschillende parameters. Het blijkt dat de benodigde kritieke veerstijfheid met een factor 2,25 daalt, als de draagkracht met 5% wordt gereduceerd ($\bar{\lambda} = 0.2 \rightarrow \bar{\lambda} = 0.3$, instabiliteitskromme c). Dit effect doet zich sterker voor naarmate de slankheid kleiner wordt. De benodigde kritieke veerstijfheid bij $\bar{\lambda}_s = 0.1$ is namelijk een factor 4 groter dan bij $\bar{\lambda}_s = 0.2$. Dit terwijl de draagkracht van beide staven nagenoeg gelijk is.

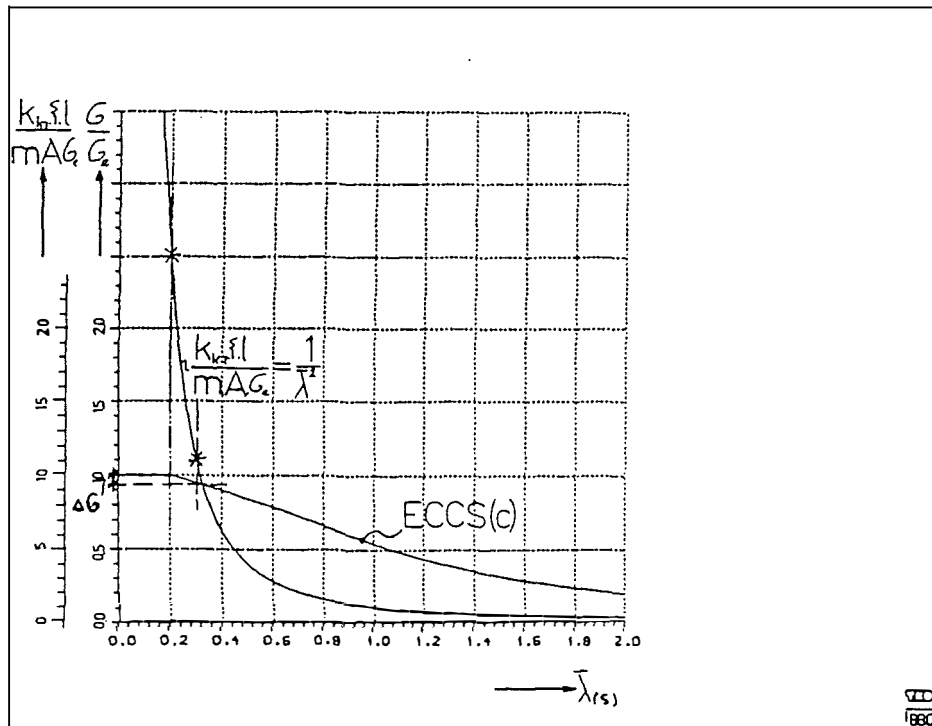


Fig. 1.3: Relatie tussen de ECCS instabiliteitskromme c en de kritieke veerstijfheid.

Het rekenvoorbeeld is grafisch weergegeven in figuur 1.3. Hieruit blijkt ook duidelijk het al aangeduide probleem.

2. Probleem- en doelstelling.

De huidige methode voor het berekenen van de benodigde stijfheid van de verende ondersteuning van verend gesteunde kolommen, een Eulerse knikberekening, levert naarmate de slankheid van kolommen kleiner wordt onevenredig grote waarden op voor de benodigde veerstijfheid, doordat het materiaalgedrag niet meer lineair-elastisch is. Het doel van dit onderzoek is dan ook te komen tot een complete rekenmethode, welke voor elke slankheid van een staaf realistische waarden geeft voor de stijfheid en sterkte van de verende ondersteuning, gebaseerd op juiste uitgangspunten (materiaalgedrag, praktijk etc).

3. Literatuuronderzoek.

3.1. Inleiding.

Het literatuuronderzoek betreffende verend gesteunde kolommen heeft de volgende doelstellingen:

- 1.) Het opdoen van ideeën, die kunnen worden gebruikt bij het oplossen van het gestelde probleem.
- 2.) Het verkrijgen van een overzicht van de "huidige stand van zaken".
- 3.) Het kunnen toetsen van resultaten aan de literatuur.
- 4.) Een manier te vinden om een gevonden oplossing geschikt te maken voor soortgelijke problemen, zoals b.v. kolommen die tevens tegen rotatie zijn gesteund.

Van de publicaties betreffende verend gesteunde kolommen ([1],[2],[5]-[19],[22],[23],[26]-[29]) zijn daartoe samenvattingen gemaakt welke in bijlage 3 zijn opgenomen.

3.2. Oplossingsmethoden.

In [7] en [27] wordt het probleem opgelost m.b.v. evenwicht- en vormveranderingsvergelijkingen, waarbij gebruik wordt gemaakt van rand- en overgangsvoorwaarden. Meer elementair is de oplossingsmethode m.b.v. differentiaalvergelijkingen (par. 3.3.). Tot slot blijkt ook de energie methode geschikt te zijn om dit probleem op te lossen. In [5] en [6] is deze methode toegepast.

Bij deze drie analytische methoden wordt meestal een homogeen stelsel vergelijkingen verkregen, kenmerkend voor stabiliteitsproblemen. Een niet triviale oplossing wordt verkregen door de determinant gelijk aan nul te stellen. Dit leidt tot een formule voor de relatie tussen de Eulerse knikkracht en de stijfheid van de verende ondersteuning.

Een niet analytische oplossing is de eindige elementenmethode. Deze wordt in enkele artikelen gebruikt ([1], [8]). Het toepassingsgebied is niet, zoals bij voorgaande methoden, beperkt tot het elastische gebied. De methode kan zowel in het elastische als het elasto-plastische gebied worden toegepast. Een nadeel van deze methode is echter dat geen inzicht wordt verkregen in de problematiek rondom de verend gesteunde staven.

3.3. Oplossingen m.b.v. differentiaalvergelijkingen.

3.3.1. Bepaling Eulerse knikkracht van een verend gesteunde kolom.

Beschouwd wordt een vervormde, initieel rechte kolom. De vergelijkingen voor het moment en de dwarskracht luiden als volgt:

$$M = EIw'' \quad (3.1)$$

$$Q = M' + Fw' = EIw''' + Fw' \quad (3.2)$$

Het combineren van deze twee vergelijkingen levert de differentiaalvergelijking (D.V.) op van het evenwicht, voor een op druk belaste staaf:

$$w'''' + \varphi^2 w'' = 0 \quad (3.3)$$

Waarin: $\varphi^2 = F/EI$

De algemene oplossing van deze D.V., herschreven in een geschikte vorm luidt:

$$w_n = \frac{A_n(a \sin \varphi x - x \sin \varphi a)}{a} + \frac{B_n(a \sin \varphi(a-x) - (a-x) \sin \varphi a)}{a} + C_n x/a + D_n(a-x)/a \quad (3.4)$$

De constanten A_n , B_n , C_n en D_n kunnen worden bepaald m.b.v. rand- en overgangsvoorwaarden. De volgende overgangsvoorwaarden kunnen daarvoor worden gebruikt:

- 1.) Continuïteit van de verplaatsing w t.p.v. de veren.
- 2.) Continuïteit van het buigend moment M t.p.v. de veren.
- 3.) Continuïteit van de hoekverdraaiing w' t.p.v. de veren.
- 4.) Evenwicht van de dwarskracht Q t.p.v. de veren.

ad 1) Continuïteit van de verplaatsing t.p.v. een knoop $n+1$ levert:

$$C_n = D_{n+1} \quad (3.5)$$

ad 2) Continuïteit van het buigend moment t.p.v. een knoop $n+1$ levert:

$$\begin{aligned} \varphi^2 EI \sin(\varphi a) A_n &= \varphi^2 EI \sin(\varphi a) B_{n+1} \\ \rightarrow A_n &= B_{n+1} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Of $\sin(\varphi a) = 0$, wat echter overeenkomt met $l_k = a$.

ad 3) Continuïteit van de hoekverdraaiing t.p.v. een knoop n en gebruikmakend van (3.5) en (3.6) levert:

$$B_{n+1}[t - \sin t] - 2B_n[t - \sin t] + B_{n-1}[t - \sin t] + D_{n+1} - 2D_n + D_{n-1} = 0 \quad (3.7)$$

Waarin: $t = \varphi a$

ad 4) De formule van de dwarskracht (3.2) kan m.b.v. (3.4), (3.5) en (3.6) worden herschreven tot:

$$Q_n = \frac{\varphi^2 EI}{a} [(B_n - B_{n+1}) \sin t + D_{n+1} - D_n] \quad (3.8)$$

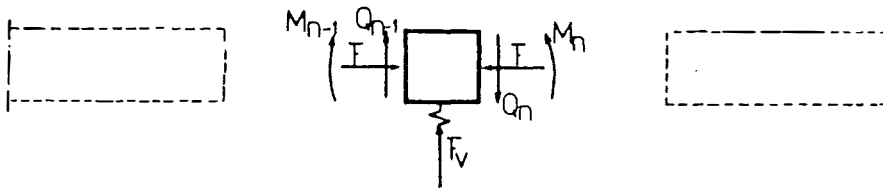


Fig. 3.1: Krachten die werken op knoop n .

Verticaal evenwicht t.p.v. knoop n :

$$Q_{n-1} - Q_n = -F_v$$

$$-ky_n(0) = -kD_n \quad (3.9)$$

Uitgewerkt levert dit de volgende vergelijking op:

$$[B_{n-1} - 2B_n + B_{n+1}] \sin \varphi a - [D_{n-1} - 2D_n + D_{n+1}] = \frac{-ka^3}{\varphi^2 a^2 EI} D_n \quad (3.10)$$

Een mogelijke oplossing voor B_n en D_n luidt:

$$B_n = B(\sin n\vartheta + \cos n\vartheta) \quad (3.11)$$

$$D_n = D(\sin n\vartheta + \cos n\vartheta) \quad (3.12)$$

Substitutie hiervan in de vergelijkingen (3.7) en (3.10) levert de volgende vergelijkingen op:

$$B[(1 - \cos \vartheta)(t - \sin t) - t(1 - \cos t)] + D[1 - \cos \vartheta] = 0 \quad (3.13)$$

$$B[\sin \varphi a (1 - \cos \vartheta)] + D\left[\frac{\beta}{t^2} - (1 - \cos \vartheta)\right] = 0 \quad (3.14)$$

$$\text{Waarin: } \beta = \frac{ka^3}{2EI}$$

Als randvoorwaarde geldt dat de kolom aan de uiteinden scharnierend is opgelegd, dus:

- 1.) De verplaatsing $y = 0$, voor $x = 0, l$
- 2.) Het buigend moment $M = 0$, voor $x = 0, l$

Dit betekent dat $B_{0,m+1} = D_{0,m+1} = 0$, en dus dat de cosinus term uit de oplossingen (3.11) en (3.12) verdwijnt.

Verkregen is nu een stelsel homogene vergelijkingen. Een niet triviale oplossing kan worden verkregen door de determinant gelijk aan nul te stellen. Dit leidt tot de volgende vergelijking:

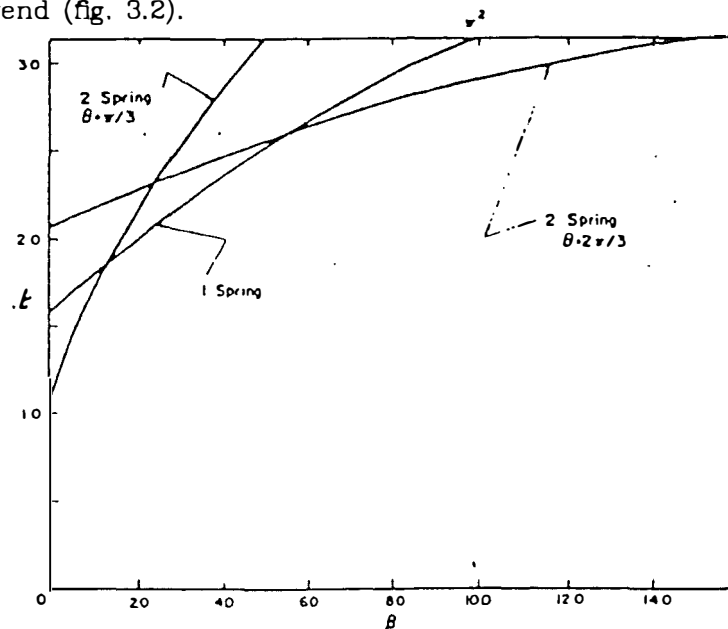
$$\begin{aligned} & [(1 - \cos\vartheta)(t - \sin t) - t(1 - \cos t)] \left[\frac{\beta}{t^2} - (1 - \cos\vartheta) \right] \\ & - \sin t (1 - \cos\vartheta)^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Herschrijven met $X = 1 - \cos(\vartheta) = 1 - \cos(j\pi/m)$:

$$X^2 - X[(1 - \cos t) + \beta(t - \sin t)/t^3] + \beta(1 - \cos t)/t^2 = 0 \quad (3.16)$$

Waarin: $j = 1, 2, \dots, m-1$ (Het aantal halve sinusgolven waarin de kolom uitknikt).

Deze vergelijkingen ($m-1$ stuks) geven de relatie tussen de Eulerse knikkracht van de kolom en de stijfheid van de veren. De vergelijking die bij een bepaalde veerstijfheid de laagste knikkracht oplevert is maatgevend (fig. 3.2).



One and two spring $\beta : t$ relationships.

Fig. 3.2: Relatie relatieve veerstijfheid β - Eulerse knikkracht.

De kritieke veerstijfheid is de minimum veerstijfheid waarbij de kniklengte van de kolom gelijk is aan de afstand tussen de verende ondersteuning. De kritieke veerstijfheid kan worden gevonden door in vergelijking (3.16) voor de Eulerse knikkracht $\pi^2 EI/a^2$ en voor j, m te substitueren. De formule voor de kritieke veerstijfheid luidt nu als volgt:

$$k_{kr} = \frac{2\pi^2 EI}{a^3} [1 + \cos(\frac{\pi}{m})] \quad (3.17)$$

3.3.2. Afleiding en oplossing van de D.V. voor een initieel uitgebogen kolom.

De initiële uitbuiging wordt verondersteld sinusvormig te zijn en luidt als volgt:

$$w_I(\xi) = R_j \sin(j\pi\xi/L) \quad (3.18)$$

Waarin: R = Amplitude van een halve sinusgolf.

ξ = Coördinaat vanaf het uiteinde van de kolom, in de richting van de kolom.

De D.V. van het evenwicht luidt nu:

$$EIw_n''''(x) + Fu_n''(x) = EIw_{In}''''(x) \quad (3.19)$$

De algemene oplossing is gelijk aan formule (3.4). De particuliere oplossing luidt:

$$w_{n(p)} = T_j \sin(n + x/a)\vartheta_j \quad (3.20)$$

Waarin: $\vartheta_j = j\pi/m$

$$T_j = \frac{R_j}{1 - \frac{\lambda^2 L^2}{j^2 \pi^2}}$$

De constanten kunnen nu worden bepaald met dezelfde rand- en overgangsvoorwaarden als bij de initieel rechte staaf. Nu ontstaat echter een niet homogeen stelsel vergelijkingen, waaruit de constanten kunnen worden opgelost. De uiteindelijke formule voor de uitbuiging van een verend gesteunde, imperfecte kolom luidt:

$$\begin{aligned} w(x) = & R^*[(\vartheta_j^2/t^2)\sin(n + x/a)\vartheta_j \\ & - G[q(\sin xt/a - (x/a)\sin t) + x/a]\sin(n + 1)\vartheta_j \\ & - G[q(\sin(1 - x/a)t - (1 - x/a)\sin t) + (1 - x/a)]\sin n\vartheta_j] \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
\text{Waarin: } R^* &= R_j t^2 / (\vartheta_j^2 - t^2) \\
q(t, \vartheta_j) &= (1 - \cos \vartheta_j) / [t(1 - \cos t) - (1 - \cos \vartheta_j)(t - \sin t)] \\
G(\alpha) &= \cos(\frac{1}{2}\alpha) / \cos(\frac{3}{2}\alpha) \\
\cos \alpha &= 1 - \left[\frac{t^3 (\cos \vartheta_j - \cos t) q(t, \vartheta_j) EI (0.45m^2 + 1.35m + 1)}{ka^3} \right] \\
t &= a \sqrt{F/EI}
\end{aligned}$$

M.b.v. Fourierontwikkeling kan voor een willekeurige initiële uitbuiging van een verend gesteunde kolom, de formule voor de uitbuiging in belaste toestand worden bepaald.

3.3.3. Toepassingen en uitbreidingsmogelijkheden.

3.3.3.1. Veersterkte.

De benodigde veersterkte kan m.b.v. de afleiding van de D.V. voor een initieel uitgebogen kolom worden bepaald. De veren worden geacht spanningsloos aan de imperfecte kolom te zijn bevestigd. De kracht die in de veren zal optreden is de bijkomende verplaatsing maal de stijfheid van de ondersteuning. De sterkte van de ondersteuning moet groot genoeg zijn om deze kracht te kunnen opnemen. [12]

3.3.3.2. Momenten en dwarskrachtenverdeling.

De uitbuiging van de verend gesteunde kolom in belaste toestand is nu bekend. Door substitutie van (3.21) in (3.1) en (3.2) kan het verloop van de dwarskracht en het buigend moment over de lengte van de kolom, worden bepaald. [13]

3.3.3.3. Invloed van rotatieveren en de torsiestijfheid van de kolom.

De D.V. (3.3) kan worden uitgebreid zodat hij meer "algemeen geldig" is. Naast buigknik kunnen verend gesteunde kolommen ook bezwijken t.g.v. : torsie, torsieknik en buigknik uit het vlak. De invloed van het torderen van de kolom wordt beschreven door een extra D.V. Deze luidt:

$$\psi_n'''' + \alpha^2 \psi_n = 0 \quad (3.22)$$

Waarin: $\alpha^2 = (FI_p / A - GJ) / EI_w$

De D.V.'s zijn onafhankelijk van elkaar als alleen torsie of buigknik wordt beschouwd en kunnen dan afzonderlijk van elkaar worden opgelost. Bij torsieknik zijn de D.V.'s echter wel afhankelijk van elkaar. De oplossingen kunnen op soortgelijke wijze als bij buigknik van een initiële rechte staaf (par. 3.3.1.) worden bepaald.

In de literatuur [5], [6], [10], [16] en [17] is de invloed van rotatieveren en de torsiestijfheid van een verend gesteunde kolom voor een aantal speciale gevallen onderzocht. Enkele belangrijke conclusies zijn:

- 1.) Ook energie methoden kunnen worden gebruikt om het stabiliteitsprobleem van een door rotatie- en translatie veren gesteunde kolom op te lossen ([5]). Hierbij wordt ook rekening gehouden met verhinderde welving en de torsiestijfheid van de kolom.
- 2.) Indien de kolom ook door momenten aan de uiteinden wordt belast, dan blijkt het "kritieke" moment sterk afhankelijk te zijn van de verhouding tussen de rotatiestijfheid (om de staafas) en de translatiestijfheid van de ondersteuning ([5]).
- 3.) Voor profielen met een grote torsiestijfheid verbeteren de resultaten sterk ([6]).
- 4.) Verhoging van de rotatiestijfheid tegen torderen van de kolom, rotatiestijfheid tegen buiging van de kolom en zijdelingse stijfheid van de ondersteuning leidt tot verhoging van de Eulerse knikkraft.

3.3.3.4. Meerdere kolommen.

Bij het berekenen van de Eulerse knikkraft van doorgekoppelde kolommen kan d.m.v. van een "schaalfactor", gebruik worden gemaakt van de resultaten van een enkele verend gesteunde kolom. De schaalfactor geeft de relatie tussen de benodigde veerstijfheid van een enkele verend gesteunde kolom en de benodigde veerstijfheid van doorgekoppelde kolommen. Bij eenzelfde knikvorm en dus draagkraft (van de afzonderlijke kolom), blijkt dat de benodigde veerstijfheid van doorgekoppelde kolommen een factor $2(1 - \cos\alpha)$ (de schaalfactor) groter moet zijn dan de benodigde veerstijfheid van een enkele verend gesteunde kolom. α is in deze factor afhankelijk van de wijze waarop de laatste kolom aan de fundering is verbonden. De twee meest voorkomende gevallen:

$\alpha = k\pi / (M + 1); k = 1, 2, \dots, M$; indien kolom M tevens verend gekoppeld is aan de "fundering".

$\alpha = k\pi/(2M + 1); k = 1, 3, \dots, 2M-1$; indien kolom M niet gekoppeld is aan de "fundering".

3.3.3.5. Verend gesteunde plaat.

In [14] wordt de D.V. vermeld en de oplossing behandeld van een door veren gesteunde, axiaal belaste plaat. De oplossingsmethodiek is gelijk aan die van verend gesteunde kolommen. Een relatie wordt gevonden tussen de elastische knikkracht, de veerstijfheden en de lengte- breedte verhoudingen van de plaatvelden. Ook de benodigde veersterkte kan op dezelfde wijze als in paragraaf 3.3.3.1. is behandeld, worden gevonden.

3.4. Schematiseringen en benaderingsformules.

3.4.1. Schematiseringen.

In de literatuur [1], [25], [28] en [29] worden m.b.v. vereenvoudigde schematiseringen van de verend gesteunde kolom, benaderingsformules voor de kritieke veerstijfheid en de sterkte gevonden. Deze benaderingsformules zijn vaak eenvoudig en dus goed in de praktijk te gebruiken.

Een veel gebruikt model is in figuur 3.3a weergegeven. Men komt tot dit model door te stellen dat als $k \geq k_{cr}$, de kniklengte van de kolom gelijk is aan de veldlengte (a). Buigpunten van deze knikvormen bevinden zich t.p.v. de verende ondersteuning. T.p.v. de ondersteuning kan dus gesteld worden dat: $w'' = -M/EI = 0$ en er mag een fictief scharnier worden geplaatst.

De invloed van imperfecties kunnen in rekening worden gebracht door de staaf een beginexcentriciteit w_0 (b.v. groot de in de richtlijnen [25] toegestane imperfectie, met $l = a$) t.p.v. de verende ondersteuning te geven. De buigpunten zullen zich dan in werkelijkheid niet meer exact t.p.v. de verende ondersteuning bevinden, waar in het model echter wel van wordt uitgegaan. De fout die hierdoor ontstaat is volgens [28] verwaarloosbaar klein.

M.b.v. evenwichtsvergelijkingen, waarbij de kolom wordt belast met de Eulerse knikkracht ($k_k = a$), kan een formule voor de kritieke veerstijfheid worden bepaald.

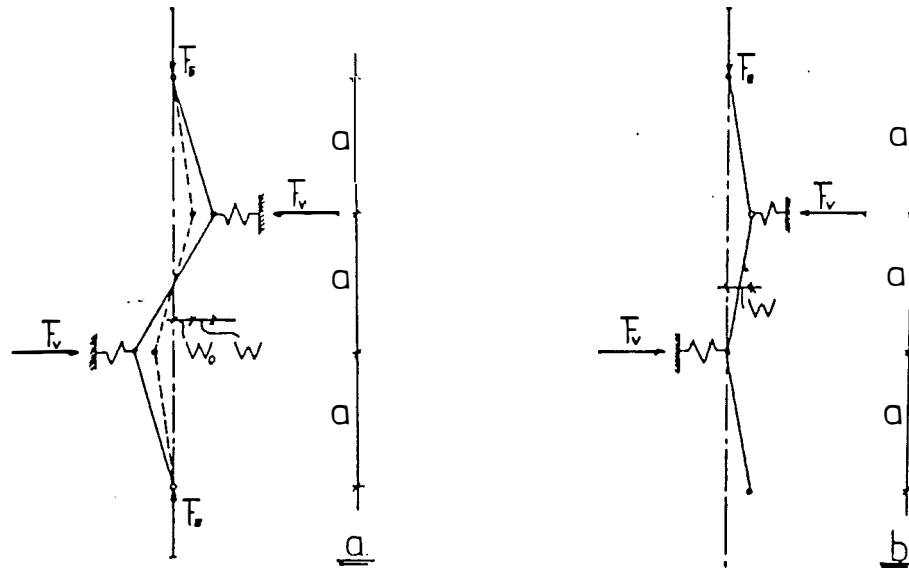


fig. 3.3: Vereenvoudigde schematiseringen.

Voor een alleen in het midden verend gesteunde kolom luidt het momenten evenwicht voor 1 staafdeel:

$$F_E(w_0 + w) = \frac{F_v a}{2} \quad (3.23)$$

Substitutie van $F_v = kw$ in (3.24) levert de formule voor de kritieke veerstijfheid op:

$$k = k_{kr} = \frac{2F_E}{a} \left(\frac{w_0}{w} + 1 \right) \quad (3.24a)$$

Soortgelijke evenwichtsbeschouwingen van een door 2, 3 en 4 veren gesteunde kolom, levert de volgende formules op voor de kritieke veerstijfheid:

$$k_{kr} = \frac{3}{a} F_E \left(\frac{w_0}{w} + 1 \right) \quad (3.24b)$$

$$k_{kr} = \frac{3.41 F_E}{a} \left(\frac{w_0}{w} + 1 \right) \quad (3.24c)$$

$$k_{kr} = \frac{3.63 F_E}{a} \left(\frac{w_0}{w} + 1 \right) \quad (3.24d)$$

Deze formules blijken voor $w_0 = 0$ overeen te komen met de kritieke veerstijfheid van een verend gesteunde kolom, welke volgt uit een Eulerse knikberekening. De formules (3.25) a,b,c en d kunnen m.b.v. tabel 5 uit [25] worden herschreven tot:

$$k_{kr} = \frac{\pi^2 F_E}{\xi l} \left(\frac{w_0}{w} + 1 \right) \quad (3.25)$$

De benodigde sterkte kan nu worden verkregen door de veerstijfheid

van de ondersteuning (minimaal k_{kr}) te vermenigvuldigen met de bijkomende uitbuiging (par. 3.3.3.1.). Dus:

$$F_v = \frac{m F_E}{\xi l} (w_0 + w) \quad (3.26)$$

De grootste waarden van k_{kr} en F_v worden verkregen als de initiële uitbuigvorm affien is aan de knikvorm waarbij de kolom bezwijkt.

In [23] wordt van een soortgelijk model uitgegaan. Hierbij is aan elk scharnier een initiële uitbuiging w_0 ($= 1/500$) gegeven t.o.v. het boven en onderliggende scharnier (fig. 3.2b). De volgende formule wordt gevonden voor de benodigde sterkte van de ondersteuning:

$$F_v = \frac{2d_0}{a} \frac{n}{n-1} F \quad (3.27)$$

Waarin: $n = \frac{F_E}{F}$

Wordt nu in formule (3.27) $(d_0 + d)$ vervangen door $n/(n-1) \cdot w_0$ en F_E door F dan blijkt voor $m = 2$ formule (3.27) gelijk aan formule (3.28) te zijn. Dit klopt, omdat ook de modellen voor $m = 2$ met elkaar overeenkomen. Opmerkelijk is dat formule (3.27) voor $m \rightarrow \infty$ een twee maal zo grote waarde voor F_v oplevert dan formule (3.29).

In [23] zijn de resultaten van DIANA berekeningen voor een broekstukconfiguratie in een hoogspanningsmast weergegeven. Hierbij zijn verschillende imperfectievormen voor de randstaaf (die als verend gesteunde staaf kan worden beschouwd) toegepast. Het bleek dat de resultaten van de DIANA berekeningen, met als imperfectievorm het harmonica model, goed overeen kwamen met in proeven gevonden waarden. Bij de experimenten was de grootte en de vorm van de imperfectie niet gelijk aan de in DIANA berekeningen toegepaste imperfectie.

Het model van figuur 3.2a wordt in [1] uitgebreid met rotatieveren t.p.v. de verende ondersteuning, die de kolom tegen tordenen steunen. Beide veren steunen de kolom op een bepaalde afstand vanaf het zwaartepunt. M.b.v. evenwichtsbeschouwingen wordt een relatie gevonden tussen de translatie- en rotatiestijfheid van de verende ondersteuning (en), bij kritieke belasting.

Toepassing van hetzelfde model op verend gesteunde liggers ([1], [17]), waarbij een normaalkracht ($\sigma_s A/2$) wordt verondersteld in de drukflens aan te grijpen, levert een benodigde veerkracht op. Deze veerkracht is volgens numerieke berekeningen van [8] en experimenten een factor twee te klein. De oorzaak hiervan wordt niet in het artikel [17] vermeld. Opgelost wordt dit door de initiële imperfectie twee maal zo groot te maken.

3.4.2. Benaderingsformules.

In [7] wordt een drietal benaderingsformules vergeleken met de oplossing volgens een Eulerse knikberekening. Indien a klein is t.o.v. l_k ($F_{cr} \leq 0.75 F_E(l_k = a)$) dan is de formule van een continue verend gesteunde kolom een goede benadering van de Eulerse knikberekening van een door een eindig aantal veren gesteunde kolom. De formule voor een continue verend gesteunde kolom luidt:

$$k = \frac{2.5 F_{cr} a}{l_k^2} \quad (3.28)$$

Opm: Deze formule geeft voor alle slankheden een goede benadering van de benodigde veerstijfheid.

Is a ongeveer gelijk aan l_k ($F_{cr} \approx F_E(l_k = a)$), dan geeft een door Winter ontwikkelde benaderingsformule goede resultaten voor de benodigde veerstijfheid. Deze benaderingsformule luidt:

$$k = \frac{4 F_{cr}}{l_k} \quad (3.29)$$

Opm: Formule (3.17) geeft voor de veerstijfheid die nodig is voor kleinere Eulerse knikkrachten ($F_{cr} \leq 0.5 F_E(l_k = a)$) zeer conservatieve waarden.

Een derde formule, gebaseerd op de twee voorgaande, geeft een goede conservatieve benadering voor de benodigde veerstijfheid. Deze luidt:

$$k = [2.5 + 1.5 \left(\frac{a}{l_k}\right)^4] \frac{F_{cr} a}{l_k^2} \quad (3.30)$$

Een vrij omslachtige benadering voor de relatie tussen de Eulerse knikkracht en de veerstijfheid wordt in [9] gegeven. Hier wordt een gemodificeerde veerstijfheid F_u toegepast, volgens:

$$F_u = (k a^3) / (12 EI) \quad (3.31)$$

Voor $F_u \leq 1$ wordt de formule van een continue verend gesteunde kolom toegepast (zie form. (3.29), + opm.). Voor $F_u \Rightarrow 2.5$ wordt gesteld dat $F_{cr} = F_E(l_k = a)$. Voor tussenliggende waarden van F_u wordt de volgende benaderingsformule vermeld:

$$\frac{F_{cr}}{F_E(l_k = a)} = \rho_{cr} = 0.5 + 0.2 F_u \quad (3.32)$$

Uitgaande van een Eulerse knikberekening vindt dezelfde schrijver m.b.v. een standaardprocedure, in een later gepubliceerd artikel [10], een benaderingsformule. Deze formule is geldig voor elke knikvorm en

is onafhankelijk van het aantal verende ondersteuningen. De formule luidt:

$$\beta = \frac{t^3(1 - \cos t)}{(\sqrt{t} + \sqrt{\sin t})^2} \quad (3.33)$$

Waarin: $\beta = \frac{ka^3}{2EI}$
 $t = \lambda a = a\sqrt{F/EI}$

Formule (3.34) kan dimensieloos worden gemaakt met: $\rho = F/F_E = t^2/\pi^2$ en $s = \beta/2\pi^2$. De nu verkregen formule kan op zijn beurt goed worden benaderd door een kwart cirkel. Zo wordt een eenvoudige oplossing gevonden voor een complex probleem.

3.5. Imperfecties.

3.5.1. Imperfecties van de kolom.

In veel publicaties wordt de relatie onderzocht tussen de Eulerse knikkracht van een verend gesteunde kolom en de veerstijfheid van de ondersteuning. De werkelijke draagkracht van de kolom is echter t.g.v. o.a. initiële imperfecties en residuele spanningen kleiner dan de Eulerse knikkracht. In [25] wordt aangegeven hoe vanuit de Eulerse knikkracht, via de kniklengte, de slankheid van de kolom en een knikcurve de instabiliteitsspanning van een verend gesteunde kolom kan worden bepaald.

Op een Eulerse knikberekening en dus op de relatie tussen de veerstijfheid en de Eulerse knikkracht hebben imperfecties geen invloed. In een aantal publicaties ([28], [29]) wordt echter m.b.v. een model (zie ook par. 3.4.1.), waarin de kolom initieel uitgebogen wordt verondersteld, een formule voor de kritieke veerstijfheid bepaald. In deze formule is de kritieke veerstijfheid wel afhankelijk van initiële imperfecties. De literatuur is dus, wat de invloed van initiële imperfecties op de benodigde veerstijfheid betreft, met elkaar in tegenspraak.

Wel algemeen geaccepteerd wordt het feit dat initiële imperfecties van invloed zijn op de benodigde sterkte van de verende ondersteuning. Sterker nog: in veel publicaties wordt de benodigde sterkte m.b.v. imperfecties bepaald. In paragraaf 3.3.3.1. en 3.4.1. is deze methode behandeld.

3.5.2. Excentriciteit van de verende ondersteuning.

3.5.2.1. Excentriciteit in langsrichting van de kolom.

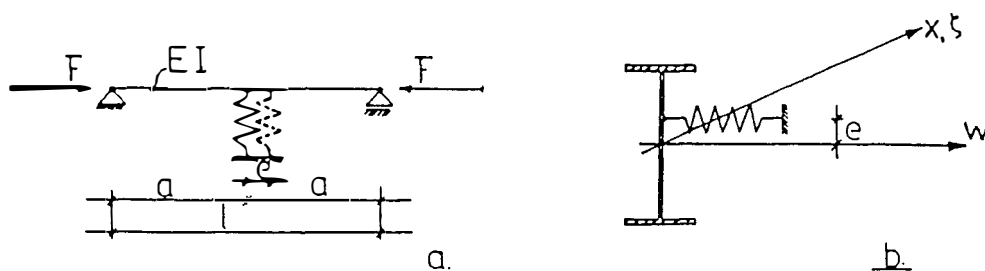


Fig. 3.4: Excentriciteit in langsrichting (a) en in dwarsrichting (b) van de kolom.

In [1] is de invloed van de excentriciteit van de verende ondersteuning in langsrichting van de kolom onderzocht. Er blijkt geen "kritieke veerstijfheid" meer te zijn. De draagkracht van de kolom wordt groter naarmate de veerstijfheid toeneemt en benadert een waarde die lager ligt dan de draagkracht van een exact in het midden (bij $m = 2$) verend gesteunde kolom. De verlaging van de draagkracht t.g.v. excentriciteit van de ondersteuning(en) in langsrichting van de kolom kan oplopen tot $\approx 20\%$ (figuur: 3.5).

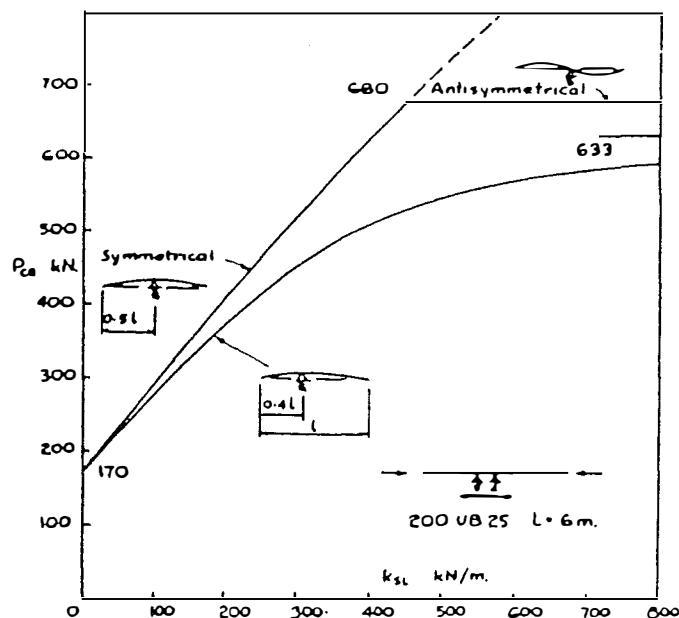


Fig. 3.5: Invloed van excentriciteit van de verende ondersteuning in langsrichting van de kolom.

3.5.2.2. Excentriciteit in dwarsrichting van de kolom.

Een excentriciteit van de verende ondersteuning(en) in dwarsrichting van de kolom vertoont soortgelijk gedrag als excentriciteit in langsrichting van de kolom. De draagkracht van een kolom wordt kleiner naarmate de excentriciteit toeneemt. Indien de verende ondersteuning aan de flens is bevestigd i.p.v. aan het zwaartepunt van het profiel, dan geeft een in [1] onderzochte kolom een sterke verlaging (max. $\approx 40\%$) van de draagkracht (figuur: 3.6). Excentriciteit van de ondersteuning(en) in dwarsrichting heeft ook invloed op de Eulerse knikkracht. Dit blijkt ook uit figuur 3.7. De Eulerse knikkracht van de kolom wordt kleiner naarmate de excentriciteit van de ondersteuning(en) toeneemt. Opgemerkt moet worden dat figuur 3.4 betrekking heeft op buig- en torsieknik van verend gesteunde kolommen.

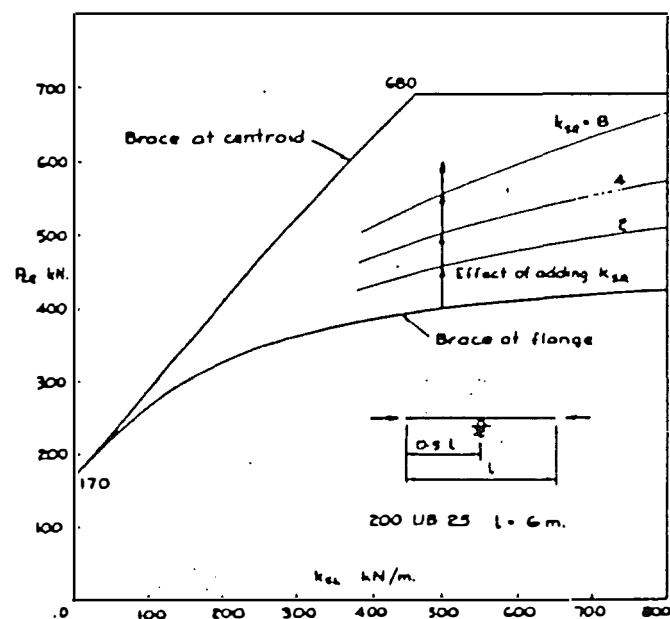


Fig. 3.6: Invloed van excentriciteit van de verende ondersteuning in dwarsrichting van de kolom.

Voorgaande geldt alleen voor centrisch belaste kolommen. Indien een kolom niet centrisch wordt belast dan is de in het zwaartepunt van het profiel bevestigde ondersteuning, indien buigknik maatgevend is, niet meer het meest effectief. Effectiever is een aan de "drukzijde" (indien de kolom alleen door het moment $F \cdot e$ aan de uiteinden wordt belast) bevestigde ondersteuning. De meest effectieve plaats van de verende ondersteuning is afhankelijk van de grootte van de excentriciteit e van de belasting. Weinig effectief is een aan de "trekzijde" bevestigde ondersteuning.

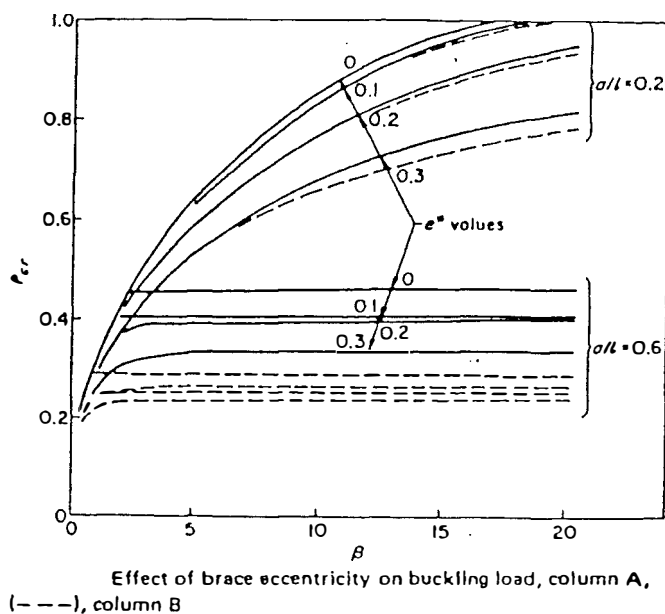


Fig. 3.7: Het effect van excentriciteit in dwarsrichting op de Eulerse knikkracht.

3.5.3. Speling in de verbinding: kolom - ondersteuning.

De invloed van speling in de verbinding: kolom - ondersteuning is volgens [1] relatief klein t.o.v. de invloed van initiële uitbuiging en mag daarom worden genegeerd in de berekening(en) van verend gesteunde kolommen.

3.6. Het elasto-plastisch, plastisch gebied.

3.6.1. De gemodificeerde E_t -modulus theorie.

Zodra de gemiddelde normaalspanning in de kolom de proportionaliteitsgrens overschrijdt is het materiaalgedrag niet meer lineair elastisch. De E -modulus kan dan worden vervangen door de E_t -modulus.

De E_t -modulus is afhankelijk van het spanningsnivo. Deze relatie kan op een tweetal manieren worden bepaald:

- 1.) Door evaluatie van het spannings- rekdiagram van een op trek of druk beproefde staaf.
- 2.) Door uit te gaan van een restspanningsverdeling. Theoretische uitdrukkingen voor de E_t - modulus kunnen hiermee worden bepaald.

In een tweetal publicaties ([7],[19]) wordt de relatie tussen het spanningsnivo ($\sigma \geq \sigma_p$) en de E_t -modulus parabolisch verondersteld. Zolang de normaalspanning in de kolom kleiner dan of gelijk is aan de proportionaliteitsgrens, is de E_t -modulus gelijk aan de E -modulus. Naarmate de spanning stijgt neemt de E_t -modulus af, tot een waarde nul bij de vloeispanning. In formule:

$$E_t = \left[1 - \left(\frac{\sigma - \sigma_p}{\sigma_e - \sigma_p} \right)^2 \right] ; \sigma \geq \sigma_p \quad (3.34)$$

$$E_t = E \quad ; \sigma \leq \sigma_p$$

Opm: De CRC (Column Research Council) gebruikt voor het bepalen van de toelaatbare knikkracht van een kolom in het elastische gebied de Eulerse knikcurve. In het elasto-plastische gebied wordt dan de E -modulus vervangen door de E_t -modulus. De proportionaliteitsgrens wordt gesteld op $0.5\sigma_e$.

In [7] wordt voorgesteld om de E -modulus in de formules voor de benodigde veerstijfheden in het elasto-plastische gebied te vervangen door de E_t -modulus. Zodoende zijn de formules voor zowel het elastische als het elasto-plastische gebied geschikt. Grafisch is deze oplossing weergegeven in figuur 3.8.

Om het in [19] behandelde computerprogramma geschikt te maken voor analyses in het elasto-plastische gebied, wordt ook hier de E -modulus bij een gemiddelde normaalspanning groter dan de proportionaliteitsgrens vervangen door de E_t -modulus.

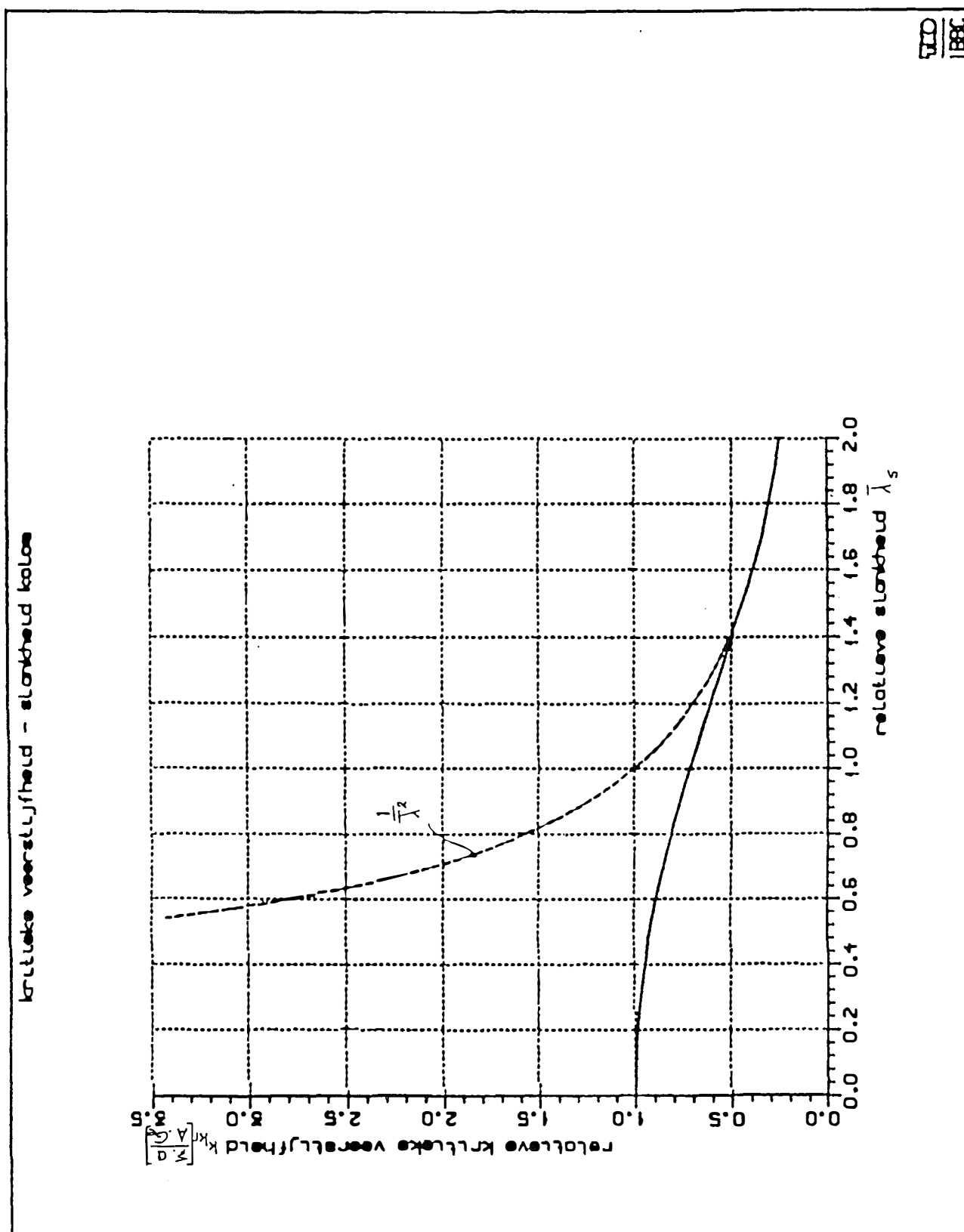


Fig. 3.8: Relatie: kritieke veerstijfheid - systeemslankheid kolom (volgens [7]).

3.6.2. Fictieve buigstijfheid.

In [2] worden de invloeden die het draagvermogen van de kolom bepalen (residuele spanningen, geometrische imperfecties, etc.) verwerkt m.b.v. een z.g.n. fictieve buigstijfheid.

Deze fictieve buigstijfheid wordt als volgt gedefinieerd:

$$EI_{fict.} = \beta \cdot EI \quad (3.35)$$

Met:

$$\beta = \frac{F_k}{F_E} = \bar{N} \bar{\lambda}^2 \quad (3.36)$$

Waarin: $\bar{N}$ = bijbehorende draagkracht volgens de ECCS knikcurven.

Bij toepassing van deze methode voor het bepalen van de kritieke veerstijfheid, is de kniklengte al bekend ($l_k = a$). Dus ook de slankheid van de gesteunde kolom is bekend.

De factor β kan dan direct m.b.v. formule (3.36) worden bepaald. Grafisch is de relatie tussen de relatieve buigstijfheid (β) en de relatieve slankheid (λ) in figuur 3.9 weergegeven.

Substitutie van (3.35) in formule (1.2) levert met (3.36) de volgende formule op voor de kritieke veerstijfheid:

$$k_{kr} = \left| \frac{A \cdot \sigma_e}{a \cdot \xi} \right| \cdot \bar{N} \quad (3.37)$$

Grafisch is formule 3.37 weergegeven in figuur 3.10.

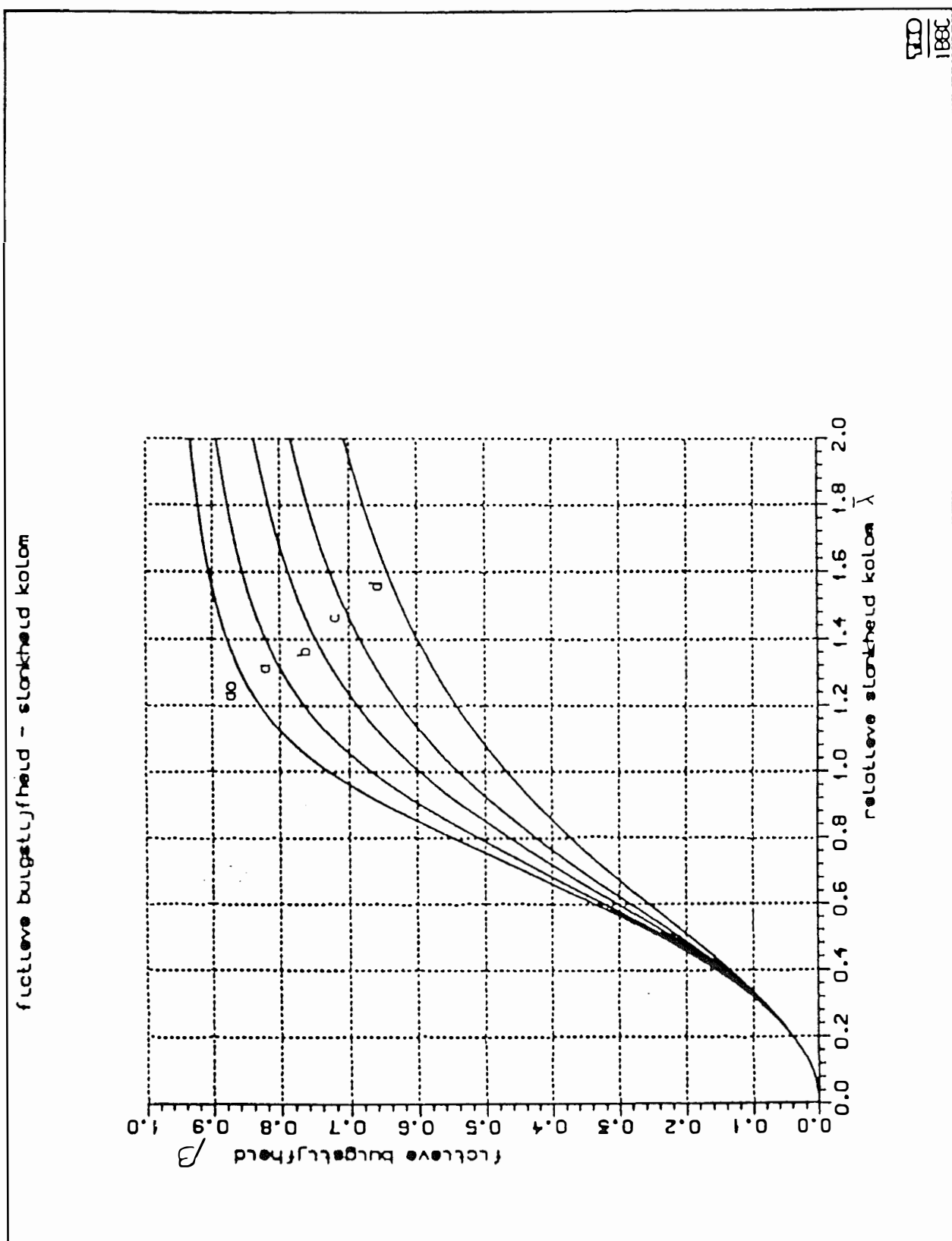


Fig. 3.9: Relatie: relatieve buigstijfheid - relatieve slankheid.

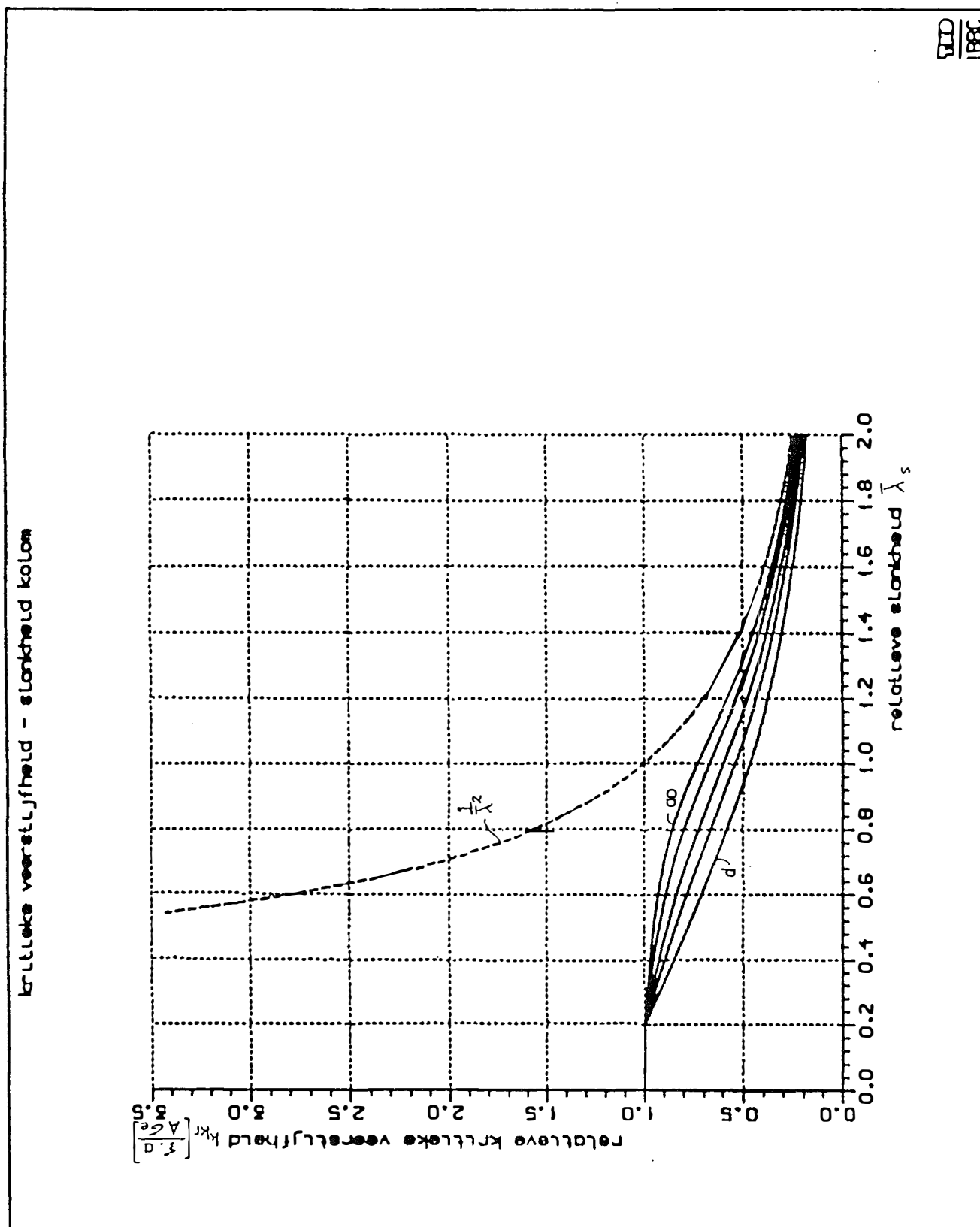


Fig. 3.10: Relatie: kritieke veerstijfheid - systeemslankheid kolom (volgens [2]).

3.6.3. Reduceren van hoge benodigde veerstijfheden.

De Eulerse knikberekening voor verend gesteunde staven, levert naarmate de slankheid van een staaf kleiner wordt steeds grotere waarden op voor de benodigde veerstijfheid. In [23] wordt een methode aangegeven om hoge waarden voor de benodigde veerstijfheden te voorkomen.

Door de draagkracht van een verend gesteunde kolom met 5% te verlagen, kan met een lagere stijfheidseis worden volstaan. Deze methode wordt aantrekkelijker naarmate de slankheid van een staaf kleiner wordt (Fig. 1.3).

Een andere manier om hoge benodigde veerstijfheden te voorkomen wordt in [6] aangegeven. Hierin wordt geconcludeerd dat in het elasto-plastisch gebied voor de benodigde veerstijfheid de waarde bij λ_0 mag worden gebruikt. Van hoge veerstijfheden in het elasto-plastische gebied is dan dus geen sprake meer (fig. 3.11).

3.6.4. Onderzoek m.b.v. de eindige elementenmethode.

Matsui [8] heeft de eindige elementenmethode toegepast op verend gesteunde kolommen. Door verschillende parameters, zoals o.a. de slankheid van de kolom en de stijfheid van de ondersteuning, te variëren kunnen conclusies worden getrokken omtrent de benodigde stijfheid en sterkte van de ondersteuning. Matsui trekt de volgende conclusies:

- 1.) Bij gedrongen staven wordt de maximale toelaatbare belastingen volgens o.a. de ECCS knikcurve niet gehaald, ondanks verhoging van de veerstijfheid. Verhogen van de veerstijfheid is namelijk op een gegeven moment ($K \geq 3$) niet meer effectief. Het verschil tussen de gevonden draagkracht (bij $K = 3$) en de draagkracht volgens de knikcurven is bij gedrongen staven klein. De verlaging van de veiligheid is dus niet kritiek. Uit dit oogpunt bekeken is een kritieke veerstijfheid van $K \geq 3$ dus voldoende (fig. 3.12).

Opm: $K = k/k_0$ met $k_0 = 6\pi^2 EI/a^3$ als $\lambda \geq \lambda_0$

$$k_0 = 6A\sigma_e/a \quad , \quad \lambda \leq \lambda_0$$

- 2.) De benodigde sterkte van de ondersteuning is afhankelijk van de slankheid van de staaf en de stijfheid van de ondersteuning. Bij toename van de stijfheid van de ondersteuning neemt de benodigde sterkte af.

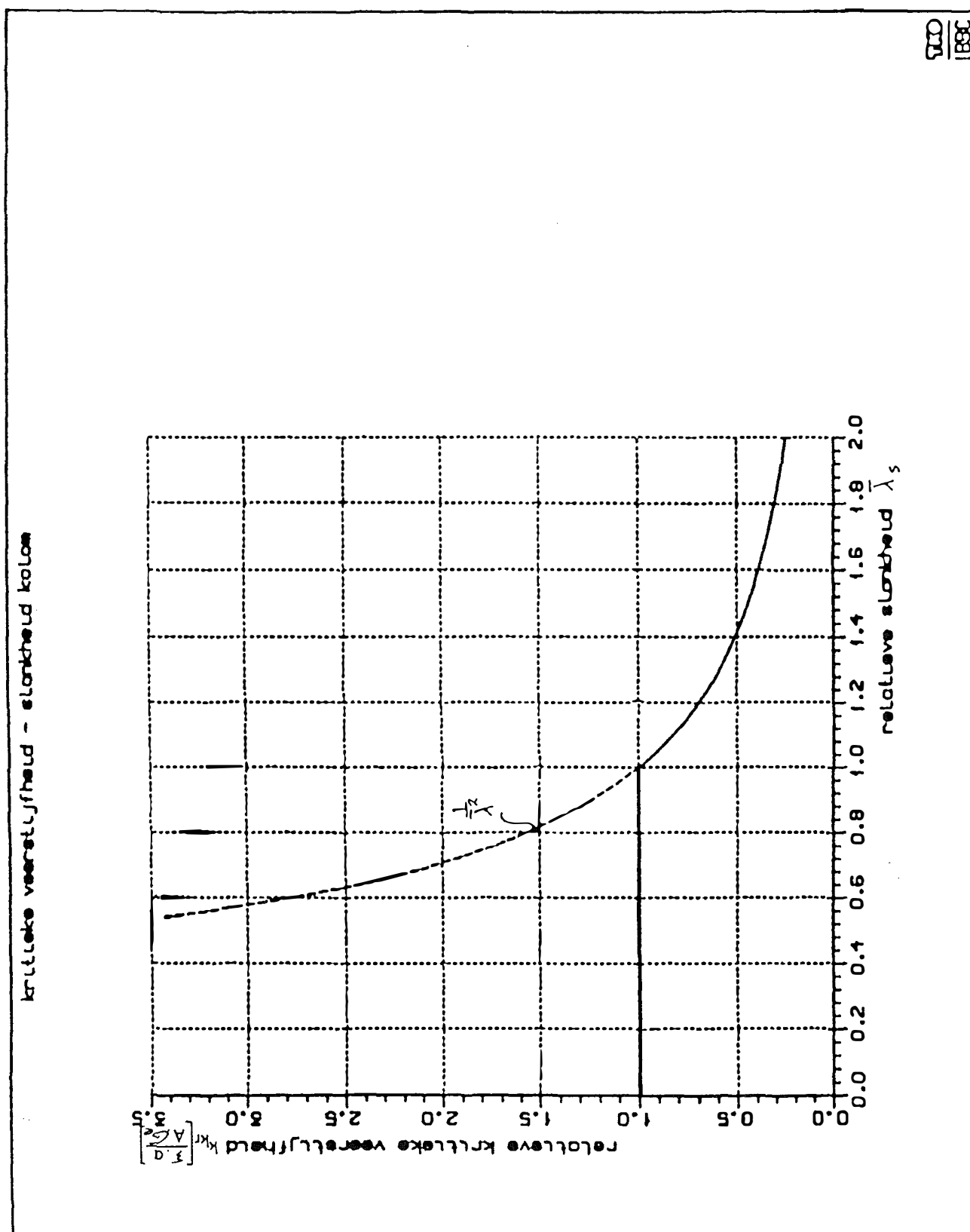


Fig. 3.11: Relatie: kritieke veerstijfheid - systeemslankheid kolom (volgens [6]).

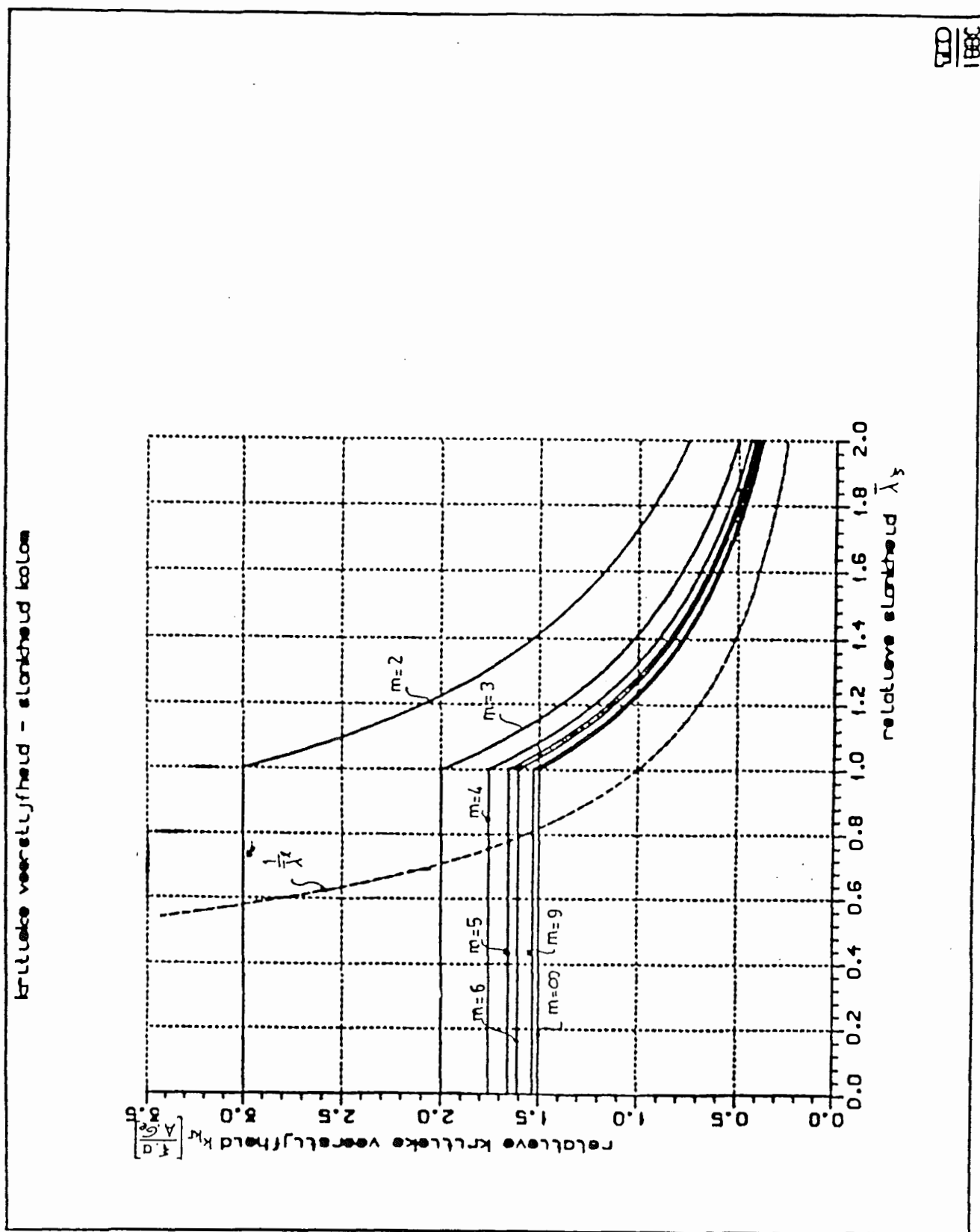


Fig. 3.12: Relatie: kritieke veerstijfheid - systeemslankheid kolom (volgens [8]).

- 3.) De benodigde sterkte van de ondersteuning is kleiner dan 2% van de axiale belasting, onder de voorwaarde dat $K \geq 3$.
- 4.) De verschillen in resultaten tussen de rechthoekige doorsnede en andere doorsneden zijn erg klein. Bovenstaande conclusies gelden dus ook voor verend gesteunde kolommen met een niet rechthoekige doorsnede.
- 5.) De benodigde sterkte van de verende ondersteuning neemt af als het aantal ondersteuning toeneemt.

Door O' Conner [1] worden twee verend gesteunde kolommen, met $\lambda_s = 48.4$ (een gedrongen staaf) en $\lambda_s = 97$ beschouwd. De ondersteuning en dus ook de stijfheid is bij beide kolommen gelijk. Nu blijkt dat de kracht in de ondersteuning van de gedrongen kolom oneindig groot wordt. Dit resultaat bevestigt de juistheid van conclusie (2) en (3) in [8].

3.7. Resterende conclusies en/of opmerkingen.

- 1.) In veel voorschriften wordt als sterkte eis voor de verende ondersteuning de z.g.n. 2%-regel gehanteerd. De juistheid van deze 2%-regel wordt in een aantal publicaties geverifieerd. Geconcludeerd wordt dat de 2%-regel voor de in de publicaties beschouwde gevallen voldoet, zowel in het elastische- als het elasto-plastische gebied ([1],[8],[29]). Restricties betreffende de veerstijfheden worden echter soms wel gesteld.
- 2.) De normaalkracht is niet altijd uniform verdeeld over de lengte van de kolom, maar vaak ook parabolisch of "half-parabolisch". Nu blijkt dat de elastische knikkracht bij een (half-)parabolische normaalkracht groter is dan de elastische knikkracht bij een uniform verdeelde normaalkracht, omdat minder kolomlengte onder hoge druk verkeert [9].
Wordt ook het elasto-plastische gedrag in beschouwing genomen dan valt op dat de kolom met een uniform verdeelde normaalkracht zich langer elastisch gedraagt dan de kolom met een (half-)parabolische verdeelde normaalkracht [19].
- 3.) In de voorschriften voor het ontwerpen van stalen bruggen is voor de dimensionering van verend gesteunde staven uitgegaan van de lineaire elasticiteitstheorie (een Eulerse knikberekening). Er zijn nog geen bruggen ingestort met als oorzaak het bezwijken van een verend gesteunde staaf, welke gedimensioneerd is volgens de VOSB. Dit geeft een indruk van de betrouwbaarheid van de huidige

methode waarbij ook weer wordt uitgegaan van de lineaire elasticiteitstheorie.

4. Voorstel onderzoek en modelvorming.

4.1. Voorstel onderzoek.

Om de doelstelling van het onderzoek te bereiken is allereerst een literatuuronderzoek uitgevoerd (hoofdstuk 3). Uit dit literatuuronderzoek volgden ideeën voor verder onderzoek, maar tevens een viertal reële oplossingen.

Voorgesteld wordt nu om eerst de ideeën voor verder onderzoek uit te werken. Deze ideeën berusten op een vermindering van de buigstijfheid van de kolommen bij toenemende normaalspanning (par. 5.1.).

Naast de oplossingen die voortvloeien uit het literatuuronderzoek is er ook een oplossing aangegeven door een medewerker van het TNO-IBBC. Deze oplossing wordt ook in het onderzoek betrokken (par. 5.2.).

De methode van aanpak is nu de oplossingen, aangevuld met de resultaten van de uitwerking van de ideeën van het literatuuronderzoek te verifiëren aan fysisch en geometrisch niet lineaire berekeningen. Daartoe wordt gebruik gemaakt van het computerprogramma DIANA. Door de fysisch en geometrische niet lineaire berekeningen voor een aantal verschillende slankheden ($\bar{\lambda} < 1$) uit te voeren zal een goede vergelijking tussen de DIANA berekeningen en de gevonden oplossingen mogelijk zijn (hoofdstuk 7).

De bedoeling van voornoemde werkwijze is dat uit deze vergelijking, en uit overige motieven, zoals bijvoorbeeld de eenvoud van een oplossing, een methode of oplossing volgt welke voldoet aan de gestelde doelstelling (hoofdstuk 2). Eventueel aangevuld met conclusies en aanbevelingen (hoofdstuk 8).

4.2. Modelvorming

Beschouwd wordt een zijdelingse verend gesteunde kolom, aan de uiteinden scharnierend opgelegd (fig. 1.1.). Het onderzoek beperkt zich tot vervormingen in het vlak van de constructie, waarbij knik uit het vlak en torsieknik worden geacht te zijn verhinderd. Ook locale plooi blijft buiten beschouwing.

Het onderzoek beperkt zich daarbij in eerste instantie tot de kritieke veerstijfheid, de veerstijfheid waarbij de staaf uitknikt met de kniklengte a . De gedachte hierbij is dat een gevonden oplossing na aanpassing ook voor benodigde veerstijfheden kleiner dan de kritieke, geschikt zal zijn.

Verend gesteunde kolommen kunnen in vele variaties voorkomen. Het onderzoek beperkt zich tot een verend gesteunde kolom met:

- 1.) Een constante stijfheid van de kolom.
- 2.) Een constante normaalkracht over de lengte van de kolom.
- 3.) Een gelijke onderlinge afstand van de verende ondersteuning.
- 4.) Scharnierende uiteinden.
- 5.) Centrische belasting.
- 6.) Geen rotatieveren aanwezig.

5. De gemodificeerde E_t -modulus theorie en een aangereikte oplossing.

5.1. Gemodificeerde E_t -modulus theorie.

5.1.1. Algemeen.

T.g.v. verschillende invloeden (geometrische imperfecties, residuele spanningen, maatafwijkingen, etc.) treedt plaatselijk vloeï op in een doorsnede bij een lagere gemiddelde spanning dan de vloeigrens (σ_e). De gemiddelde spanning waarbij voor het eerst vloeï in een doorsnede optreedt wordt σ_p genoemd (proportionaliteitsgrens). Hierna is het verband tussen σ_{gem} en ε niet meer recht evenredig.

Bij toepassing van een bi-lineair σ - ε diagram is de E -modulus voor het gevloeide gedeelte gelijk aan nul. Voor het nog niet gevloeide gedeelte in de kolom is de E -modulus nog gelijk aan E , de Young modulus. Een fictieve E -modulus, de E_t -modulus kan nu worden bepaald door de E -modulus te vermenigvuldigen met de verhouding tussen het niet gevloeide oppervlak en het totale oppervlak van een doorsnede.

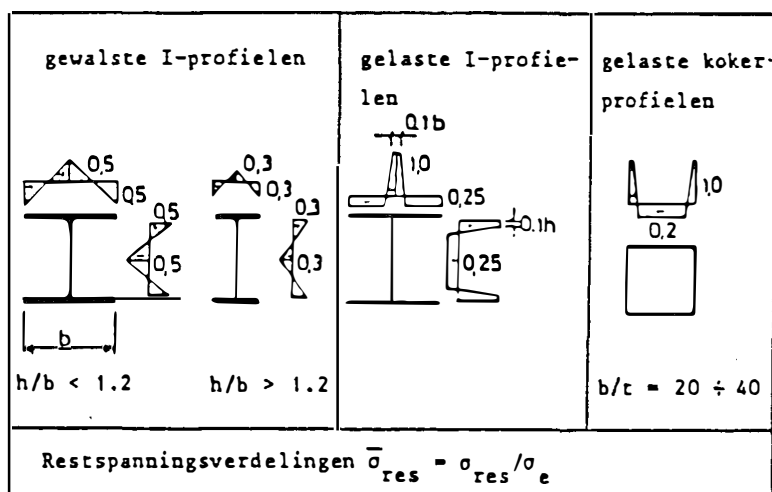


Fig. 5.1: Restspanningsverdelingen volgens [25].

Op deze manier kan een theoretische formule worden afgeleid voor de E_t -modulus, welke afhankelijk is van het gemiddelde spanningsnivo, de vorm van de doorsnede en de restspanningsverdeling. Indien nu de vorm van de doorsnede bekend is en uit wordt gegaan van een

restspanningsverdeling (b.v. volgens figuur 5.1, uit [25]), dan is de E_t -modulus alleen nog afhankelijk van het spanningsnivo:

$$E_t = f(\sigma) \quad (5.1)$$

Twee andere methoden voor het bepalen van de E_t -modulus zijn:

- 1.) Uitgaan van een formule voor het spannings-rekdiagram of van een formule voor de E_t -modulus zelf.
- 2.) Uitgaan van het spannings-rekdiagram van een op trek of druk belast profiel. Men vindt reële waarden voor de E_t -modulus, doordat ook de invloed van materiaalinhomogeniteiten en maat-afwijkingen worden meegenomen. Nadeel is echter dat de zo gevonden E_t -modulus moeilijk in berekeningen kan worden toegepast, omdat de E_t -modulus niet in formulevorm is gegeven en voor elk profiel anders zal zijn.

Het principe van de gemodificeerde E_t -modulus theorie is nu de E -modulus in de formule voor de kritieke veerstijfheid (1.1) te vervangen door de E_t -modulus. De formule voor de kritieke veerstijfheid luidt na herschrijven als volgt:

$$k_{kr} = \left[\frac{A \cdot \sigma_s}{\xi \cdot a} \right] \cdot \frac{1}{\bar{\lambda}_s^2} \cdot \frac{E_t(\sigma)}{E} \quad (5.2)$$

Het gedachtenexperiment hierbij was:

De E_t -modulus is afhankelijk van het gemiddelde spanningsnivo en wordt kleiner naarmate de spanning stijgt. Bij kolommen wordt echter de instabiliteitsspanning hoger naarmate de slankheid kleiner wordt. De reductie van de kritieke veerstijfheid kan dus groter zijn naarmate de relatieve systeemslankheid kleiner wordt.

Bij toepassing van de ECCS-instabiliteitscurven is in dit hoofdstuk gekozen voor de knikcurve ECCS(b). Dit om de resultaten goed te kunnen vergelijken met de fysisch en geometrisch niet-lineaire berekeningen in hoofdstuk 6. Voor de fysisch en geometrisch niet-lineaire berekeningen is gekozen voor een HE-B 200 als model voor de verend gesteunde kolom. Hiervoor is de knikcurve ECCS(b) van toepassing.

5.1.2. E_t - σ relaties.

In deze paragraaf wordt formule 5.1 nader bepaald. Uitgegaan wordt van een formule voor de E_t -modulus zelf, of van een formule voor de spannings-rek relatie waardoor de formule van de E_t -modulus vastligt (hellingshoek). Om inzicht in de materie te behouden wordt voor eenvoudige formules gekozen.

5.1.2.1. Parabolische E_t - σ relatie.

In de literatuur (par. 3.6.1) is gekozen voor een parabolische E_t - σ relatie na de proportionaliteitsgrens. De E_t -modulus kan dan m.b.v. de volgende formule worden weergegeven:

$$E_t \left(\frac{\sigma}{\sigma_g} \right) = a \left(\frac{\sigma}{\sigma_g} \right)^2 + b \left(\frac{\sigma}{\sigma_g} \right) + c \quad (5.3)$$

$$\text{Randvoorwaarden: } E_t \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_g} \right) = E$$

$$E_t' \left(\frac{\sigma_p}{\sigma_g} \right) = 0$$

$$E_t(1) = 0$$

Hieruit volgt dat:

$$a = \frac{-E}{\left[\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2p} - 1 \right) 2p \right]}$$

$$b = \frac{E}{\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2p} - 1 \right)}$$

$$c = \frac{E \left(\frac{1}{2p} - 1 \right)}{\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2p} - 1 \right)}$$

$$\text{Waarin: } p = \frac{\sigma_p}{\sigma_g}$$

Herschreven luidt de formule voor de E_t -modulus nu:

$$E_t = \left[1 - \left(\frac{\sigma - \sigma_p}{\sigma_g - \sigma_p} \right)^2 \right] E \quad (5.4)$$

Grafisch is deze formule weergegeven in figuur 5.3, voor $p = 0.5$ tot $p = 0.9$. De bijbehorende spannings-rek relatie is in figuur 5.2. weergegeven. In formule luidt de bijbehorende spannings-rek relatie als volgt:

$$\frac{\frac{\sigma}{\sigma_e} - p}{1 - p} = \tanh \left[\frac{\frac{E\varepsilon}{\sigma_e} - p}{1 - p} \right] \quad (5.5)$$

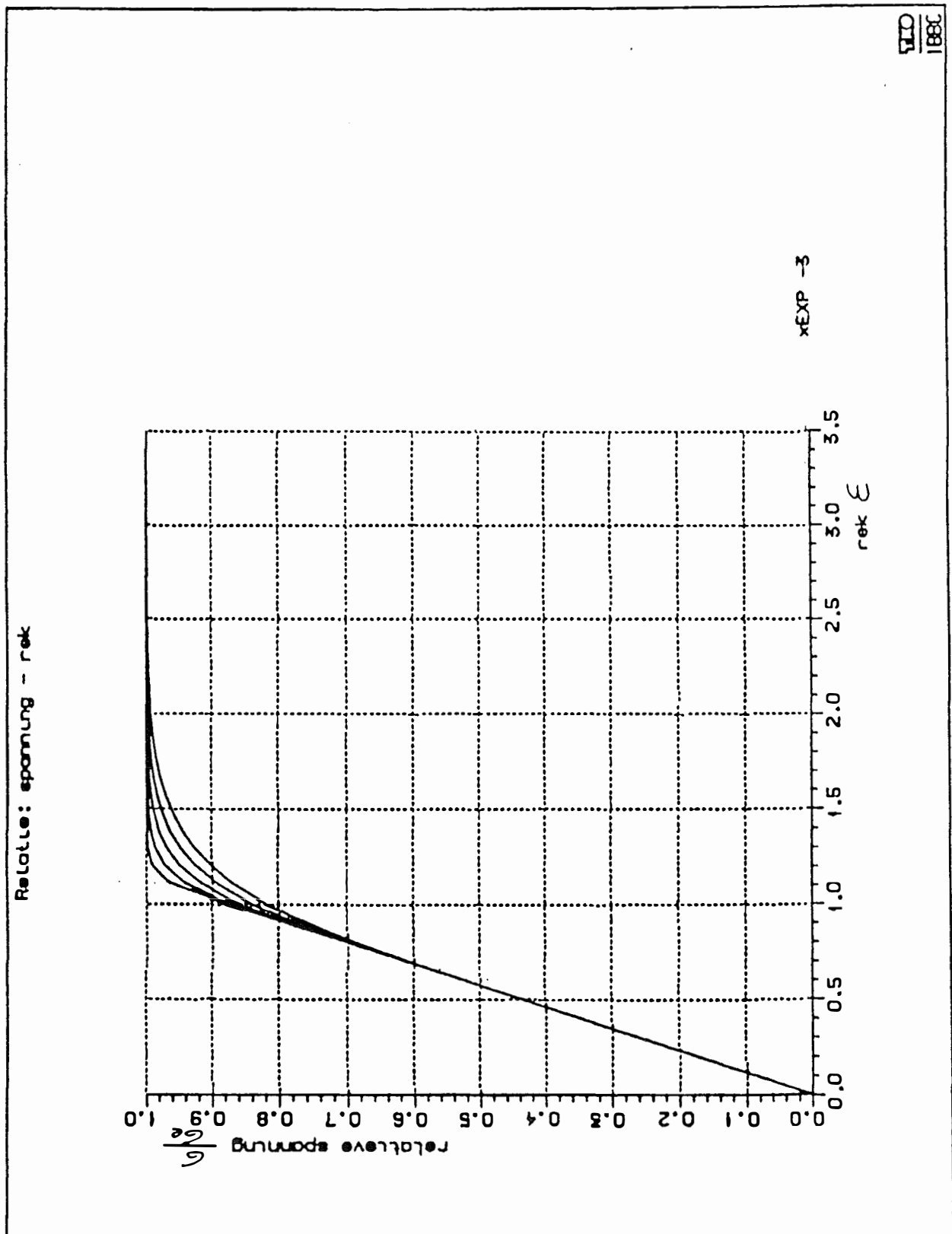


Fig. 5.2

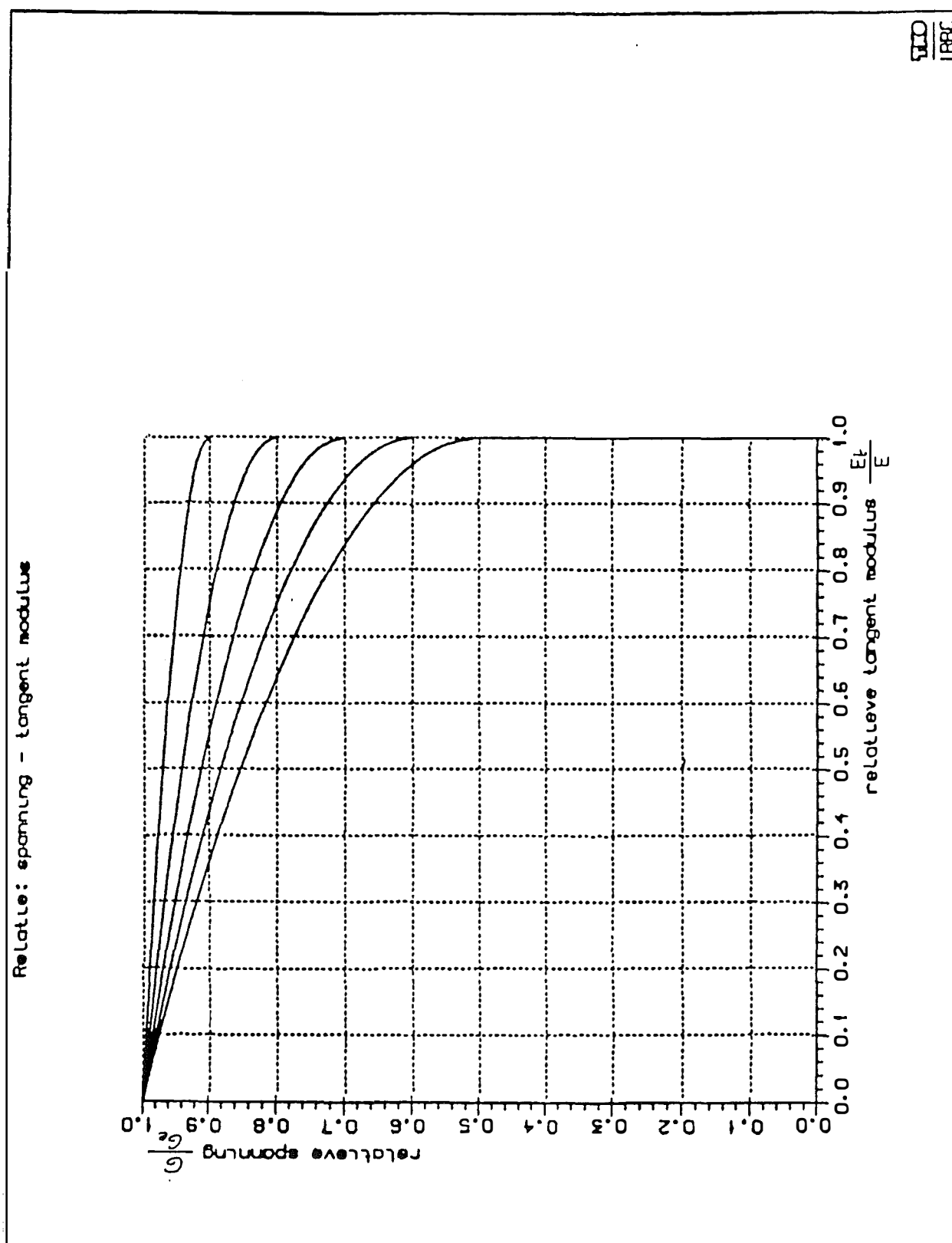


Fig. 5.3

5.1.2.2. Parabolische σ - ε relatie.

Uitgegaan wordt van figuur 5.4. Het verloop van het spannings-rek diagram wordt parabolisch verondersteld en kan m.b.v. de volgende formule worden beschreven:

$$\sigma = a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c \quad \sigma \geq \sigma_p \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \text{Randvoorwaarden: } \sigma(\varepsilon_p) &= \sigma_p \\ \sigma'(\varepsilon_p) &= E \\ \sigma(\varepsilon_0) &= 0 \\ \sigma'(\varepsilon_0) &= 0 \\ \sigma_p &= E\varepsilon_p \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat:

$$\begin{aligned} a &= \frac{E^2}{4(\sigma_p - \sigma_0)} \\ b &= E \left[1 - \frac{\sigma_p}{2(\sigma_p - \sigma_0)} \right] \\ c &= \frac{\sigma_p^2}{4(\sigma_p - \sigma_0)} \end{aligned}$$

De E_t -modulus kan nu als volgt worden bepaald:

$$\begin{aligned} E_t \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) &= \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = 2a\varepsilon + b \\ &= \frac{1}{1-p} \sqrt{(1-p) - (1-p) \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)} \cdot E \end{aligned} \quad (5.7)$$

Het verloop van de E_t -modulus als functie van de spanning is grafisch weergegeven in figuur 5.5.

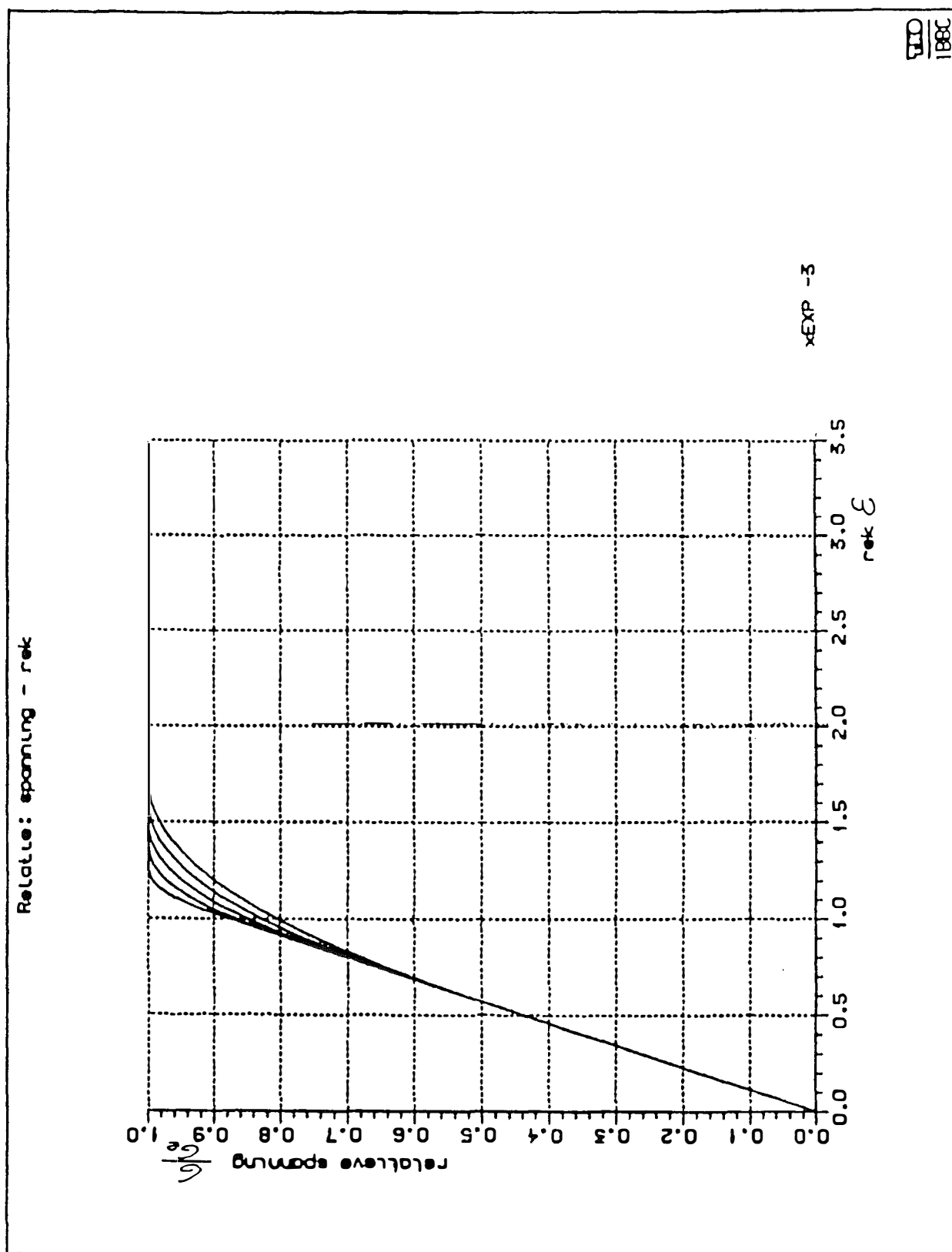


Fig. 5.4

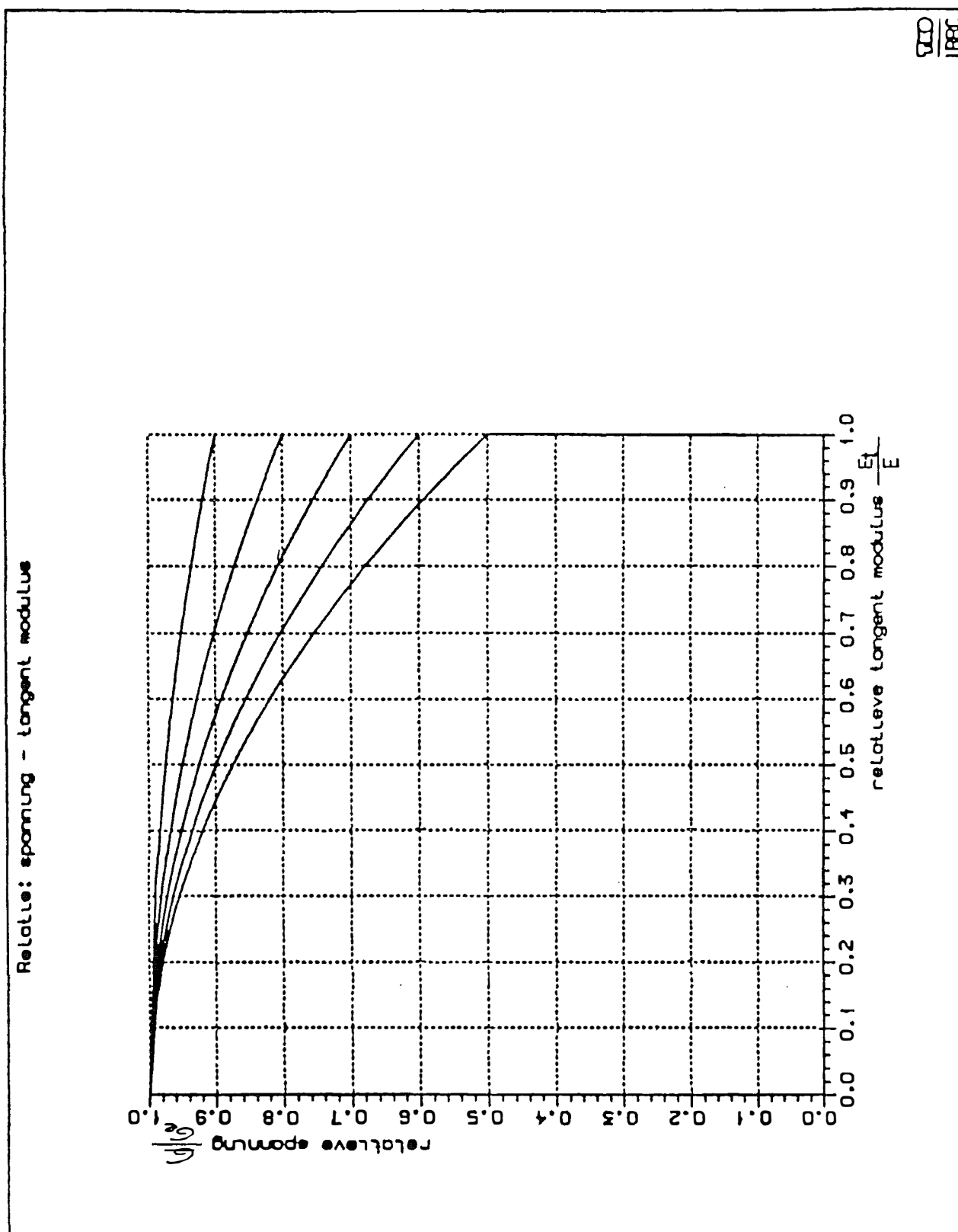


Fig. 5.5

5.1.3. Oplossingen voor de $k_{kr}-\bar{\lambda}_s$ relatie.

Uit de formules (5.4) en (5.7) blijkt dat de E_t -modulus afhankelijk is van de spanningsverhouding (σ/σ_e) in de kolom. Deze spanningsverhouding is maximaal gelijk aan de spanningsverhouding (σ_k/σ_e) die wordt toegestaan door instabiliteitscurven. De kniklengte van de verend gesteunde kolom is hierbij gelijk aan de onderlinge afstand van de verende ondersteuning (k_{kr}!). Door middel van herhaalde substitutie kunnen nu formules voor de benodigde kritieke veerstijfheid worden bepaald, welke wederom afhankelijk zijn van de systeemslankheid van de kolom.

5.1.3.1. Parabolische E_t - σ relatie.

De Eulerformule is in veel voorschriften en richtlijnen een uitgangspunt voor de draagkracht van slanke kolommen. Door nu de E -modulus te vervangen door de E_t -modulus, is de Eulerformule ook geschikt voor het elasto-plastische gebied. De formule voor de draagkracht van de kolom luidt dan:

$$\frac{\sigma_k}{\sigma_e} = \frac{1}{\bar{\lambda}^2} \frac{E_t}{E} \quad (5.8a)$$

Opm.: Het CRC gebruikt na de proportionaliteitsgrens ($p = 0.5$) een parabolische $E_t - \sigma$ relatie (form. 5.4). Formule (5.8a) kan dan worden herschreven tot:

$$\frac{\sigma_k}{\sigma_e} = 1 - \frac{\bar{\lambda}^2}{4} \quad (5.8b)$$

Substitutie van formule (5.8a) met $\bar{\lambda}_s = \bar{\lambda}$ in de formule van de E_t -modulus (5.4) leidt tot een kwadratische vergelijking in (E_t/E) :

$$\frac{1}{\bar{\lambda}_s^4} \left(\frac{E_t}{E} \right)^2 + [(1-p)^2 - \frac{2p}{\bar{\lambda}_s^2}] \left(\frac{E_t}{E} \right) + 2p - 1 = 0 \quad (5.9)$$

De oplossing van deze kwadratische vergelijking luidt:

$$\frac{E_t}{E} = p\bar{\lambda}_s^2 - \frac{\bar{\lambda}_s^2}{2}(1-p)^2 + \frac{(p-1)}{2} \sqrt{\bar{\lambda}_s^8(1-p)^2 - 4p\bar{\lambda}_s^6 + 4\bar{\lambda}_s^4} \quad (5.10)$$

Substitutie van de formules (5.10) in formule (5.2) leidt tot de volgende formule voor de kritieke veerstijfheid in het elasto-plastische gebied:

$$k_{kr} = \left\{ \frac{A\sigma_s}{\xi a} \right\} \left\{ \left[p - \frac{\bar{\lambda}_s^2}{2}(1-p)^2 \right] - \frac{(p-1)}{2} \sqrt{\bar{\lambda}_s^4(1-p)^2 - 4p\bar{\lambda}_s^2 + 4} \right\} \quad (5.11)$$

Deze "academische" oplossing is weergegeven in figuur 5.6 voor $p = 0.5$ tot $p = 0.9$. Opvallend is, dat indien $p \rightarrow 1$, de oplossing niet de Eulerse oplossing voor de kritieke veerstijfheid benadert, maar voor $\bar{\lambda} \leq 1$ nadert tot $(A\sigma_s/\xi a)$. De oplossing is dan gelijk aan die in figuur 3.11.

Het CRC gebruikt voor de knikcurve $p = 0.5$. Toepassing van $p = 0.5$ in formule (5.11) leidt tot de volgende betrekking voor de kritieke veerstijfheid in het elasto-plastische gebied:

$$k_{kr} = \left\{ \frac{A\sigma_s}{\xi a} \right\} \left\{ 1 - \frac{\bar{\lambda}_s^2}{4} \right\} \quad (5.12)$$

Grafisch wordt deze oplossing in figuur 5.6 weergegeven door de lijn $p = 0.5$.

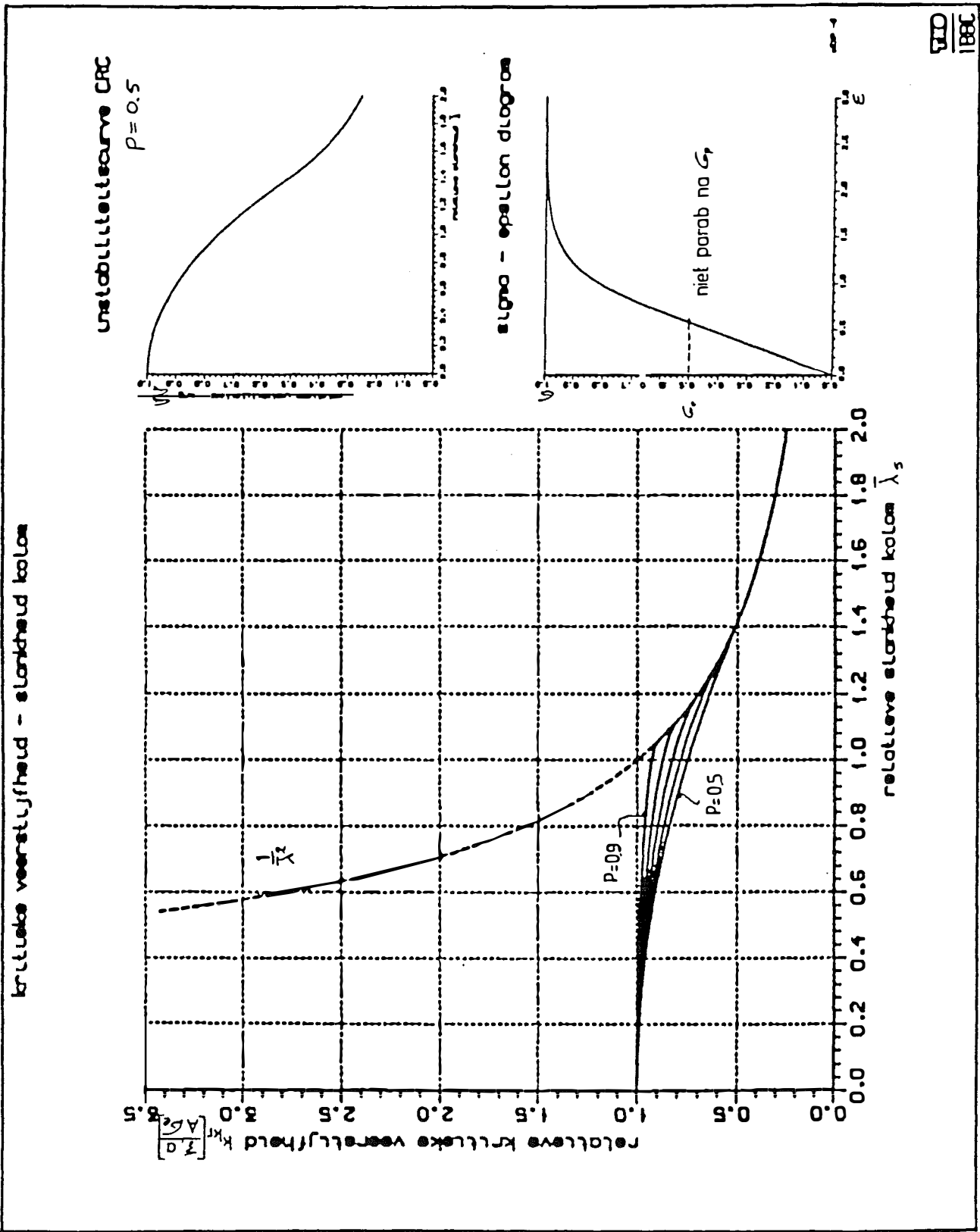


Fig. 5.6

5.1.3.2. Parabolische E_t - σ relatie ; knikcurve ECCS (b)

Substitutie van de "parabolische E_t -modulus" (form. 5.4) in de formule voor de kritieke veerstijfheid (5.2), leidt voor $\sigma \geq \sigma_p$ tot de volgende formule voor de kritieke veerstijfheid:

$$k_{kr} = \left\{ \frac{A\sigma_g}{\xi a} \right\} \frac{1}{\bar{\lambda}_g^2} \left[1 - \left(\frac{(\sigma/\sigma_g) - p}{1 - p} \right)^2 \right] \quad (5.13)$$

Voor de spanningsverhouding (σ/σ_g) wordt nu de relatieve instabiliteitsspanning (σ_k/σ_g) , gegeven door knikcurve ECCS(b), aangehouden. Dit leidt tot een complexe formule voor de relatie tussen de benodigde kritieke veerstijfheid en de systeemslankheid. Grafisch is deze relatie weergegeven in figuur 5.7a.

Uit figuur 5.7a blijkt dat de E_t -modulus in eerste instantie inderdaad de benodigde kritieke veerstijfheid reduceert. Naarmate de systeemslankheid kleiner wordt is de reductie sterker. Voor $0 \leq \bar{\lambda}_g \leq 0.2$ is de benodigde kritieke veerstijfheid echter gelijk aan nul. Dit kan natuurlijk niet juist zijn. Dit wordt veroorzaakt doordat de ECCS instabiliteitscurven worden begrensd door de vloeigrens. De E_t -modulus is dan gelijk aan nul en dus ook de benodigde kritieke veerstijfheid.

Om toch reële formules voor de kritieke veerstijfheid te verkrijgen kan worden overwogen om voor slankheden, kleiner dan de bij het maximum behorende slankheid, het maximum aan te houden. Grafisch is dit weergegeven in figuur 5.7b.

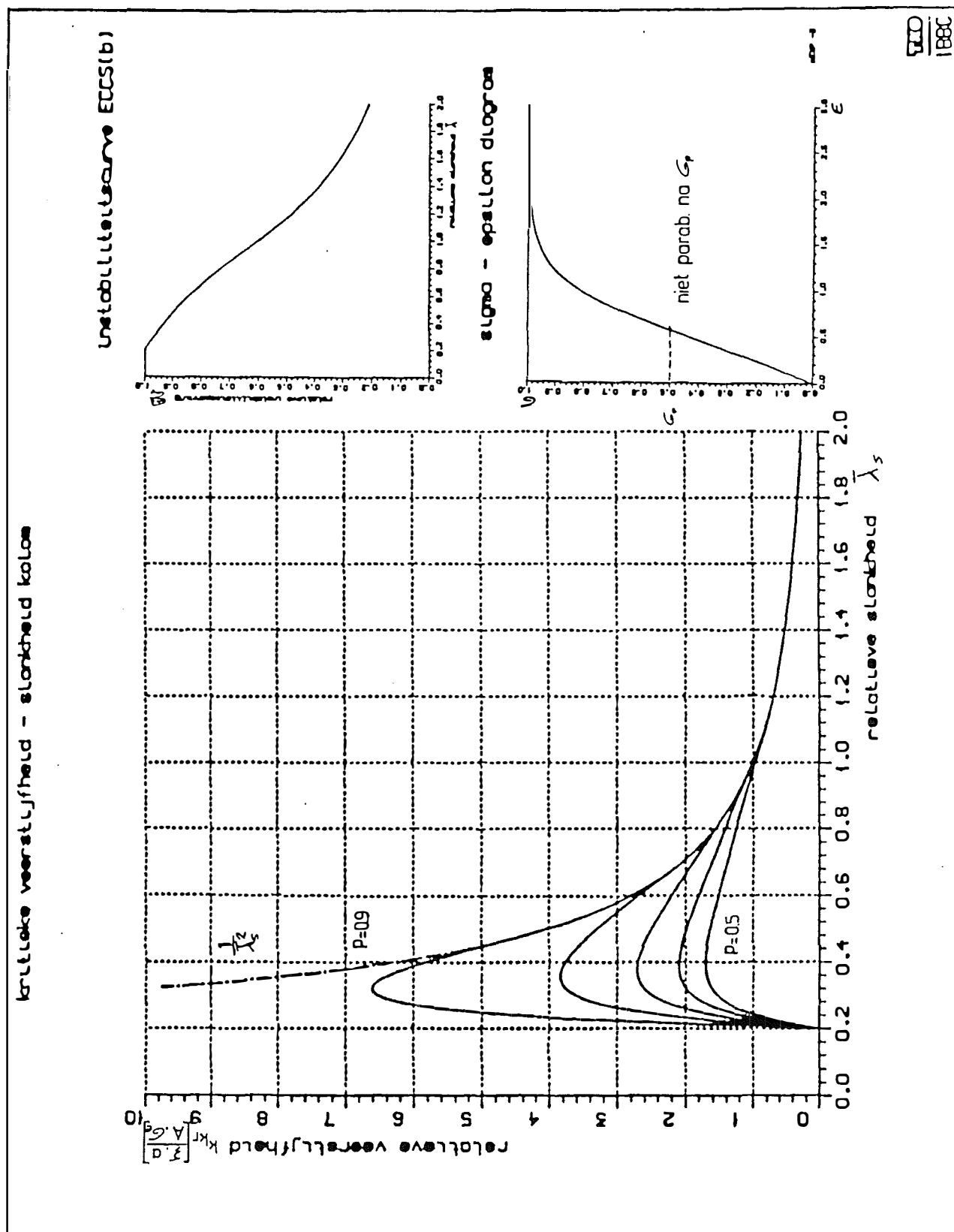


Fig. 5.7a

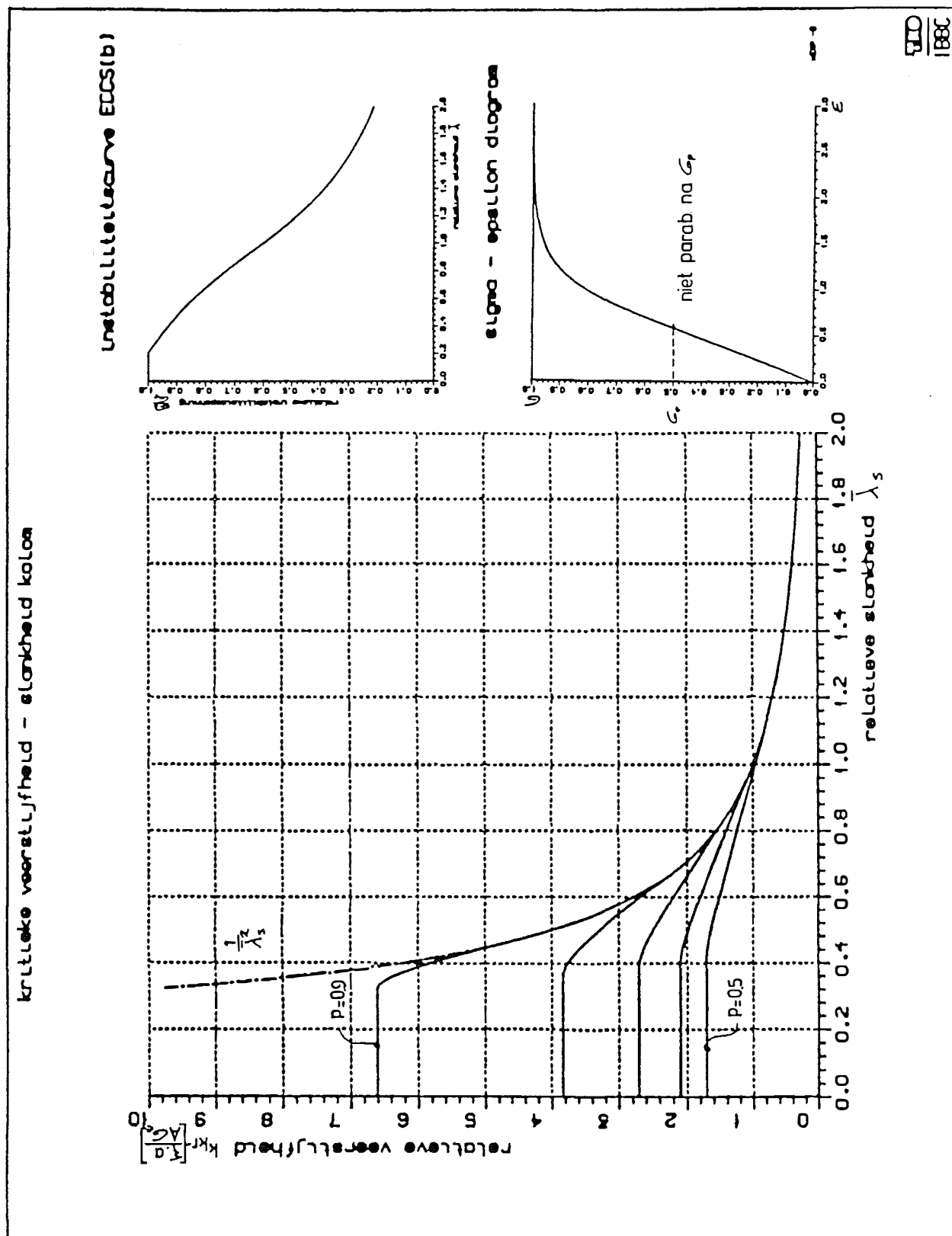


Fig. 5.7b

5.1.3.3. Parabolische $\sigma - \varepsilon$ relatie; ECCS knikcurve (b).

Substitutie van de E_t -modulus (form. 5.7) in de formule voor de kritieke veerstijfheid (5.2), leidt voor $\sigma \geq \sigma_p$ tot de volgende formule voor k_{kr} :

$$k_{kr} = \left\{ \frac{A\sigma_e}{\xi a} \right\} \frac{1}{1-p} \sqrt{(1-p) - (1-p)\left(\frac{\sigma}{\sigma_e}\right)} \quad (5.14)$$

Voor de spanningsverhouding (σ/σ_e) wordt de instabiliteitsspanning (σ_k/σ_e) , gegeven door de instabiliteitscurve ECCS(b), aangehouden. Dit leidt wederom tot een complexe formule voor de relatie tussen de benodigde kritieke veerstijfheid en de systeemslankheid. Grafisch is deze relatie weergegeven in figuur 5.8a.

Evenals bij de oplossing in paragraaf 5.1.3.2 is ook bij deze oplossing de benodigde kritieke veerstijfheid voor $0 \leq \bar{\lambda}_s \leq 0.2$ gelijk aan nul en kan in dit gebied dus niet juist zijn. Daarom is ook bij deze oplossing voor slankheden kleiner dan de bij het maximum behorende slankheid, het maximum aangehouden (fig. 5.8b).

Opvallend in de figuren 5.8a,b is de discontinuïteit ter plaatse van de Eulerse oplossing. Dit kan fysisch niet juist zijn. Dit is de reden dat in het vervolgonderzoek de spannings-rek relatie van figuur 5.2 wordt toegepast.

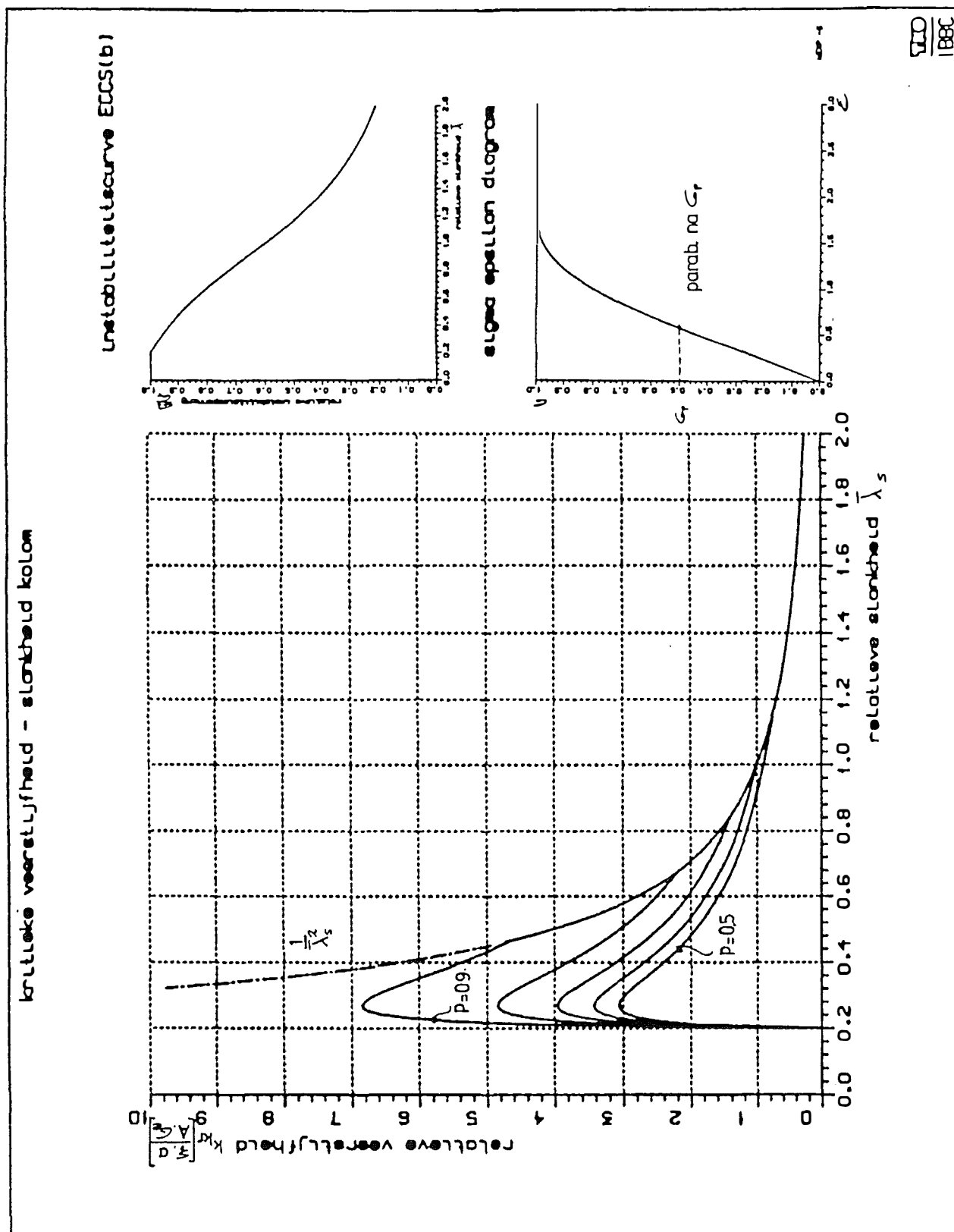


Fig. 5.8a

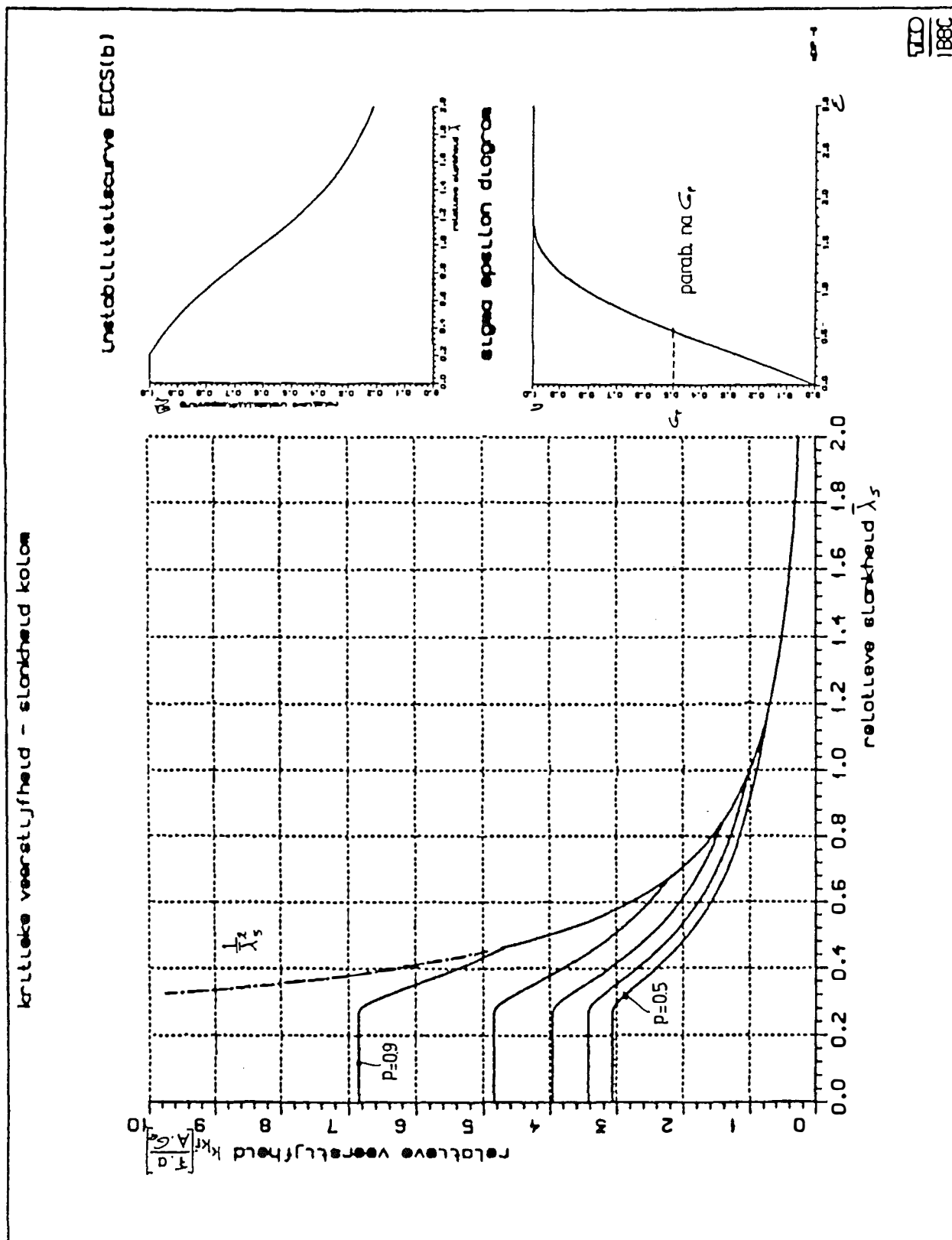


Fig. 5.8b

5.1.3.4. Parabolische E_t - σ relatie; fictieve knikcurve ECCS.

De oplossingen in paragrafen 5.1.3.2 en 5.1.3.3 zijn dus niet correct voor kleine slankheden. De oorzaak hiervan ligt bij de begrenzing van de draagkracht van kolommen door de vloeigrens. Bij de ECCS instabiliteitscurven wordt aangenomen dat niet knik, maar de vloeigrens maatgevend is voor kolommen met een relatieve slankheid $\bar{\lambda}$ kleiner dan 0.2. Daardoor ontstaat een discontinuïteit t.p.v. $\bar{\lambda} = 0.2$ die fysisch niet juist kan zijn.

De oplossing van dit probleem wordt gezocht in het aanpassen van de ECCS instabiliteitscurven, zodat een vloeiende overgang t.p.v. $\bar{\lambda} = 0.2$ wordt verkregen. Een drietal mogelijkheden zijn daartoe onderzocht:

- 1.) Inwendige aftopping van de ECCS instabiliteitscurven door een tweede graads vergelijking.
- 2.) Uitwendige aftopping van de ECCS instabiliteitscurven door een tweede graads vergelijking.
- 3.) Uitwendige aftopping van de ECCS instabiliteitscurven door een derde graads vergelijking.

Aanpassing van de ECCS instabiliteitscurven vindt plaats tot de relatieve slankheden $\bar{\lambda} = 0.25, 0.30$ en 0.50 .

ad 1.) Inwendige aftopping van de ECCS instabiliteits curven door een tweede graads vergelijking.

De tweede graads vergelijking luidt in formule:

$$f(\bar{\lambda}) = a^1 \bar{\lambda}^2 + b^1 \bar{\lambda} + c^1 \quad (5.15)$$

De randvoorwaarden zijn:

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 0$$

$$f(x) = \frac{\sigma_k}{\sigma_e}(x) * 1$$

Voor instabiliteitscurve ECCS(b) zijn de coëfficiënten van formule 5.15 bepaald en in tabel 5.1 weergegeven:

Tabel 5.1:

Coëff.	x = 0.25	x = 0.30	x = 0.50
a	-0.288	-0.400	-0.460
b	0	0	0
c	1	1	1

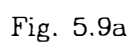
Substitutie van formule 5.15 voor (σ/σ_k) in formule (5.13) leidt tot de volgende formule voor de kritieke veerstijfheid voor $\bar{\lambda} \leq x$:

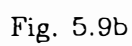
$$k_{k\tau} = \left(\frac{\xi a}{A \sigma_e} \right) \frac{1}{\bar{\lambda}_s^2} \left[1 - \left(\frac{a^1 \bar{\lambda}^2 + 1 - p}{1 - p} \right)^2 \right] \quad (5.16)$$

Voor $\bar{\lambda}_s \geq x$ geldt de oplossing van paragraaf 5.1.3.2.

Grafisch is bovenstaande oplossing weergegeven in de figuren 5.9 a, b en c.

*1 Aansluiting op ECCS knikcurve t.p.v. $\bar{\lambda} = x$





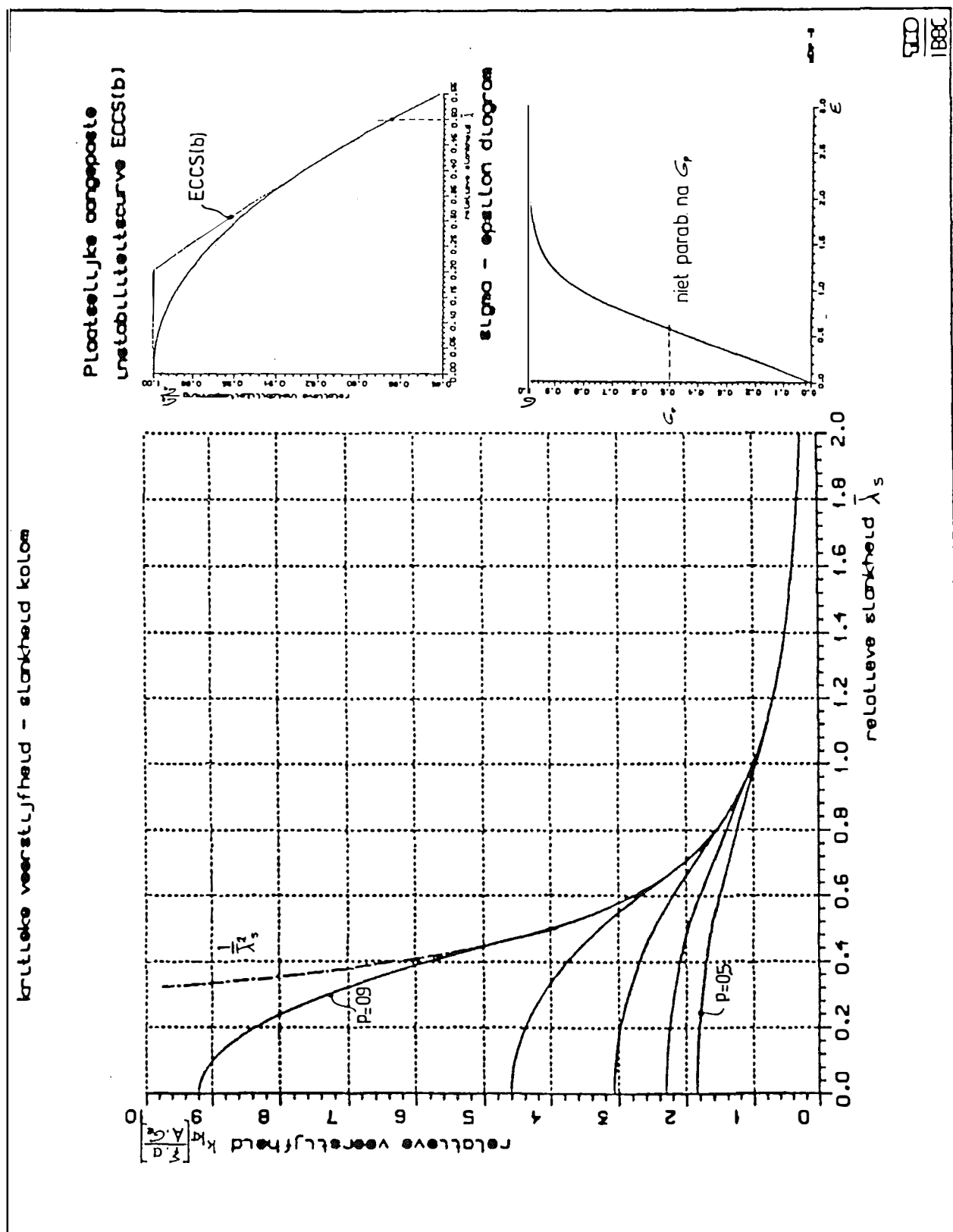


Fig. 5.9c

ad 2.) Uitwendige aftopping van de ECCS instabiliteits curven door een tweede graads vergelijking.

De tweede graads vergelijking luidt in formule:

$$f(\bar{\lambda}) = a^1 \bar{\lambda}^2 + b^1 \bar{\lambda} + c^1 \quad (5.17)$$

De randvoorwaarden zijn:

$$f(0.2) = 1$$

$$f'(0.2) = 0$$

$$f(x) = \frac{\sigma_k}{\sigma_e}(x) * 1$$

Voor instabiliteitscurve ECCS(b) zijn de coëfficiënten van formule 5.17 bepaald en in tabel 5.2 weergegeven:

Tabel 5.2:

Coëff.	x = 0.25	x = 0.30	x = 0.50
a	-7.2	-3.6	-1.278
b	2.88	1.44	0.511
c	0.712	0.856	0.949

Substitutie van formule 5.17 voor (σ/σ_e) in formule (5.13) leidt tot de volgende formule voor de kritieke veerstijfheid voor $\bar{\lambda} \leq x$:

$$k_{kr} = \left\{ \frac{f a}{A \sigma_e} \right\} \frac{1}{\bar{\lambda}_s^2} \left[1 - \left(\frac{a^1 \bar{\lambda}_s^2 + b^1 \bar{\lambda}_s + c - p}{1 - p} \right)^2 \right] \quad (5.18)$$

Voor $0 \leq \bar{\lambda}_e \leq 0.2$ en $\bar{\lambda}_s \geq x$ geldt de oplossing van paragraaf 5.1.3.2.

Grafisch is bovenstaande oplossing weergegeven in de figuren 5.10 a,b en c.

*1 Aansluiting op ECCS knikcurven t.p.v. $\bar{\lambda} = x$

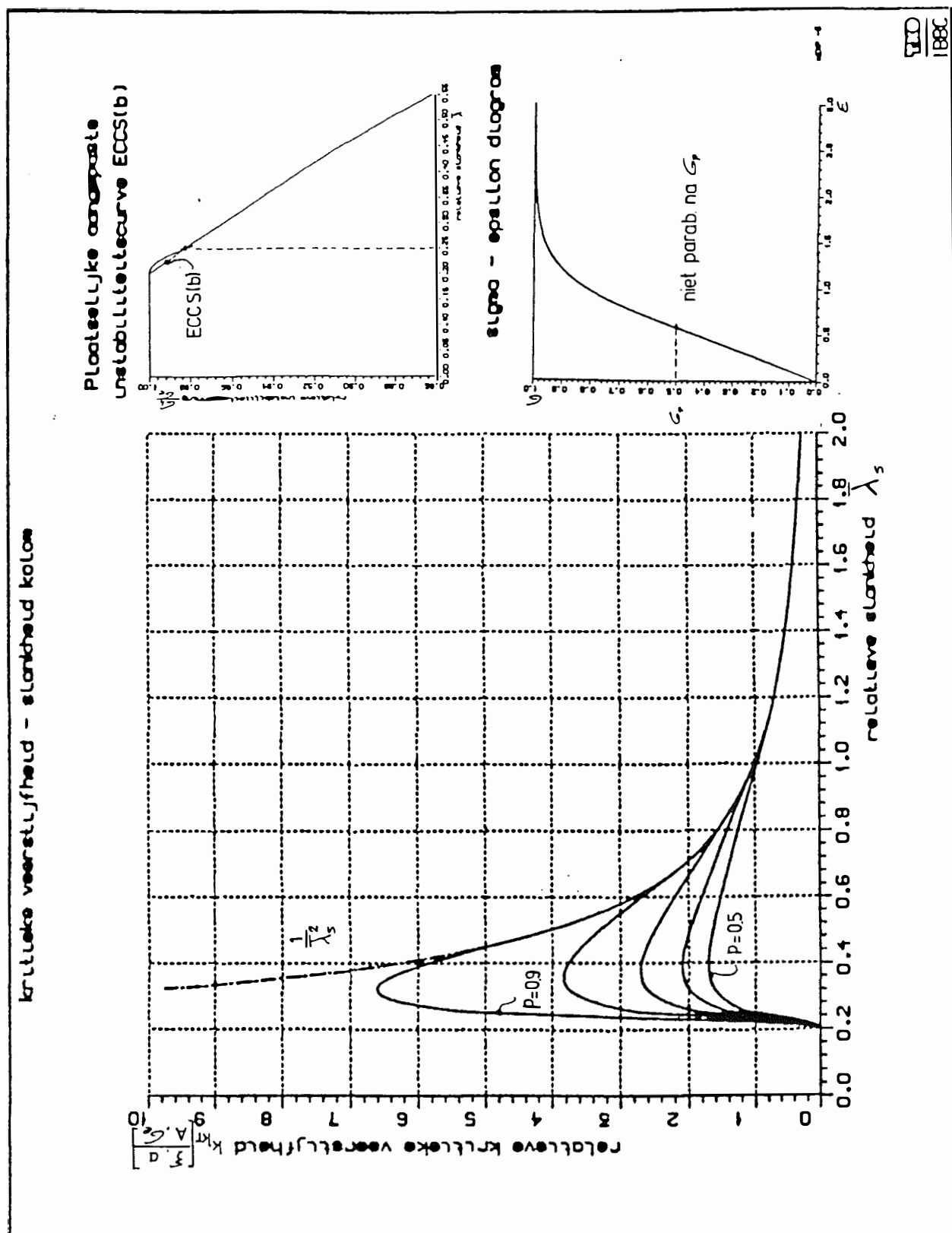


Fig. 5.10a

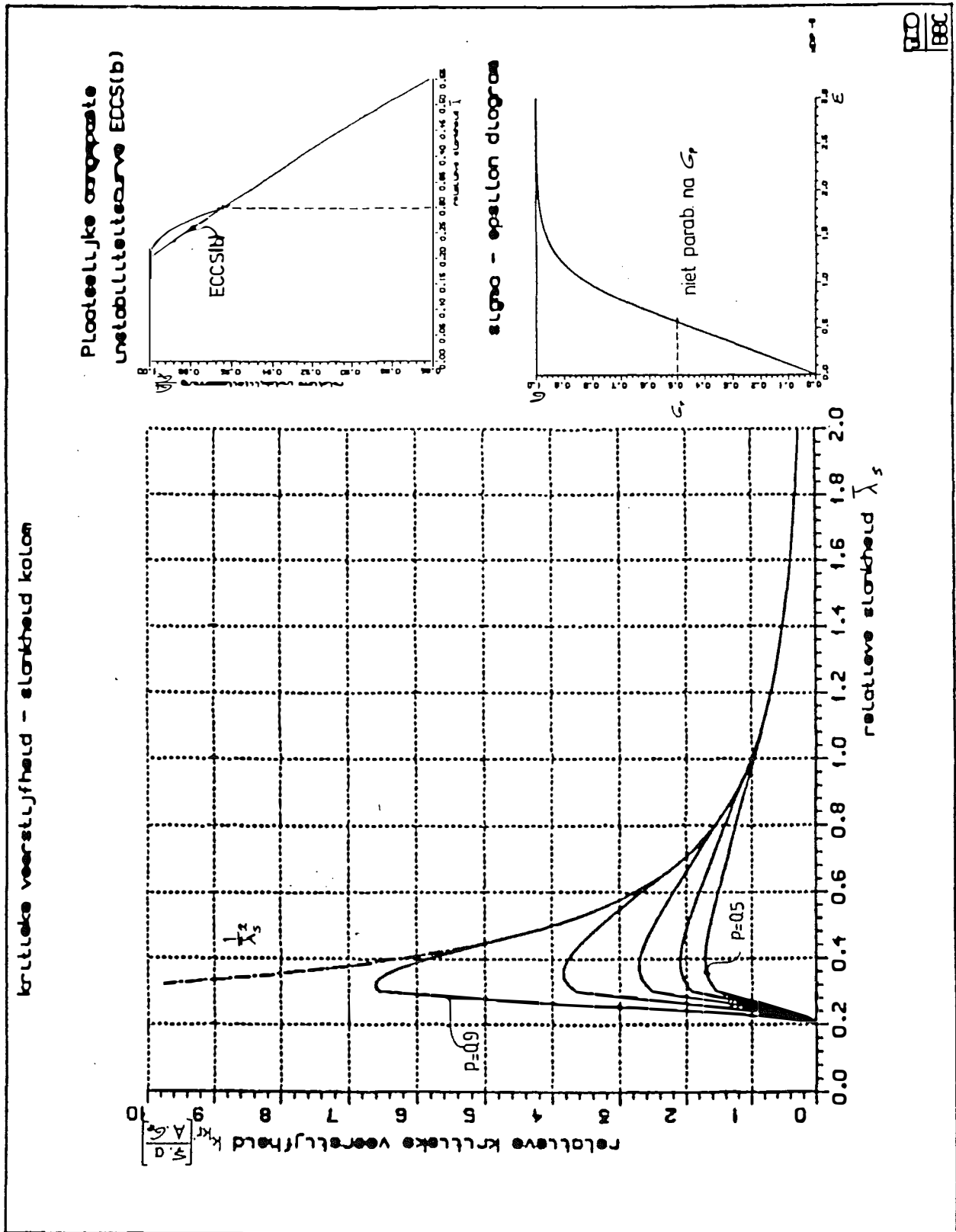


Fig. 5.10b

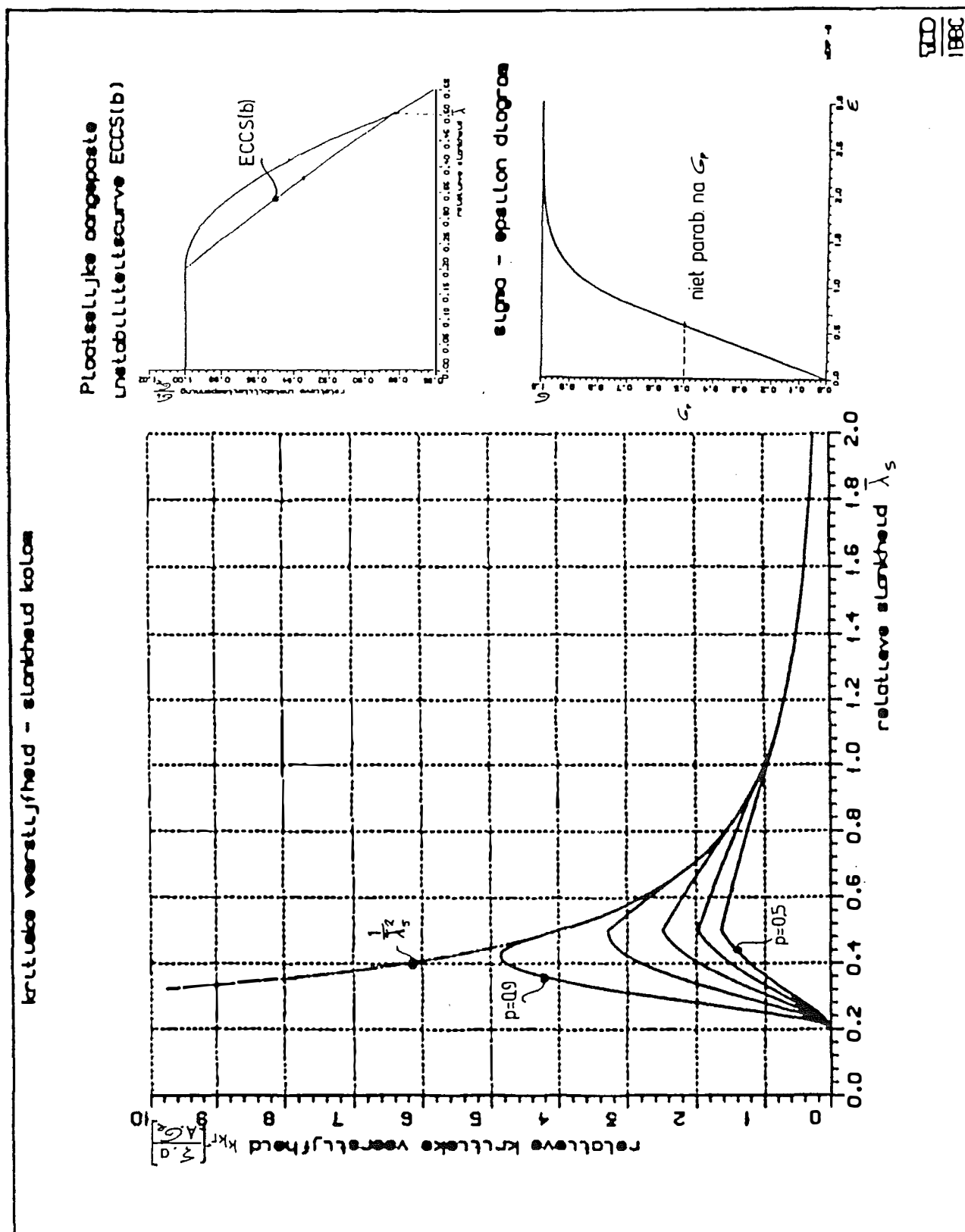


Fig. 5.10c

ad 3.) Uitwendige aftopping van de ECCS instabiliteits curven door een derde graads vergelijking.

De derde graads vergelijking luidt in formule:

$$f(\bar{\lambda}) = a^1 \bar{\lambda}^3 + b^1 \bar{\lambda}^2 + c^1 \bar{\lambda} + d^1 \quad (5.19)$$

De randvoorwaarden zijn:

$$f(0.2) = 1$$

$$f'(0.2) = 0$$

$$f(x) = \frac{\sigma_k}{\sigma_e}(x) * 1$$

$$f'(x) = \frac{\sigma_k'}{\sigma_e}(x) * 1$$

Voor instabiliteitscurve ECCS(b) zijn de coëfficiënten van formule 5.19 bepaald en in tabel 5.3 weergegeven:

Tabel 5.3:

Coëff.	x = 0.25	x = 0.30	x = 0.50
a	34.5714	19.667	3.3129
b	-24.140	-15.7934	-4.171
c	5.2309	3.800	1.2443
d	0.6428	0.8915	0.8915

Substitutie van formule 5.19 voor (σ/σ_e) in formule (5.13) leidt tot de volgende formule voor de kritieke veerstijfheid voor $\bar{\lambda}_s \leq x$:

$$k_{kr} = \left\{ \frac{f a}{A \sigma_e} \right\} \frac{1}{\bar{\lambda}_s^2} \left[1 - \left(\frac{a^1 \bar{\lambda}_s^3 + b^1 \bar{\lambda}_s^2 + c^1 \bar{\lambda}_s + d^1 - p}{1 - p} \right)^2 \right] \quad (5.20)$$

Voor $0 \leq \bar{\lambda}_s \leq 0.2$ en $\bar{\lambda} \geq x$ geldt de oplossing van paragraaf 5.1.3.2.

Grafisch is bovenstaande oplossing weergegeven in de figuren 5.11 a,b en c.

*1 Aansluiting op ECCS knikcurve t.p.v. $\bar{\lambda} = x$

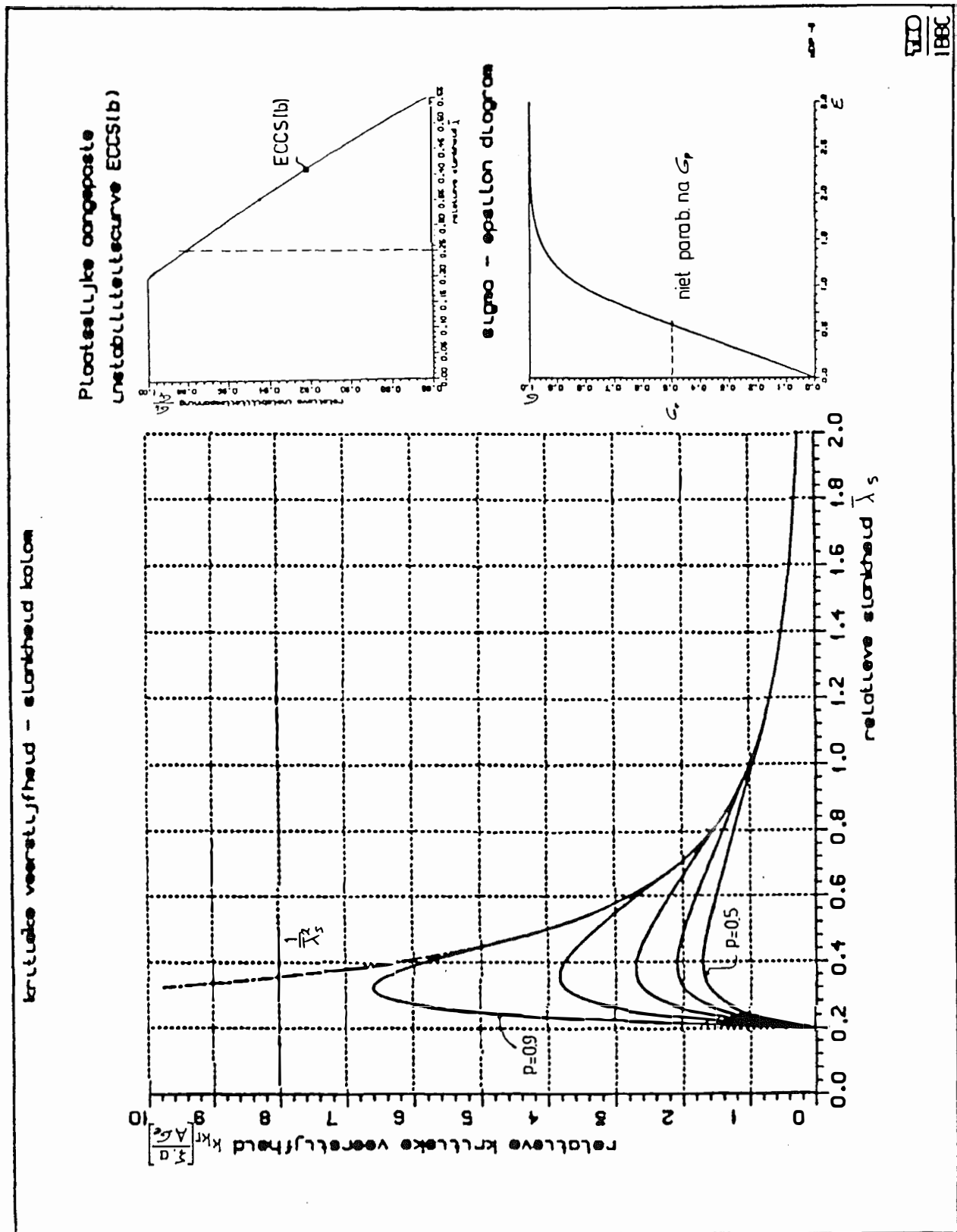


Fig. 5.11a

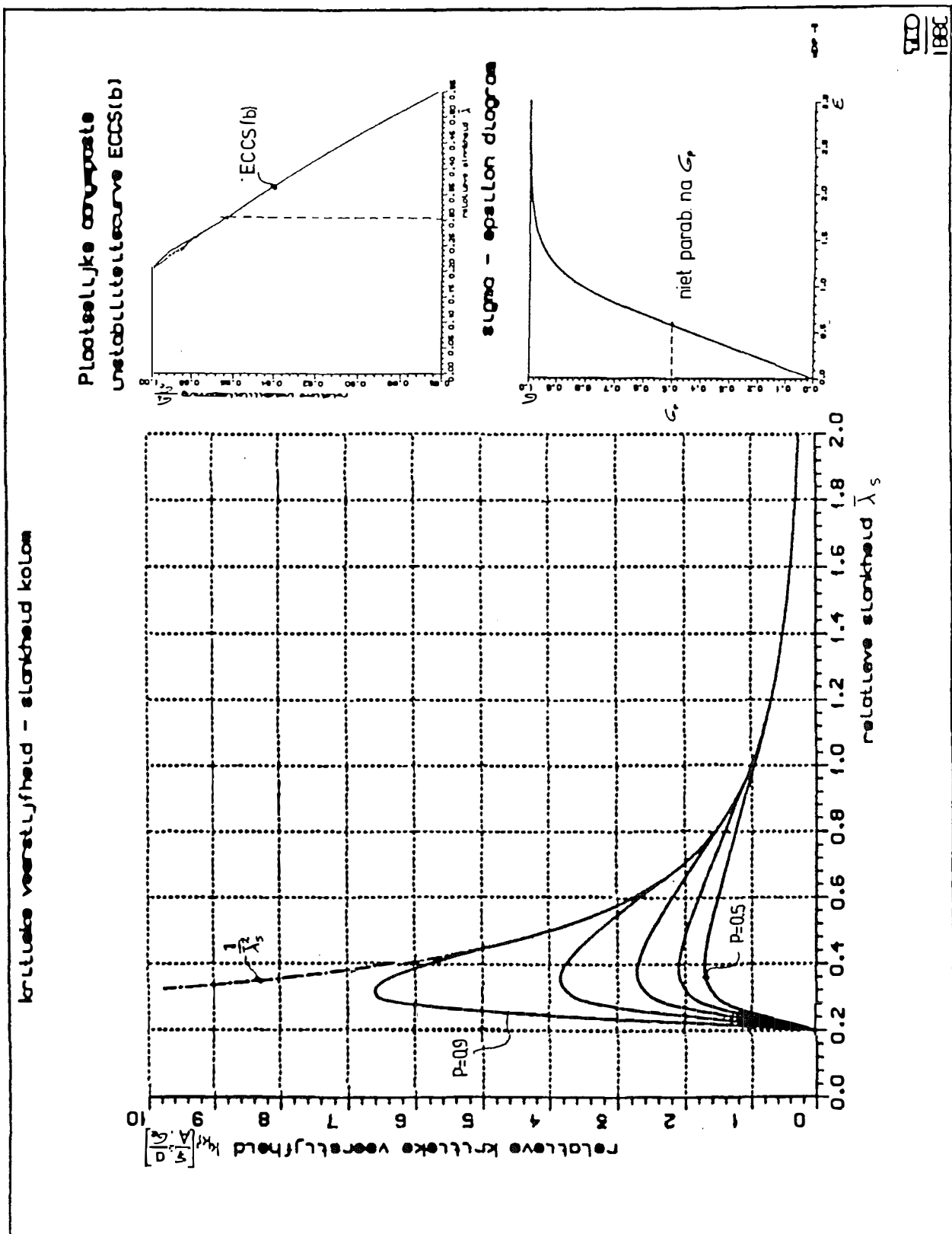


Fig. 5.11b

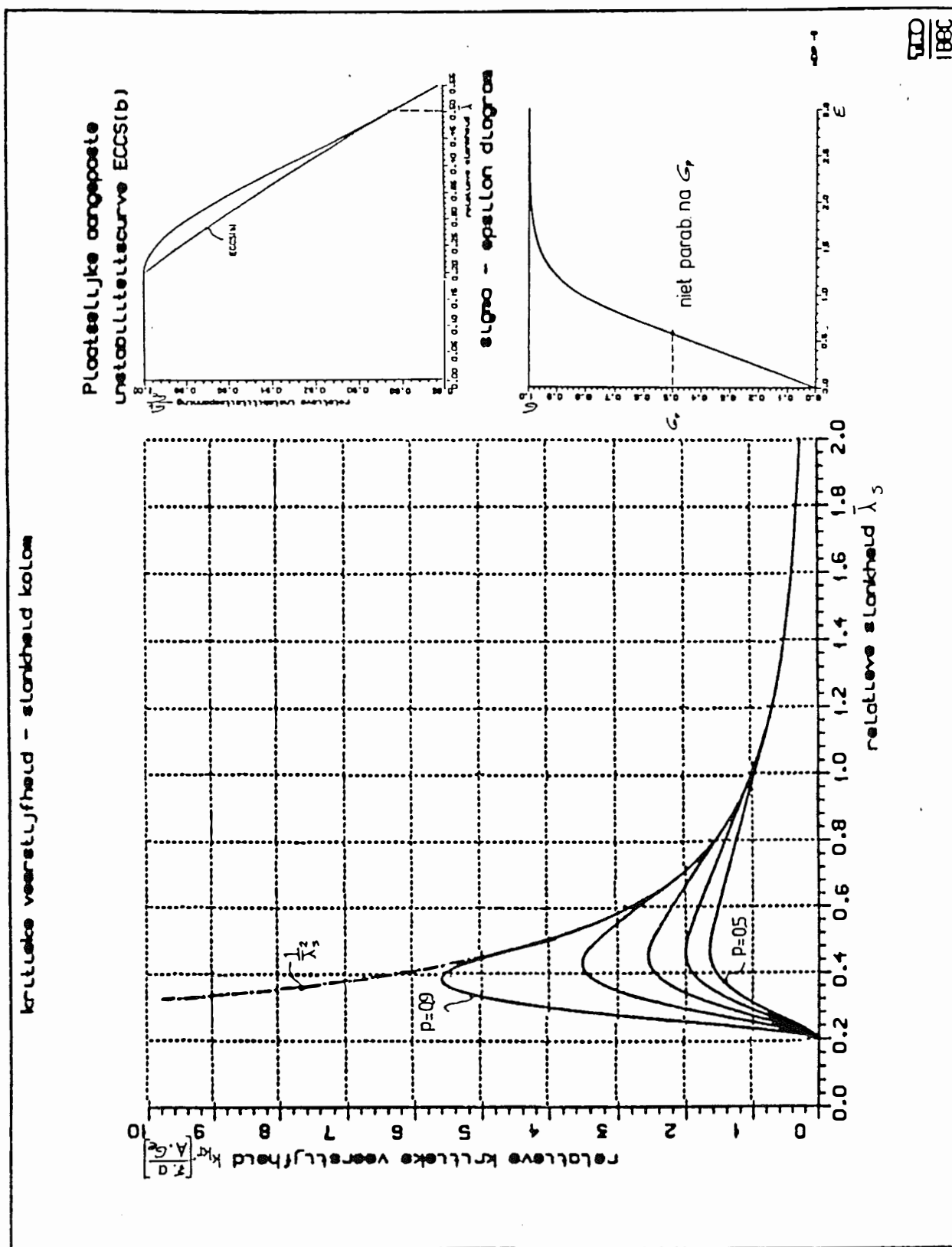


Fig. 5.11c

5.1.4. Resumé en conclusies.

- Formule 5.11 (fig. 5.6) geeft een relatie tussen de benodigde kritieke veerstijfheid en de relatieve systeemslankheid van de kolom welke voldoet aan de doelstelling van dit rapport. De curven zijn continu stijgend naarmate de relatieve systeemslankheid van de kolom kleiner wordt, maar zijn voor waarden nabij $\bar{\lambda}_s = 0$ duidelijk begrensd.

Het voordeel van deze oplossing is dat bij zowel de instabiliteitscurven als bij de formule voor de kritieke veerstijfheid alleen de invloed van residuele spanningen is verwerkt. De invloed van een tweede belangrijke factor, geometrische imperfecties, kan wellicht afzonderlijk in rekening worden gebracht.

Een nadeel is dat de ECCS instabiliteitscurven voor $\bar{\lambda} \leq \approx 0.6$ een hogere draagkracht voor de kolom toestaat (fig. 5.12; CRC $\rightarrow$ p = 0.5). Dit verschil is echter gering en de verlaging van de veiligheid is waarschijnlijk niet kritiek.

De juistheid van deze oplossing zal nog moeten worden geverifieerd aan geometrisch- en fysisch niet-lineaire computerberekeningen.

- Gebruik van de gemodificeerde E_t -modulus theorie blijkt inderdaad de benodigde kritieke veerstijfheid volgens een Eulerse knikberekening te reduceren.

Toepassing van de ECCS-instabiliteitscurven leidt echter tot onjuiste resultaten voor de benodigde kritieke veerstijfheid. De oorzaak hiervan moet worden gezocht in de begrenzing van de draagkracht van kolommen door de vloeigrens.

Een tweede oplossing voor de kritieke veerstijfheid welke ook voldoet aan de doelstelling van dit rapport wordt verkregen, indien de ECCS knikcurven inwendig worden afgetopt door een tweede graads kromme tot $\bar{\lambda} = 0.5$ (par. 5.1.3.4. ad 1). Een vloeiende knikcurve wordt verkregen en tevens een vloeiende curve voor de relatie tussen de kritieke veerstijfheid en de systeemslankheid van de kolom. De curve is continu stijgend, maar begrensd naarmate de systeemslankheid van de kolom kleiner wordt.

Nadeel van deze oplossing is dat enig draagkrachtsverlies moet worden geaccepteerd (max. 2%). De verlaging van de veiligheid zal echter daardoor niet kritiek zijn.

- De volgende reële oplossingen zullen in het vervolgonderzoek (numerieke verificatie met DIANA) worden betrokken:

- 1.) Par. 5.1.3.1; fig. 5.6
- 2.) Par. 5.1.3.2; fig. 5.7b
- 3.) Par. 5.1.3.4 ad 1; fig. 5.8c

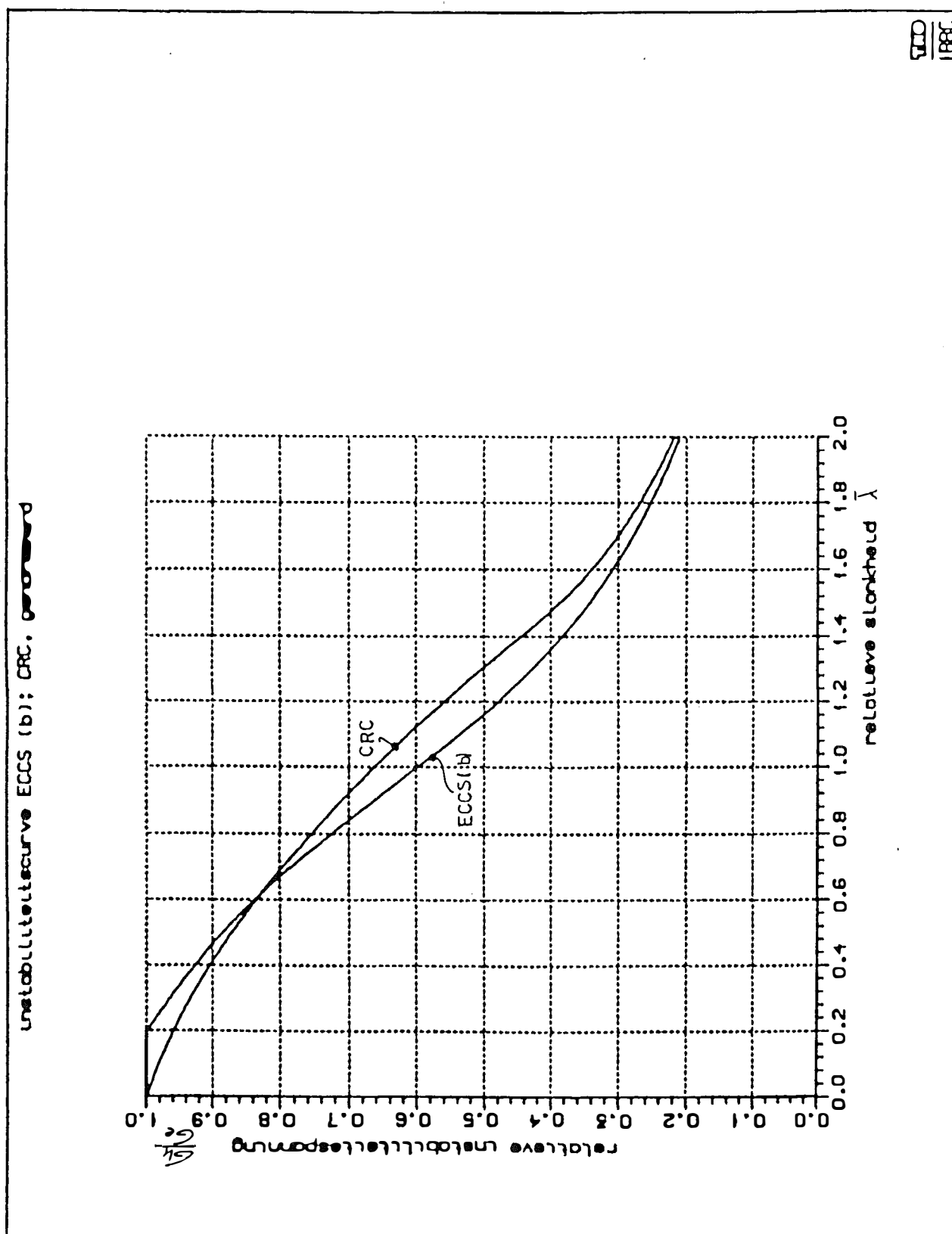


Fig. 5.12:

5.2. Aangereikte oplossing.

Een oplossing voor het bepalen van de kritieke veerstijfheid van niet elastische, verend gesteunde staven is aangegeven door een medewerker van TNO-IBBC.

De formule voor de kritieke veerstijfheid luidt [25]:

$$k_{kr} = \frac{F_E}{\alpha \cdot \xi} \quad (5.1)$$

Gesteld wordt nu dat de axiale belasting op de staaf bij slankheden kleiner dan de grensslankheid (λ_g) wordt begrensd door o.a. vloeien van het materiaal, reductie t.g.v. momenten, etc. Door de TGB-staal 1972 wordt daarom in het elastische gebied een veiligheidsfactor van 1.67 t.o.v. de Eulerse knikkracht gehanteerd. Noem deze verhouding tussen de belasting op de staaf in het rekenstadium en de Eulerse knikkracht β , in formule:

$$\beta = \frac{F_E}{F} \quad (5.2)$$

Substitutie van (5.2) in (5.1) levert de volgende formule op voor de kritieke veerstijfheid:

$$k_{kr} = \frac{F\beta}{\alpha \cdot \xi} \quad (5.3)$$

Door nu voor β in het elasto-plastische en plastische gebied dezelfde waarde aan te houden als in het elastische gebied (TGB-staal 1972 $\rightarrow \beta = 1.67$), is formule (5.3) voor alle slankheden geschikt. Grafisch is formule (5.3) weergegeven in figuur 5.13, waarbij:

$$\beta = 1.67$$

F = De maximaal toe te laten axiale belasting, volgens de TGB-staal 1972.

Opgemerkt wordt nog dat in de (nabije) toekomst andere knikcurven zullen worden gehanteerd en de factor β dus zal veranderen.

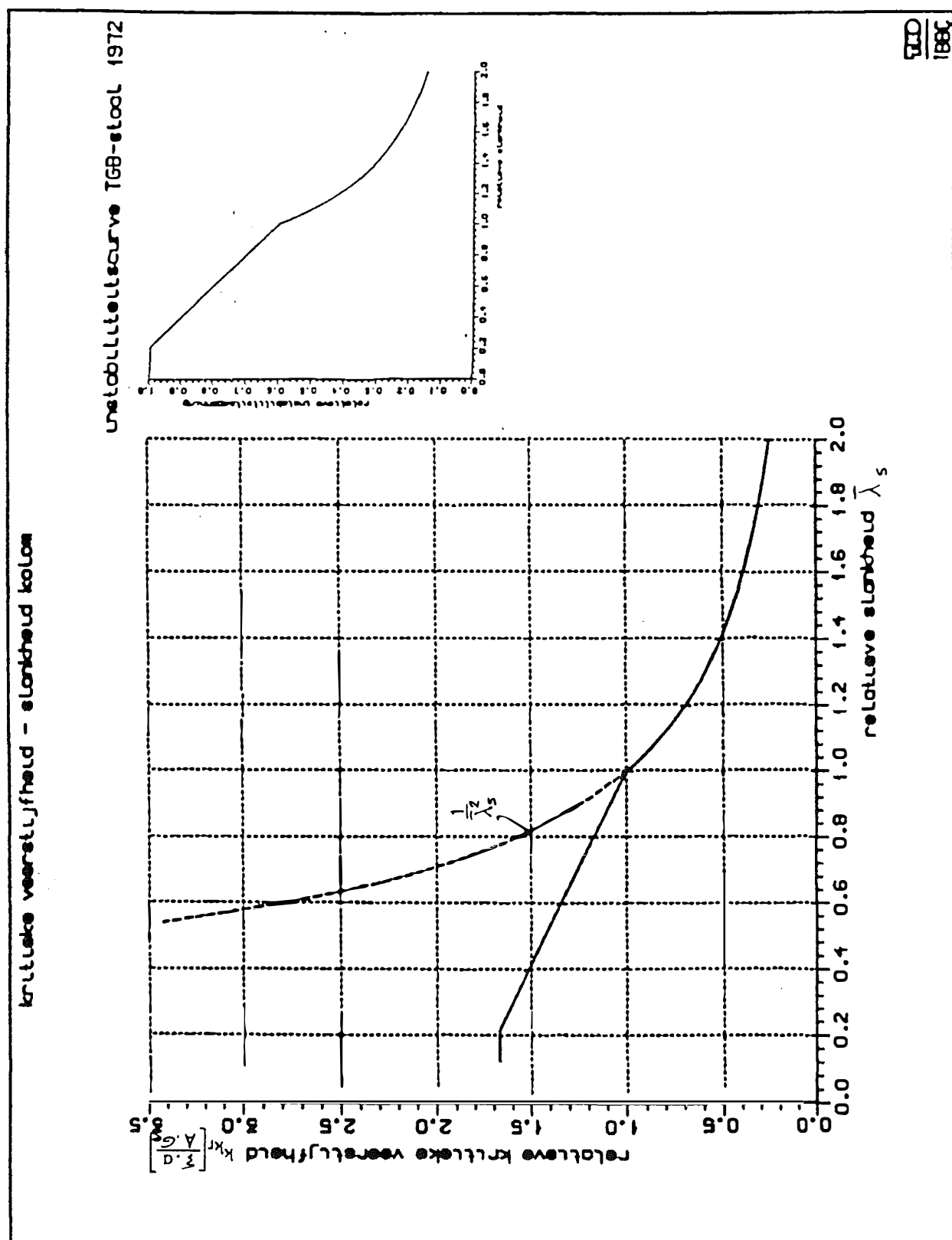


Fig. 5.13: Aangereikte oplossing.

6. Numerieke verificatie met DIANA.

6.1. Algemeen.

In voorgaande hoofdstukken zijn oplossingen verkregen voor de relatie tussen de kritieke veerstijfheid (k_{cr}) en de systeemslankheid $\bar{\lambda}_y$. De oplossingen verschillen sterk en de vraag is welke oplossing de meest realistische waarden geeft voor de kritieke veerstijfheid in zowel het elastisch als het elasto-plastisch gebied, daarbij rekening houdend met de bijbehorende veersterkte.

Verificatie vindt plaats m.b.v. fysisch en geometrisch niet-lineaire computerberekeningen, omdat dit een relatief goedkoop, maar goed alternatief is voor experimenten.

Voor de fysisch en geometrisch niet-lineaire berekeningen is gebruik gemaakt van het computerprogramma DIANA (Displacement method ANALyses). In DIANA kunnen restspanningen en geometrische imperfecties direct worden verwerkt. Een fysisch en geometrisch niet-lineaire berekening m.b.v. DIANA leidt daarom tot een zeer goede benadering van het werkelijke gedrag van een verend gesteunde kolom.

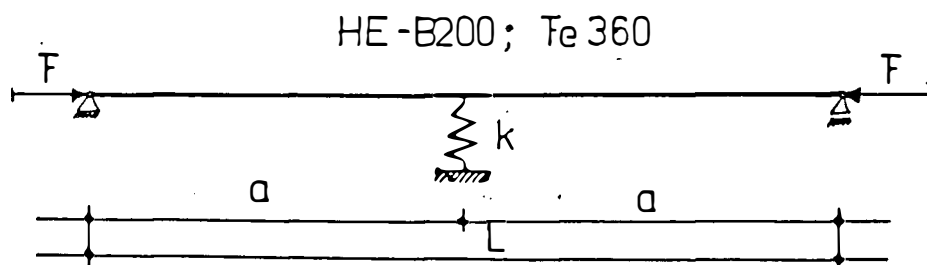
6.2. Schematisering constructie.

Uitgegaan wordt van de modelvorming in par. 4.2. Omdat er dan nog vele mogelijke variaties overblijven, moet het onderzoek met DIANA zich verder beperken.

Allereerst wordt het aantal verende ondersteuningën beperkt. Om het probleem zo eenvoudig en overzichtelijk mogelijk te houden, wordt voor 1 verende ondersteuning in het midden van de te steunen staaf gekozen.

Voor de staaf wordt een bestaand walsprofiel, HE-B200, gekozen. Dit profiel wordt, inclusief zijn onvolkomenheden (restspanningen, geometrische imperfecties, materiaalinhomogeniteiten, etc.) veel in de praktijk toegepast. Door in DIANA dit profiel zo goed mogelijk te modelleren (par. 6.3.), worden realistische resultaten verkregen.

Omdat bij de DIANA-berekeningen enkele materiaaleigenschappen bekend moeten zijn, zal ook voor de staalsoort een keuze moeten worden gemaakt. Gekozen wordt voor de in de praktijk veel gebruikte staalsoort Fe 360.



$$\bar{\lambda}_s = 0.2 \rightarrow L = 3174 \text{ mm.}$$

$$\bar{\lambda}_s = 1.5 \rightarrow L = 23809 \text{ mm.}$$

Fig. 6.1: De te onderzoeken kolommen.

Om de invloed van restspanningen goed in de DIANA-berekeningen mee te kunnen nemen (par. 6.3.2.) wordt knik om de sterkte-as van de staaf beschouwd. Van toepassing is de instabiliteitscurve ECCS(b). Vergelijking met hoofdstuk 5, waarbij ook is uitgegaan van de instabiliteitscurve ECCS(b), is dus mogelijk.

Tot slot moet er nog een keuze worden gemaakt over de lengtes van de te onderzoeken kolommen, of, omdat de doorsnede van de staaf vastligt, over de systeemslankheden.

De huidige methode [25] voor het berekenen van de kritieke veerstijfheid wordt in het elastische gebied ($\bar{\lambda} \geq 1$) geaccepteerd. Vergelijking van de huidige methode met de DIANA resultaten vindt plaats in het elastische gebied. Voor een referentie som is daarom gekozen voor de systeemslankheid $\bar{\lambda}_s = 1.5$ ($L = 23809 \text{ mm.}$).

In het elasto-plastisch gebied is gekozen voor de lage systeemslankheid $\bar{\lambda}_s = 0.2$ ($L = 3174 \text{ mm.}$). Bij deze systeemslankheid zal de huidige methode zeker te hoge waarden geven voor de benodigde kritieke veerstijfheid. Verificatie van oplossingen uit voorgaande hoofdstukken, die meestal in het elasto-plastische gebied veel van elkaar verschillen, vindt dus vooral plaats bij $\bar{\lambda}_s = 0.2$.

6.3. Modelvorming binnen DIANA

Voor het gebruik van het eindige-elementen pakket DIANA moet de schematisering van figuur 6.1 nog sterker worden gemodelleerd. Beslissingen moeten nog worden genomen omtrent de volgende punten:

- 1.) Elementtype en elementenverdeling. (par. 6.3.1.)
- 2.) Restspanningsverdeling. (par. 6.3.2.)
- 3.) Geometrische imperfecties. (par. 6.3.3.)
- 4.) Veerstijfheid. (par. 6.3.4.)

6.3.1. Elementtype en elementenverdeling.

Gekozen is voor het elementtype L6BNL, een twee-knoops (recht) balkelement. Zowel fysisch (niet lineaire elasticiteit), als geometrisch (grote vervormingen) niet lineaire berekeningen kunnen ermee worden uitgevoerd.

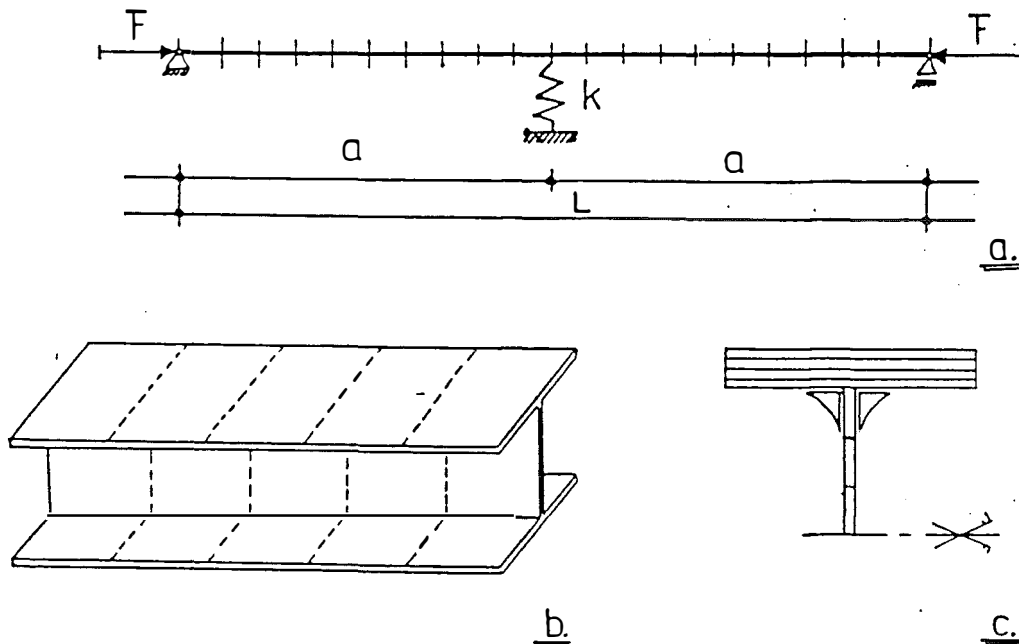


Fig. 6.2.a: Verdeling van de elementen over de kolom.

Fig. 6.2.b: Verdeling van het element in secties.

Fig. 6.2.c: Verdeling van de secties in lagen.

Voor de computerberekeningen met DIANA moet er een keuze worden gemaakt over het aantal elementen. Te veel elementen leidt tot grote

rekentijden en kost veel geheugencapaciteit van de computer. Te weinig elementen, of een slechte verdeling ervan, leidt tot onnauwkeurige resultaten. In [21] is geconcludeerd dat 10 elementen per staaf, voldoende nauwkeurige resultaten geeft en een redelijke rekestijd nodig heeft. Gekozen wordt daarom voor 10 elementen, gelijkmatig per veld verdeeld (fig. 6.2.a).

De fysisch niet-lineairiteit kan nu in rekening worden gebracht doordat het element is onderverdeeld in secties en de secties in lagen, waarvan de bijbehorende integratiepunten de "status" elastisch, elasto-plastisch of geheel plastisch kunnen hebben. Ook hier geldt dat naarmate een element in meer secties en lagen wordt onderverdeeld de resultaten beter worden, maar dat een keuze moet worden gemaakt, opdat de niet-lineaire berekeningen niet te veel rekestijd kosten.

De elementen zijn daartoe onderverdeeld in 5 secties (fig. 6.2.b). De secties zijn op hun beurt onderverdeeld in 16 lagen, 8 voor de flenzen, 6 voor het lijf en twee voor de afrondingsstralen (fig. 6.2.c).

6.3.2. Restspanningsverdeling.

De draagkracht van een centrisc belaste kolom wordt hoofdzakelijk bepaald door restspanningen en de geometrische imperfectie. De geometrische imperfectie wordt in par. 6.3.3. behandeld.

Restspanningen ontstaan door verschillen in afkoelsnelheid gedurende en na het walsen, door koud vervormen en/of andere bewerkingen [24]. De gemiddelde maximale drukspanning is gelijk aan $0.3 \sigma_e$. De restspanningsverdeling over de flenzen wordt meestal parabolisch of lineair aangenomen, en over het lijf constant (fig. 6.3.).

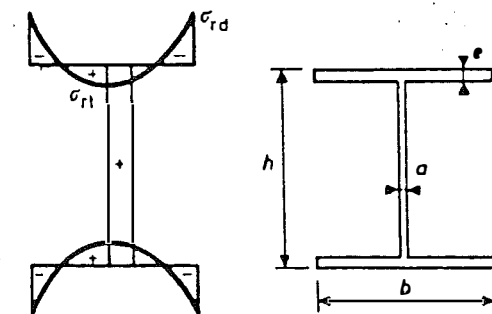


Fig. 6.3.: Restspanningsverloop in een walsprofiel.

Een restspanningsverloop volgens figuur 6.3. kan echter niet op gebruikersnivo in DIANA worden ingevoerd. Daartoe moet figuur 6.3. nog sterker worden geschematiseerd.

De buigstijfheid van een kolom wordt in hoofdzaak bepaald door de flenzen. De restspanningen in het lijf kunnen daarom worden verwaarloosd. Verkregen wordt de schematisering volgens figuur 6.4.

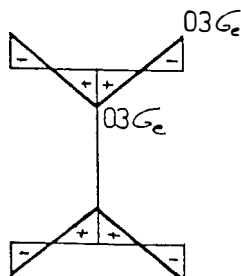


Fig. 6.4.: Schematisering restspanningsverloop.

Door voor de flenzen en afrondingsstralen een apart $\sigma - \epsilon$ diagram, in combinatie met een hardenings diagram, te gebruiken kan het volgens figuur 6.4 geschematiseerde restspanningsverloop in DIANA worden ingevoerd [21]. De flenzen en afrondingsstralen dienen daartoe wel als wapening in DIANA te worden ingevoerd, omdat voor het basismateriaal (het lijf) maar één $\sigma - \epsilon$ diagram wordt toegestaan.

Op deze manier wordt de invloed van restspanningen op de juiste manier, onafhankelijk van andere factoren, in de DIANA-berekeningen meegenomen.

6.3.3. Geometrische imperfectie.

De geometrische imperfectie is de tweede factor die hoofdzakelijk de draagkracht van een centrisch belaste kolom bepaalt. Het is dus van belang om ook de geometrische imperfectie bij fysisch en geometrisch niet-lineaire DIANA berekeningen op de juiste wijze te schematiseren.

6.3.3.1. Pin-ended kolom en de vervangende geometrische imperfectie.

Voor de geometrische imperfectie moet voor pin-ended kolommen volgens EUROCODE 3 een parabolisch verloop worden aangenomen, met de amplitude $W_{01} = 1/1000 L$ (fig. 6.5).

De draagkracht (F_k) van een pin-ended kolom kan met de ECCS instabiliteitscurven worden bepaald. Een fysisch en geometrisch niet-lineaire DIANA-berekening waarbij een geometrische imperfectie volgens EUROCODE 3 is toegepast, geeft echter een overschatting van de

draagkracht F_k . Dit verschil wordt veroorzaakt doordat verschillende invloeden, zoals: materiaalinhomogeniteiten, restspanningen in het lijf en maatafwijkingen niet in de DIANA berekeningen zijn meegenomen.

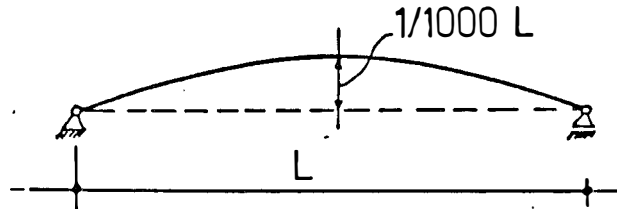


Fig. 6.5: De geometrische imperfectie volgens EUROCODE 3.

Dit probleem kan worden opgelost door gebruik te maken van het begrip: vervangende geometrische imperfectie. De vervangende geometrische imperfectie representeert alle imperfectievormen, exclusief restspanningen en wordt bepaald d.m.v. ijking aan instabiliteitscurven.

6.3.3.2. Ijking.

De vorm van de vervangende geometrische imperfectie wordt affien gekozen aan de knikvorm, bij de pin-ended kolom is dit een halve sinusgolf. De grootte van de amplitude wordt bepaald door ijking aan de ECCS instabiliteitscurven. Gezocht moet worden naar de amplitude, waarbij de draagkracht van de kolom volgens de fysisch en geometrisch niet-lineaire DIANA berekeningen gelijk is aan de draagkracht van de kolom volgens de ECCS instabiliteitscurven.

De vervangende geometrische imperfectie moet daartoe langs iteratieve weg worden gevonden. Daarbij is gebruik gemaakt van de interpolatieformule van Lagrange (zie ook par. 6.3.4.). De volgende procedure voor het bepalen van de vervangende geometrische imperfectie kan worden aangehouden:

- 1.) Kies een startwaarde voor de vervangende geometrische imperfectie en bepaal met DIANA de daarbij behorende draagkracht van de kolom. Als startwaarde kan de geometrische imperfectie volgens EUROCODE 3, verhoogd met b.v. 25%, worden gekozen
- 2.) Kies, afhankelijk van de gevonden draagkracht, een grotere of kleinere vervangende geometrische imperfectie en bepaal de daarbij behorende draagkracht met DIANA.

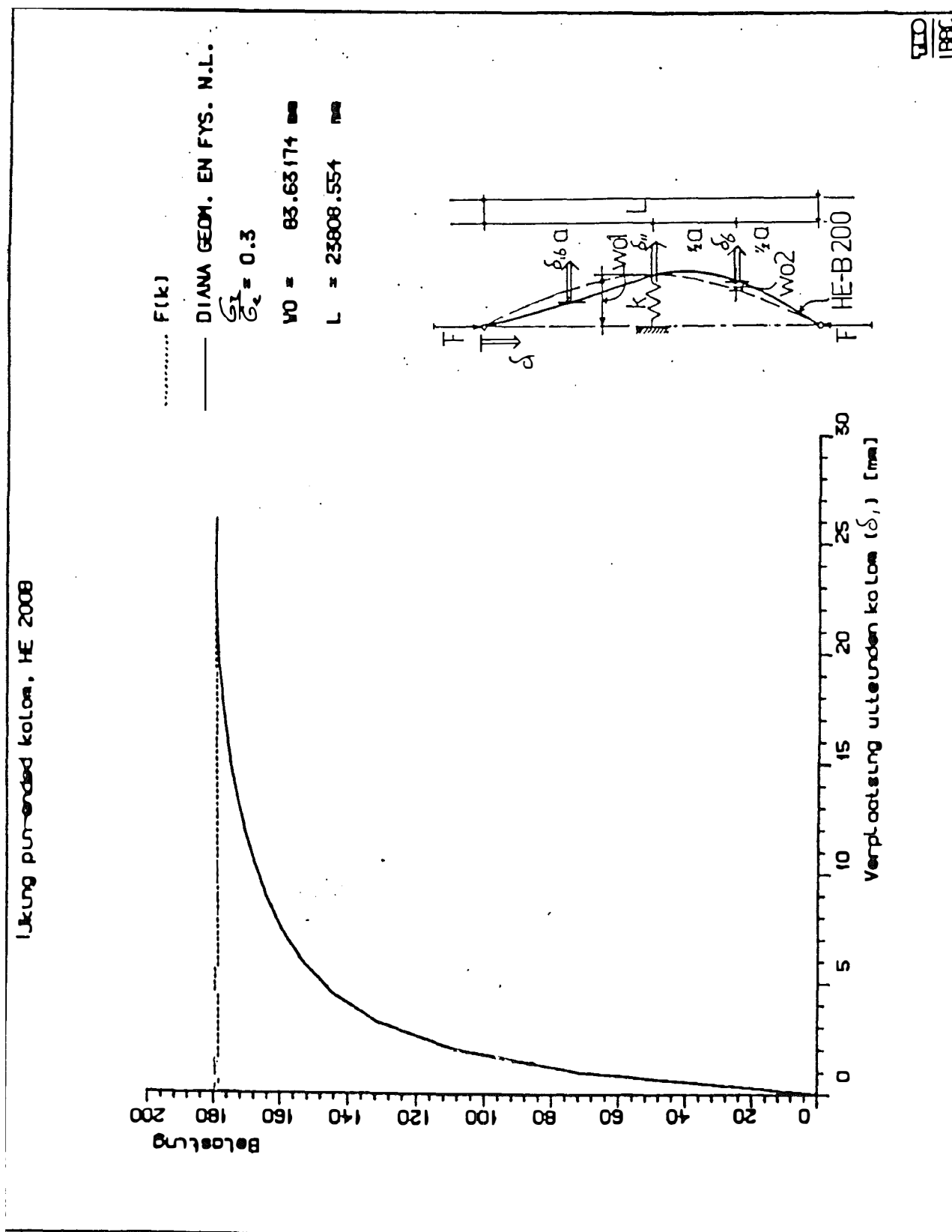


Fig. 6.6: IJking pin-ended kolom, HE-B200, $L = 23808 \text{ mm}$.

- 3.) Bepaal nu d.m.v. lineaire interpolatie de vervangende geometrische imperfectie. Indien de daarbij behorende draagkracht niet nauwkeurig genoeg aansluit bij de gewenste draagkracht F_k , dan kan het gevonden getallenpaar als extra steunpunt dienen. Interpolatie m.b.v. een tweedegraads polynoom is dan mogelijk. Dit proces herhaalt zich, totdat het resultaat voldoende nauwkeurig is.

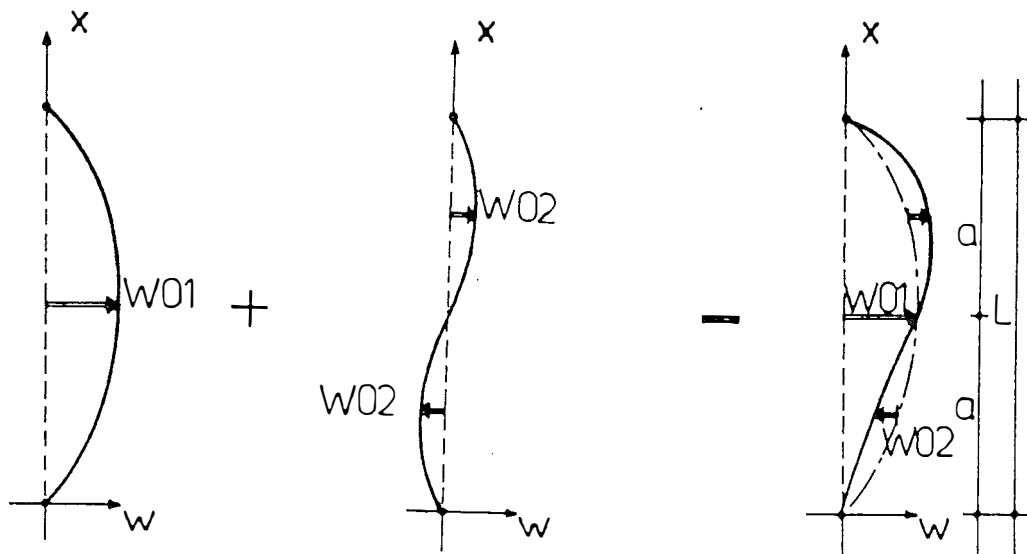
Bovenstaand iteratie-proces verloopt erg snel. Bij een goed gekozen startwaarde is lineaire interpolatie veelal voldoende.

Als voorbeeld dient een profiel HE-B200, met een slankheid van $\bar{\lambda}_s = 3$. De draagkracht volgens de ECCS(b) instabiliteitscurve bedraagt: $F_k = 179.7 \text{ kN}$. Als startwaarde is gekozen voor $W_{01} = 80 \text{ mm}$. Deze vervangende geometrische imperfectie levert volgens DIANA berekeningen een draagkracht van $F_D = 180.6 \text{ kN}$. Deze draagkracht is iets te hoog en daarom is de vervangende geometrische imperfectie vergroot tot $W_{01} = 83 \text{ mm}$., wat volgens DIANA-berekeningen een draagkracht oplevert van $F_D = 179.9 \text{ kN}$. Lineaire extrapolatie leidt nu tot een vervangende geometrische imperfectie van $W_{01} = 83.6 \text{ mm}$., met een volgens DIANA-berekeningen bijbehorende draagkracht van $F_D = 179.7 \text{ kN}$, gelijk aan de gewenste draagkracht (fig. 6.6).

6.3.3.3. Verend gesteunde kolom.

Ook voor de verend gesteunde kolom wordt de vervangende geometrische imperfectie affien gekozen aan de knikvorm. De knikvorm van een verend gesteunde kolom is echter afhankelijk van de veerstijfheid.

Bij een ongesteunde kolom zal de knikvorm gelijk zijn aan een halve sinusgolf (pin-ended kolom). Bij een volledig star gesteunde kolom zal de kolom sinusvormig uitknikken. De vervangende geometrische imperfectie wordt nu uit deze twee knikvormen samengesteld (fig. 6.7).



- a) "overall" imperfectie ; $w_1(x) = W01 \cdot \sin \frac{\pi x}{a}$
 b) "bijkomende imperfectie" ; $w_2(x) = W02 \cdot \sin \frac{\pi x}{2a}$
 c) totale imperfectie ; $w(x) = W01 \cdot \sin \frac{\pi x}{a} + W02 \cdot \sin \frac{\pi x}{2a}$

Fig. 6.7: Vervangende geometrische imperfectie van verend gesteunde kolommen.

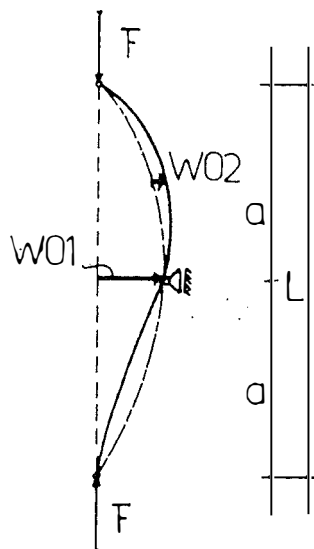


Fig. 6.8: Bepaling "bijkomende" imperfectie.

Getracht wordt een vervangende geometrische imperfectie te vinden, waarbij de kolom ongesteund een draagkracht bezit van F_k ($l_k = L$), maar tegelijk bij een starre ondersteuning de draagkracht F_k ($l_k = a$) bezit.

Daartoe wordt eerst de "overall" imperfectie, behorende bij de ongesteunde kolom, d.m.v. ijking (par. 6.3.3.2.) bepaald. Nadat de "overall" imperfectie is bepaald wordt de staaf star ondersteund. Voor de kolom, waarvoor de "overall" imperfectie constant wordt gehouden, wordt nu de "bijkomende" imperfectie bepaald, ook d.m.v. ijking aan de ECCS instabiliteitscurven (fig. 6.8).

Door de "bijkomende" imperfectie zal de draagkracht van de ongesteunde kolom kleiner dan de gewenste draagkracht F_k ($l_k = L$) zijn. De "overall" imperfectie zal dus iets kleiner moeten zijn.

De juiste verhouding tussen de "overall" imperfectie en de "bijkomende" imperfectie moet langs iteratieve weg worden gevonden. In bijlage 4 (tabellen 1.1-4) zijn ook een derde en vierde iteratieslag uitgevoerd. Geresumeerd luiden de resultaten:

Eerste iteratieslag (ongesteunde kolom; $F_k = 179.8 kN$)

$$w(x) = 83.63 \sin \frac{\pi x}{a} \rightarrow F_D = 179.8 \text{ kN}$$

Tweede iteratieslag (star gesteunde kolom; $F_k = 641.6 kN$)

$$w(x) = 83.63 \sin \frac{\pi x}{a} + 27.62 \sin \frac{\pi x}{2a} \rightarrow F_D = 641.6 \text{ kN}$$

Derde iteratieslag (ongesteunde kolom; $F_k = 179.8 kN$)

$$w(x) = 83.43 \sin \frac{\pi x}{a} + 27.62 \sin \frac{\pi x}{2a} \rightarrow F_D = 179.8 \text{ kN}$$

Vierde iteratieslag (star gesteunde kolom; $F_k = 641.6 kN$)

$$w(x) = 83.43 \sin \frac{\pi x}{a} + 27.62 \sin \frac{\pi x}{2a} \rightarrow F_D = 641.6 \text{ kN}$$

Het verschil in de amplituden na de tweede iteratieslag is verwaarloosbaar klein. Geconcludeerd kan worden dat de amplituden voldoende nauwkeurig zijn na twee iteratieslagen.

Het resultaat van de ijkingen, volgens bovenstaande methode, zijn de volgende vervangende geometrische imperfecties:

$$1.) \bar{\lambda}_s = 0.2 ; w(x) = 4.74 \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$2.) \bar{\lambda}_s = 1.5 ; w(x) = 83.63 \sin \frac{\pi x}{a} + 27.62 \sin \frac{\pi x}{2a}$$

ad 1.) Voor $\bar{\lambda}_s = 0.2$ wordt voor de "overall" imperfectie een amplitude van $W_{01} = 4.74 \text{ mm}$ gevonden. Bij starre ondersteuning wordt de slankheid van de kolom gelijk aan $\bar{\lambda} = 0.2$. De daarbij behorende amplitude van de vervangende geometrische imperfectie is gelijk aan 0. De staaf zou dus volkomen recht moeten zijn.

In de DIANA-berekeningen is bovenstaande imperfectie aangehouden. De draagkracht die met DIANA, bij een starre

ondersteuning wordt gevonden is dan ook iets lager dan de gewenste draagkracht F_k ($l_k = a$) (tabel 3).

- ad 2.) Bij $\bar{\lambda}_s = 1.5$ wordt voor de "overall" imperfectie een amplitude van $W_{01} = 83.63$ mm. gevonden. Deze imperfectie wordt volgens EUROCODE 3 niet getolereerd. De tolerantie is $0.0035a = 42$ mm. Gekozen is daarom om de kolom met $\bar{\lambda}_s = 1.5$ tevens door te rekenen met een "overall" imperfectie, welke volgens [25] moet worden toegepast voor fysisch en geometrisch niet lineaire berekeningen. De amplitude van de "bijkomende" imperfectie wordt wederom door ijking bepaald.

De volgende vervangende geometrische imperfecties worden in de DIANA-berekeningen aangehouden:

- 1.) $\bar{\lambda}_s = 0.2$; $w(x) = 4.74 \sin \frac{\pi x}{a}$
- 2.) $\bar{\lambda}_s = 1.5$; $w(x) = 83.63 \sin \frac{\pi x}{a} + 27.62 \sin \frac{\pi x}{2a}$
- 3.) $\bar{\lambda}_s = 1.5$; $w(x) = 30.86 \sin \frac{\pi x}{a} + 28.38 \sin \frac{\pi x}{2a}$

6.3.4. Veerstijfheid.

Met een fysisch en geometrisch niet-lineaire DIANA-berekening kan de draagkracht van een verend gesteunde kolom worden bepaald. De kritieke veerstijfheid kan echter niet direct worden bepaald.

De imperfecte kolom is geijkt bij een starre ondersteuning. Vervanging van de starre ondersteuning door een verende ondersteuning zal altijd een lagere draagkracht opleveren. Bij toenemende veerstijfheid zal echter de draagkracht van de verend gesteunde kolom de draagkracht, behorende bij een starre ondersteuning, benaderen (fig. 6.9).

Van een kritieke veerstijfheid is geen sprake meer. Getracht wordt nu met DIANA de veerstijfheid te bepalen, behorende bij een draagkracht van $0.95 F_k$. Daartoe wordt gebruik gemaakt van een modificatie op de interpolatieformule van Lagrange. De volgende interpolatieformule is toegepast:

$$k = a_0 + \frac{a_1}{F - F_k} + \frac{a_2}{(F - F_k)^2} + \dots \quad (6.1)$$

Als startwaarde is de Eulerse kritieke veerstijfheid genomen. De factoren a_0 en a_1 zijn dan te bepalen. Bij de volgende iteratieslag kan k worden bepaald m.b.v. formule 6.1, door voor F , $0.95 F_k$ te substitueren. Nadat m.b.v. DIANA de daarbij behorende draagkracht is bepaald, kan aan formule (6.1) een extra term worden toegevoegd.

Dit iteratieproces verloopt snel. Daarom zijn ook enkele veerstijfheden toegepast, zodat m.b.v. niet lineaire regressie een redelijke relatie tussen F_D en k kan worden bepaald.

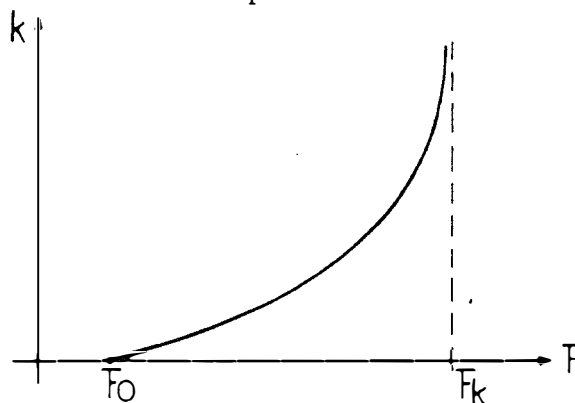


Fig. 6.9: Relatie: veerstijfheid - draagkracht kolom.

6.4. Resultaten.

6.4.1. Snap-back.

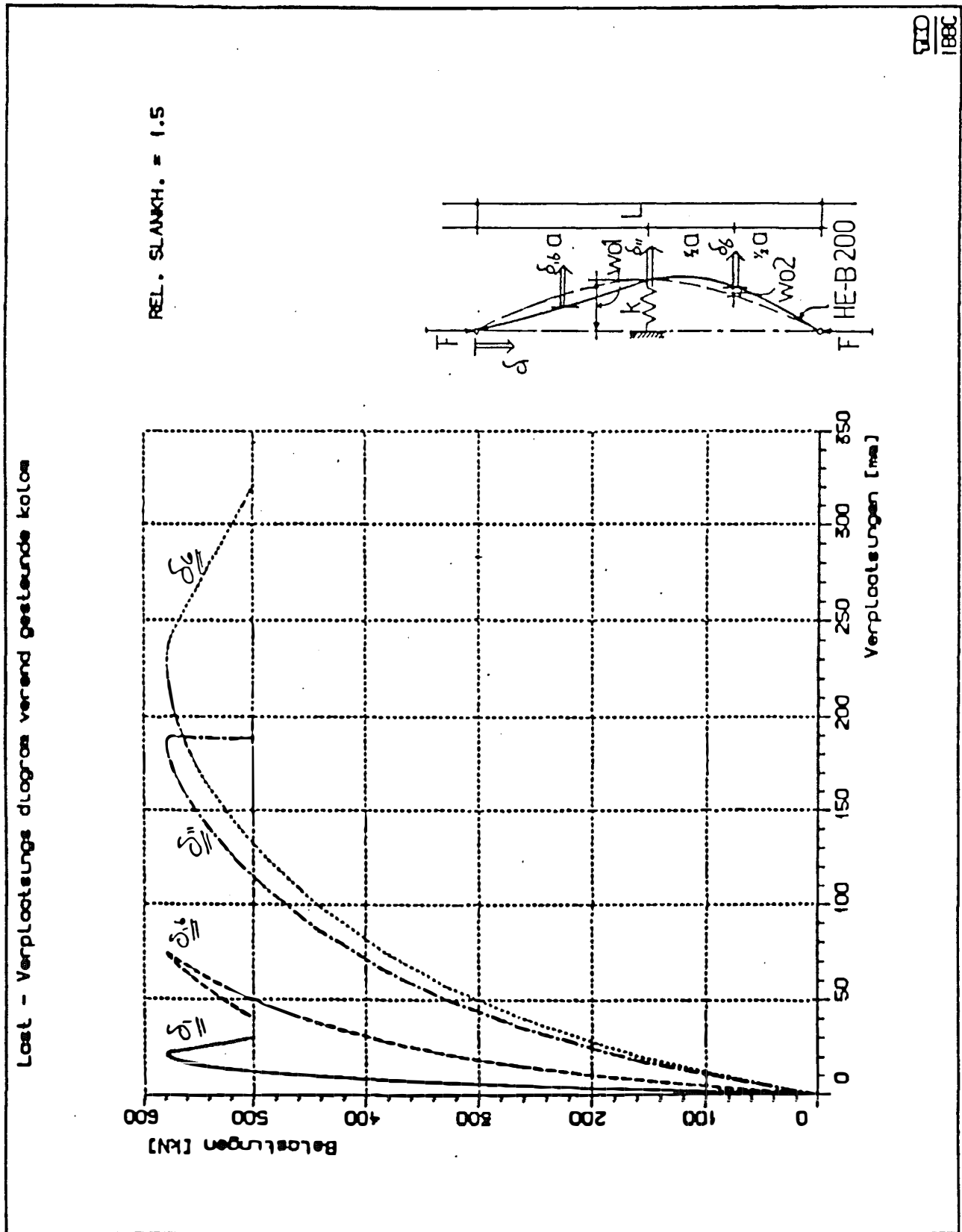
Bij stabiliteitsproblemen kan het z.g.n. snap-back optreden. Bij verend gesteunde kolommen zijn daartoe twee mogelijkheden.

In het eerste geval kan bij toenemende belasting de veerkracht zo groot worden dat de kolom doorslaat. Om te controleren of dit verschijnsel ook optreedt, is voor één geval (bijlage 4, tabel 1.5.1.) het na-kritische gedrag, tot 1.5 maal de vervorming (δ_1) bij de maximale draagkracht bepaald. Het bleek dat snap-back niet optrad (fig. 6.10).

Het tweede geval treedt alleen op bij symmetrische kolommen. De imperfectie gekozen voor $\bar{\lambda}_0 = 0.2$ is symmetrisch. Bij toenemende belasting zouden de verplaatsingen in het midden van de velden (δ_6 , δ_{16}) gelijk moeten zijn. Uit tabel 3.2.1. (bijlage 4) blijkt dat dit niet het geval is.

In de praktijk zal de kolom echter ook nooit volkomen symmetrisch zijn. Daarom zijn de resultaten van de DIANA-sommen wel realistisch. Door de verschillen in de verplaatsingen is er kans dat, als de buigstijfheid bij toenemende belasting kleiner wordt, de uitbuiging plotseling overgaat van een halve sinusvorm naar een volledige sinusvorm. Ook hierdoor zou de verplaatsing t.p.v. de veer kunnen afnemen en zou een minder grote veerstijfheid nodig zijn.

Om dit verschijnsel in DIANA mee te kunnen nemen, mag voor de invoer in eerste instantie geen gebruik worden gemaakt van symmetrie.

Fig. 6.10: Verplaatsingen verend gesteunde kolom, $\bar{\lambda}_s = 1.5$

De gehele constructie moet dus in DIANA worden ingevoerd. Uit de resultaten blijkt echter dat de knikvorm van de kolom, op te verwaarlozen numerieke onnauwkeurigheden na, wel symmetrisch is. Door de symmetrische knikvorm is de kniklengte van de staaf nu kleiner dan de veldlengte a . De kritieke veerstijfheid die met DIANA wordt gevonden behoort dus eigenlijk bij een nog kleinere slankheid.

6.4.2. Verwerking en presentatie van de resultaten.

Van primair belang voor dit onderzoek is de relatie tussen de veerstijfheid (k) en de draagkracht van de verend gesteunde kolom (F_D). Tevens van belang is de daarbij behorende veerkracht. Uit de resultaten van de DIANA-sommen is voor elke ingevoerde veerstijfheid een draagkracht (F_D) en een daarbij behorende veerkracht (F_v) bepaald.

M.b.v. "Lagrange interpolatie" is naar een draagkracht van $0.95F_k$ geïtereerd (par. 6.4.1.). Om de resultaten van de DIANA-sommen beter onderling en met de resultaten uit voorgaande hoofdstukken te kunnen vergelijken zijn ook de veerstijfheden, welke een draagkracht van 90% en 99% van F_k opleveren, bepaald. Hierbij is gebruik gemaakt van niet-lineaire regressie-analyse.

6.4.2.1. Niet-lineaire regressie-analyse.

M.b.v. niet-lineaire regressie-analyse kan de relatie tussen de veerstijfheid en de draagkracht van de kolom, resp. de veerkracht in formulevorm worden vastgelegd. De toegepaste formule luidt:

$$y = \frac{ax}{x + b} + c \quad (6.2)$$

Bij de regressie-analyse wordt aangenomen dat de x -waarden foutloos zijn, maar dat de afhankelijke variabele, y , fouten bevat. Daarom wordt voor de x -waarde van de getallenparen de veerstijfheid genomen, welke exact in DIANA is ingevoerd. Voor de y -waarde wordt de draagkracht van de kolom, F_D , resp. de veerkracht, F_v , genomen. Deze bevatten fouten zoals numerieke onnauwkeurigheden, interpolatie-fouten, etc. Getracht wordt nu m.b.v. niet-lineaire regressie-analyse de meest reële waarden voor a, b en c te vinden.

Bij de niet-lineaire regressie is gebruik gemaakt van het programma

CURFIT, van TNO-IBBC. Voor het gebruik van dit programma en voor meer theoretische achtergrondinformatie wordt verwezen naar [20].

6.4.2.2. Resultaten in tabellen en grafieken.

DIANA-sommen zijn gemaakt voor 2 slankheden $\bar{\lambda}_s = 1.5$ en $\bar{\lambda}_s = 0.2$. Bij $\bar{\lambda}_s = 1.5$ zijn twee imperfectievormen toegepast (par. 6.3.3.3). De resultaten van de DIANA-sommen worden onderverdeeld in:

- 1.) $\bar{\lambda}_s = 1.5$; $w(x) = 83.63 \sin \frac{\pi x}{2a} + 27.62 \sin \frac{\pi x}{a}$
- 2.) $\bar{\lambda}_s = 1.5$; $w(x) = 30.63 \sin \frac{\pi x}{2a} + 28.38 \sin \frac{\pi x}{a}$
- 3.) $\bar{\lambda}_s = 0.2$; $w(x) = 4.74 \sin \frac{\pi x}{2a}$

ad 1.) $\bar{\lambda}_s = 1.5$; $w(x) = 83.63 \sin \frac{\pi x}{2a} + 27.62 \sin \frac{\pi x}{a}$

De gewenste draagkracht: $F_k = 641.7$ kN.

De kritieke veerstijfheid volgens een Eulerse knikberekening (formule 3.17): $k_{kr}(E) = 140$ N/mm.

Tabel 1: Resultaten DIANA-sommen.

k [* $k_{kr}(E)$]	F_D [* F_k]	F_v [* $F_k / 100$]
*1	0.280	0.
1.	0.902	4.04
1.38	0.949	3.31
1.87	0.971	2.84
2.44	0.982	2.57
∞	1.000	1.88

De gebruikte formules bij de niet-lineaire regressie-analyse luiden:

$$F_D^1 = \frac{a_1 k^1}{k^1 + b_1} + c_1 \quad (6.3)$$

$$F_v^1 = \frac{a_2 k^1}{k^1 + b_2} + c_2 \quad (6.4)$$

Waarin: $k_1^1 = k / k_{kr}(E)$

$$F_D^1 = F_D / F_k$$

$$F_v^1 = 100 F_v / F_k$$

Niet-lineaire regressie-analyse leidt tot de volgende waarden voor a,b en c:

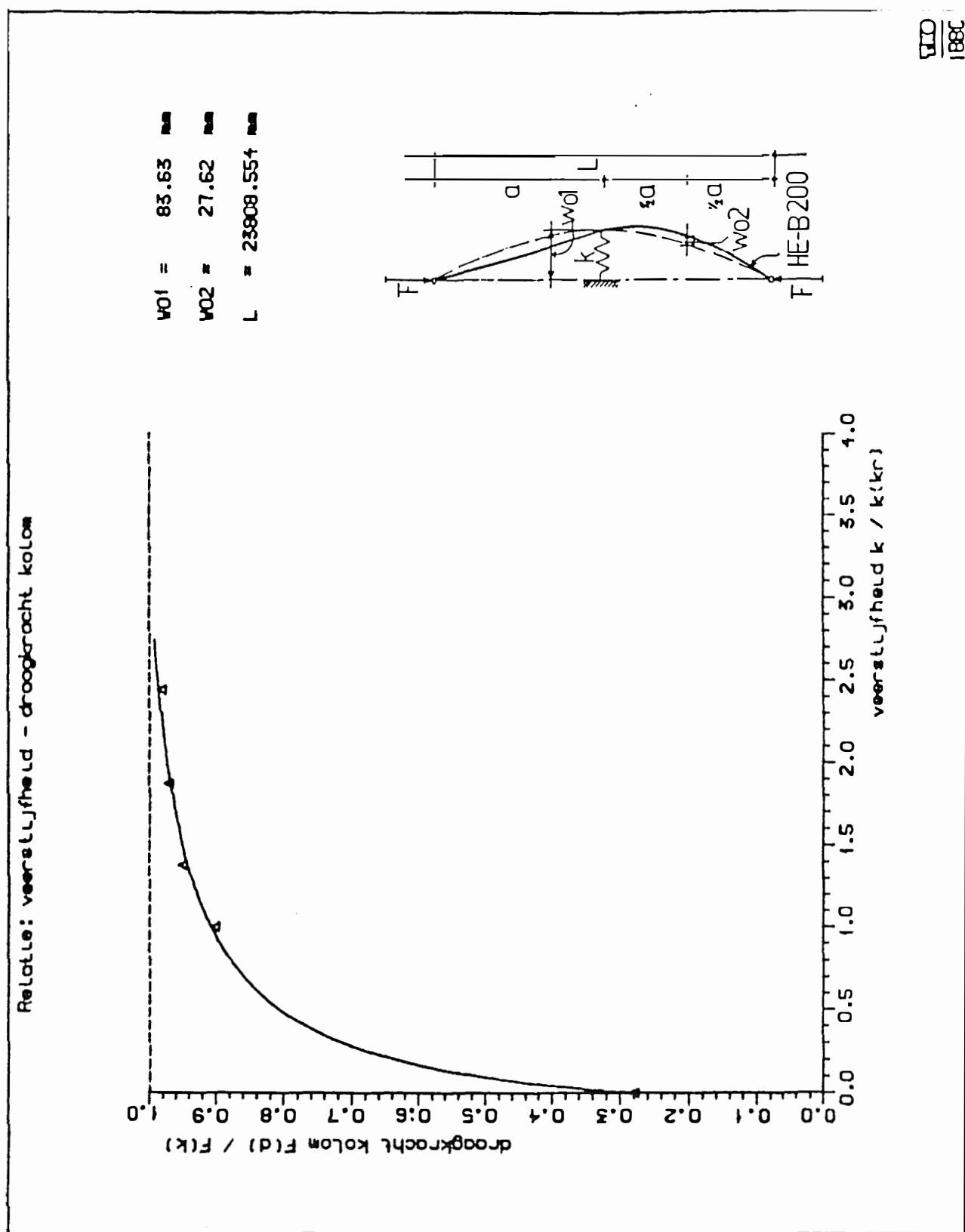
$$a_1 = 0.77560 \quad a_2 = 9.50150$$

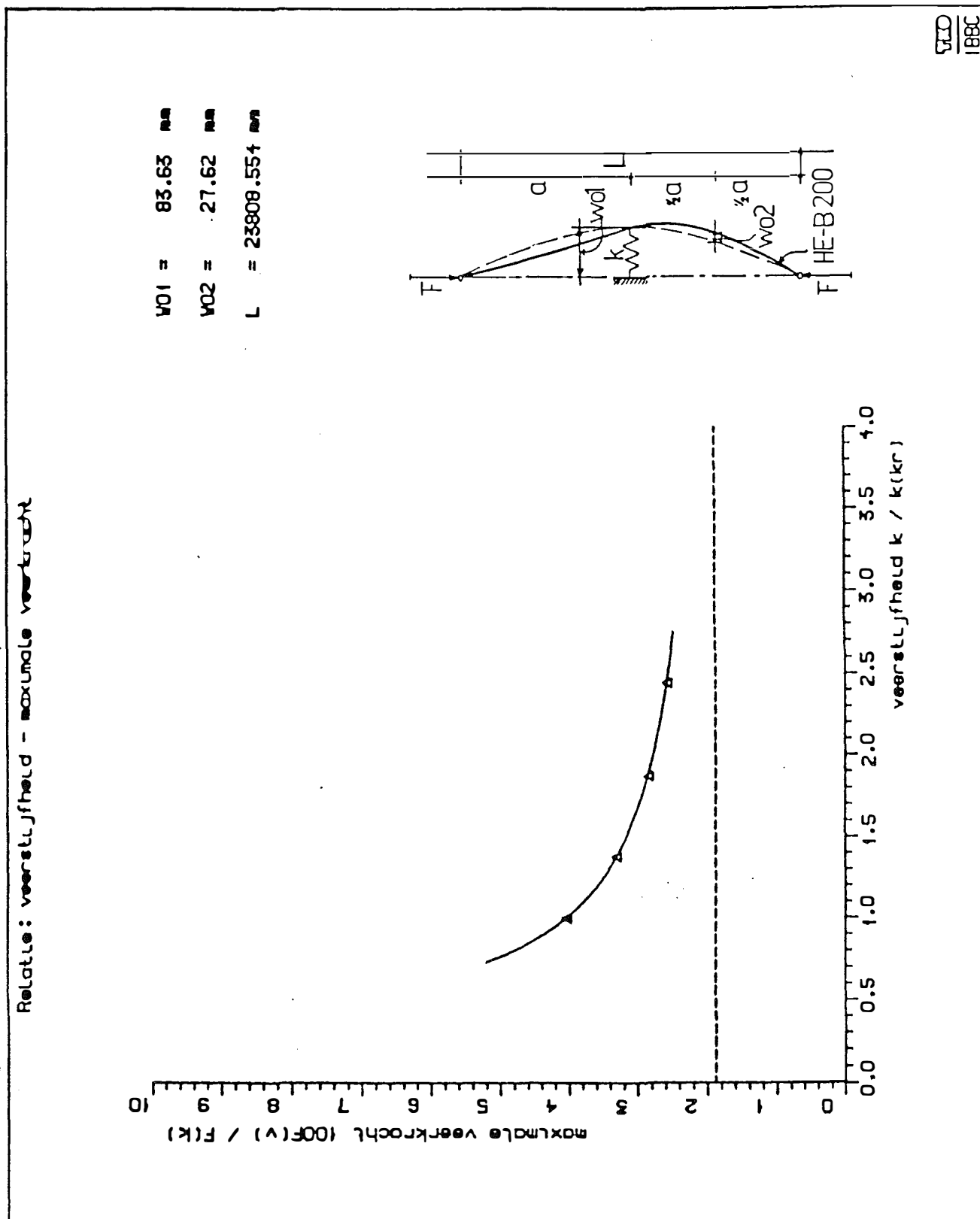
$$b_1 = 0.23756 \quad b_2 = -0.19497$$

$$c_1 = 0.28008 \quad c_2 = -7.76120$$

Grafisch zijn bovenstaande resultaten weergegeven in de figuren 6.11 en 6.12

*1 Geen veer aanwezig.

Fig. 6.11: Relatie: veerstijfheid - draagkracht kolom (F_D).

Fig. 6.12: Relatie: veerstijfheid - maximale veerkracht (F_v).

ad 2.) $\bar{\lambda}_s = 1.5$; $w(x) = 30.86 \sin \frac{\pi x}{2a} + 28.38 \sin \frac{\pi x}{a}$

De gewenste draagkracht: $F_k = 641.7$ kN.

De kritieke veerstijfheid volgens een Eulerse knikberekening (formule 3.17): $k_{kr}(E) = 140$ N/mm.

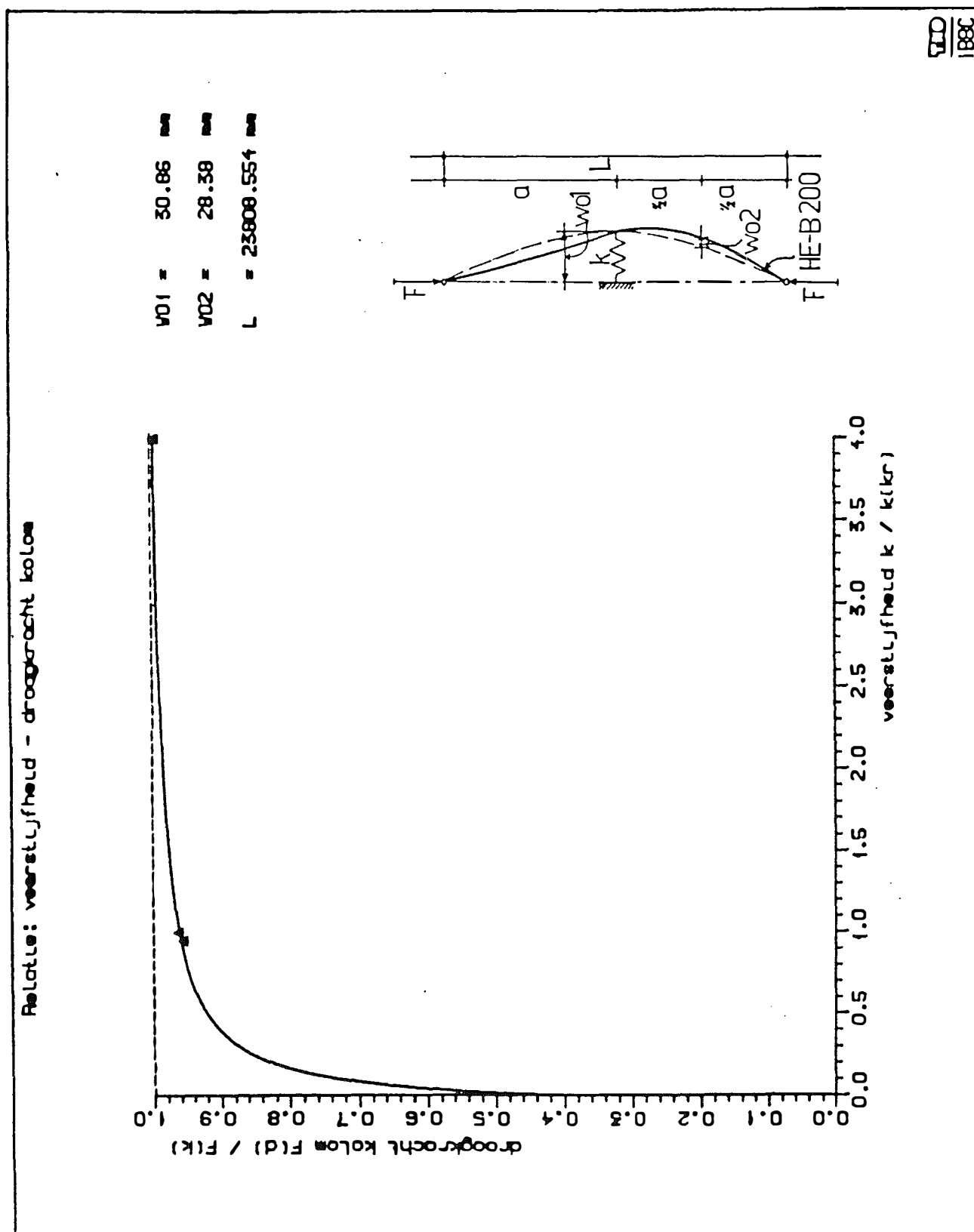
Tabel 2: Resultaten DIANA-sommen.

k [* $k_{kr}(E)$]	F_D [* F_k]	F_v [* $F_k/100$]
0.95	0.958	2.19
1.00	0.965	2.03
4.00	0.998	0.86
∞	1.000	0.70

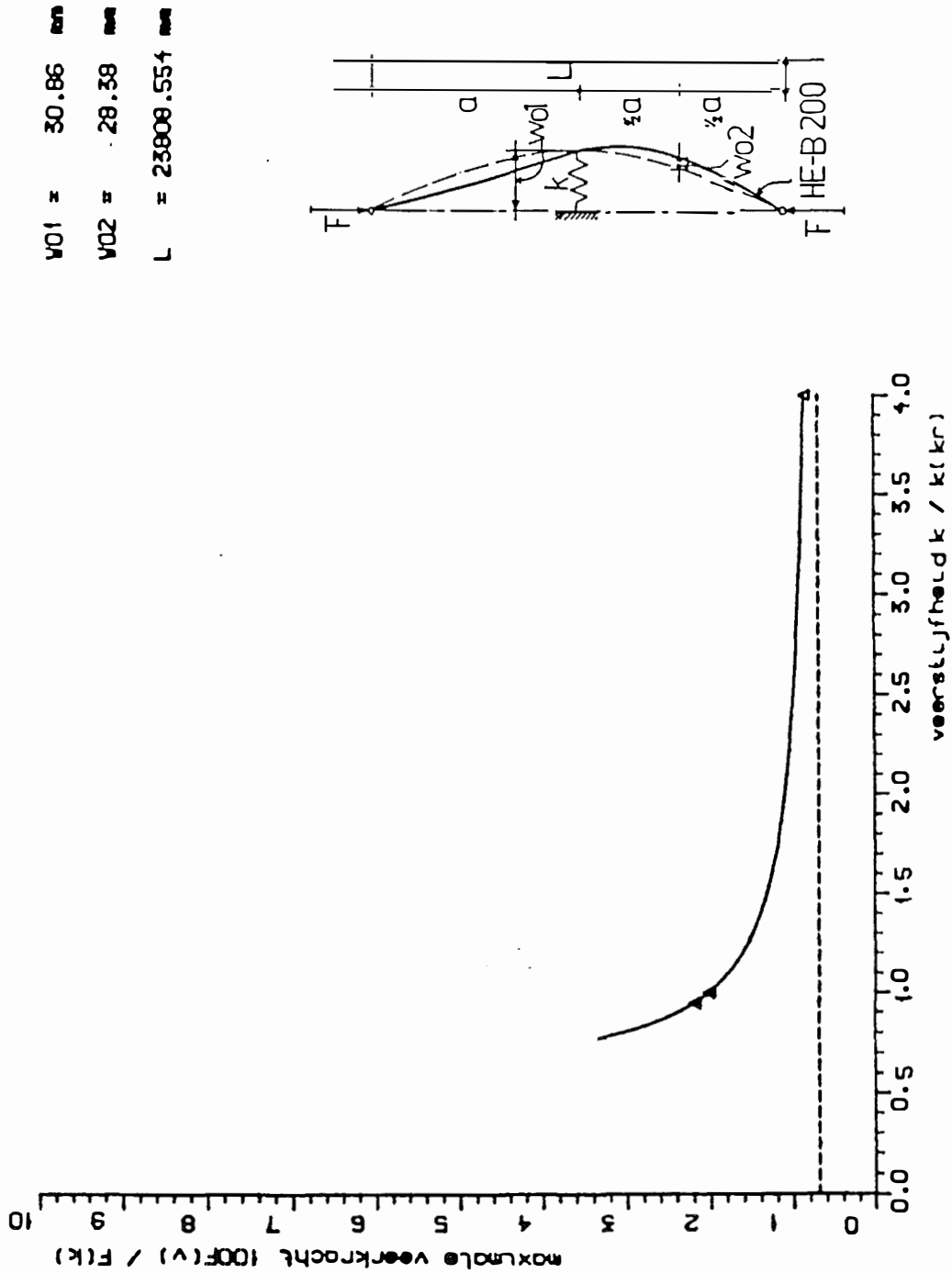
De formules (6.3) en (6.4) zijn voor de niet-lineaire regressie-analyse gebruikt. De regressie-analyse leidt tot de volgende waarden voor a,b en c:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.595300 & a_2 &= 1.14100 \\ b_1 &= 0.088711 & b_2 &= -0.54083 \\ c_1 &= 0.415900 & c_2 &= -0.46543 \end{aligned}$$

Grafisch zijn bovenstaande resultaten weergegeven in de figuren 6.13 en 6.14

Fig. 6.13: Relatie: veerstijfheid - draagkracht kolom (F_D).

Relatie: veerstijfheid - maximale veerkracht



$v_{01} = 30.86$ mm
 $v_{02} = 28.38$ mm
 $L = 23808.554$ mm

TIO
 JBC

Fig. 6.14: Relatie: veerstijfheid - maximale veerkracht (F_v).

ad 3.) $\bar{\lambda}_s = 0.2$; $w(x) = 4.74 \sin \frac{\pi x}{2a}$

De gewenste draagkracht: $F_k = 1874$ kN.

De kritieke veerstijfheid volgens een Eulerse knikberekening (formule 3.17): $k_{kr}(E) = 59031$ N/mm.

Tabel 3: Resultaten DIANA-sommen.

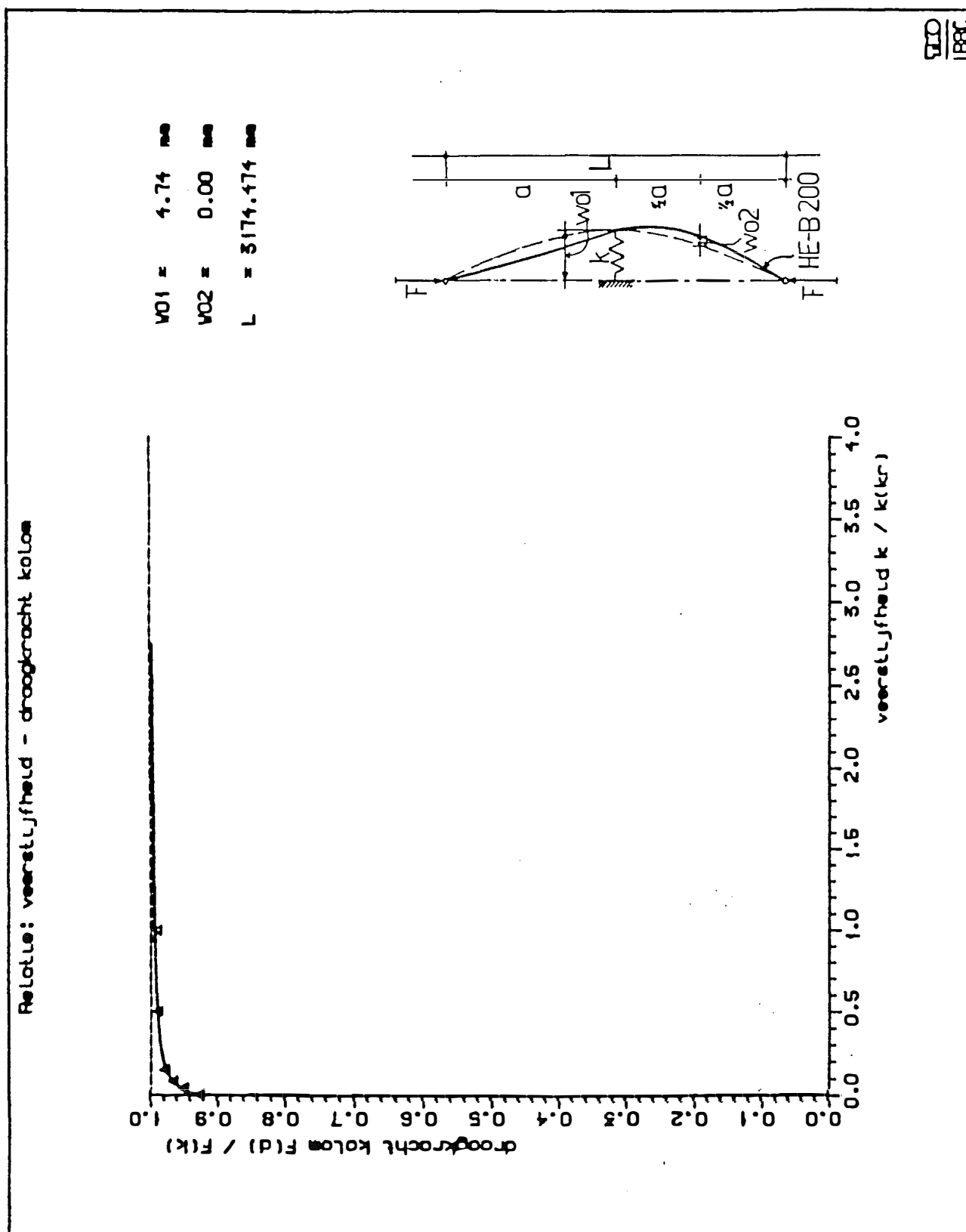
k [* $k_{kr}(E)$]	F_D [* F_k]	F_v [* $F_k / 100$]
*1	0.926	0.
0.04	0.951	0.295
0.08	0.967	0.496
0.15	0.980	0.648
0.50	0.991	0.740
1.00	0.992	0.735
∞	0.991	0.739

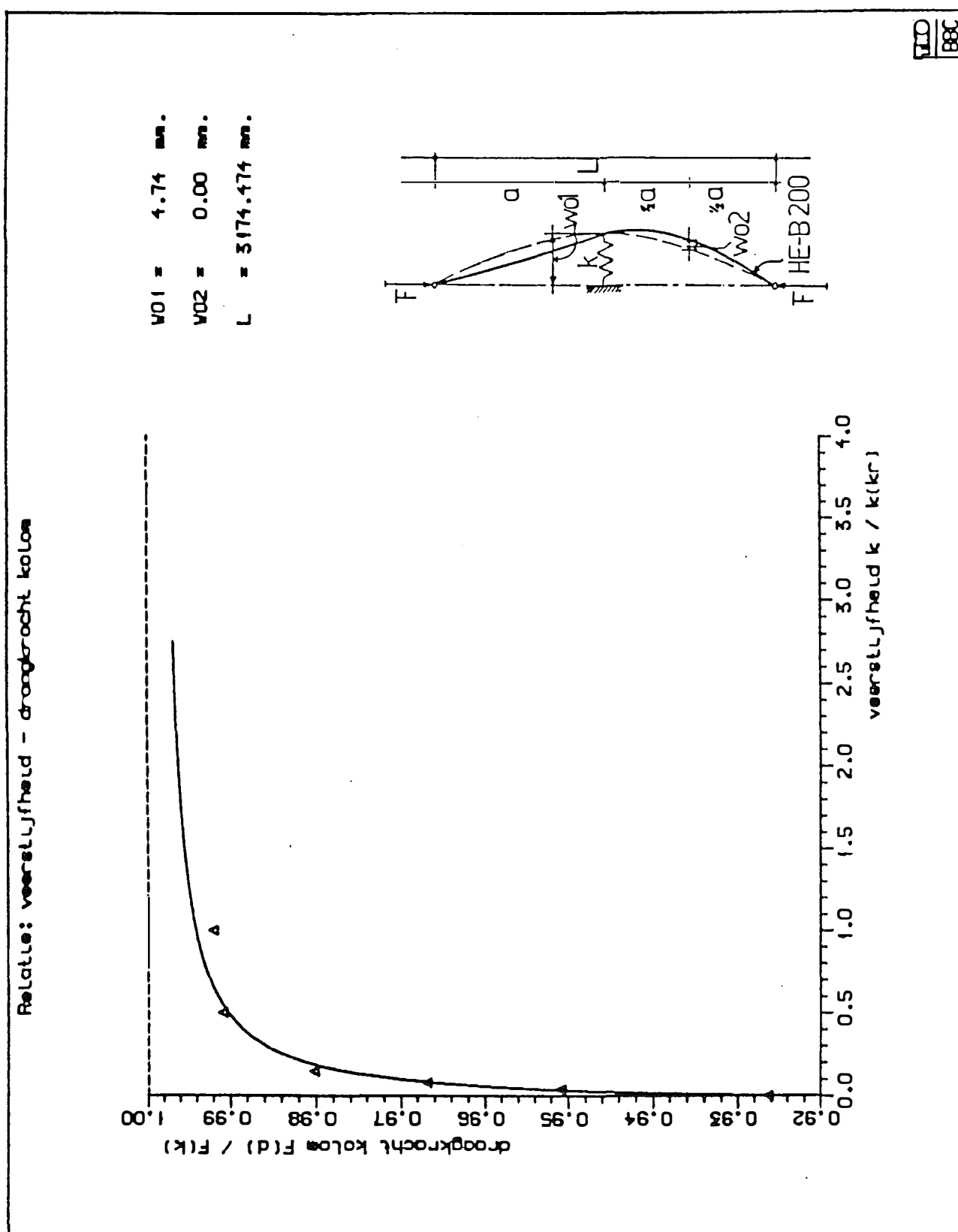
De formules (6.3) en (6.4) zijn voor de niet-lineaire regressie-analyse gebruikt. De regressie-analyse leidt tot de volgende waarden voor a,b en c:

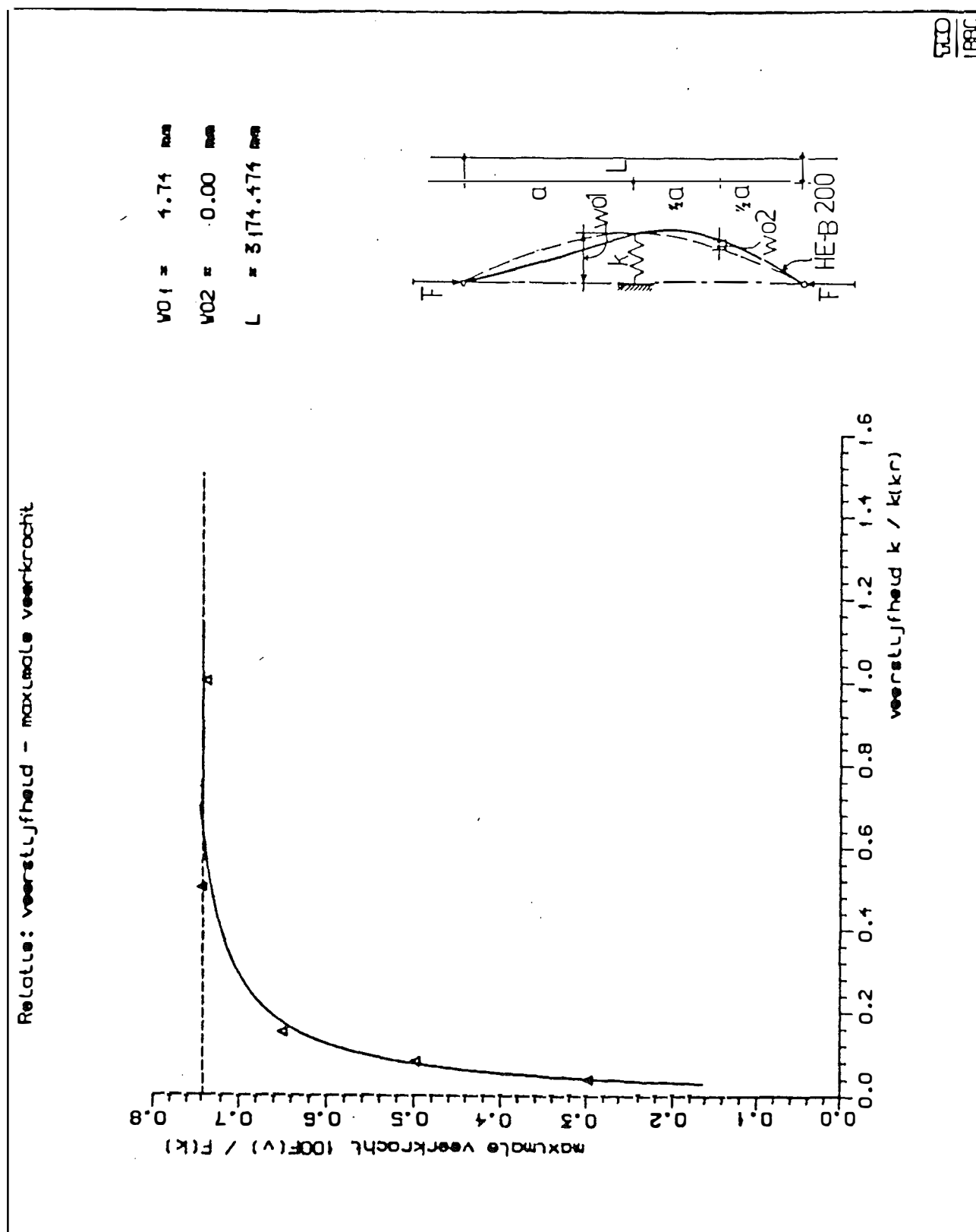
$$\begin{aligned} a_1 &= 0.072750 & a_2 &= 3.13420 \\ b_1 &= 0.062323 & b_2 &= 0.0072689 \\ c_1 &= 0.925580 & c_2 &= -2.3601 \end{aligned}$$

Grafisch zijn bovenstaande resultaten weergegeven in de figuren 6.15 en 6.16

*1 Geen verende ondersteuning aanwezig.

Fig. 6.15 a: Relatie: veerstijfheid - draagkracht kolom (F_D).

Fig. 6.15 b: Relatie: veerstijfheid - draagkracht kolom (F_D).

Fig. 6.16: Relatie: veerstijfheid - maximale veerkracht (F_v).

De relatie tussen de veerstijfheid k en de draagkracht F_D , resp. veerkracht F_v , is nu in formules vastgelegd. De veerstijfheden en veerkrachten, behorende bij 90%, 95% en 99% van de gewenste draagkracht F_k zijn bepaald. In tabel 4 zijn deze waarden voor de drie onderzochte kolommen geresumeerd.

Tabel 4: Samenvatting van de resultaten van de DIANA-sommen.

	$\bar{\lambda}_s = 1.5 ; w(x)1$		$\bar{\lambda}_s = 1.5 ; w(x)2$		$\bar{\lambda}_s = 0.2 ; w(x)3$	
F_D [* F_k]	k [* $k_{kr}(E)$]	F_v [* $F_k/100$]	k [* $k_{kr}(E)$]	F_v [* $F_k/100$]	k [* $k_{kr}(E)$]	F_v [* $F_k/100$]
0.90	0.946	4.207	0.386	*1	*2	*2
0.95	1.506	3.154	0.774	3.330	0.031	0.178
0.99	2.567	2.521	2.402	1.011	0.480	0.727

$$w(x)1 = 83.63 \sin \frac{\pi x}{2a} + 27.62 \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$w(x)2 = 30.63 \sin \frac{\pi x}{2a} + 28.38 \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$w(x)3 = 4.74 \sin \frac{\pi x}{2a}$$

6.4.2.3. Bespreking DIANA-resultaten.

De DIANA-resultaten worden onderling en met de huidige berekeningsmethode [25] vergeleken. Onderscheid wordt gemaakt in:

- 1.) De veerstijfheid.
- 2.) De veersterkte.
- 3.) De "overall" imperfectie.

ad 1.) De veerstijfheid:

Om volledige draagkracht ($0.99F_k$) bij $\bar{\lambda}_s = 0.2$ te bereiken is 0.48 maal de Eulerse kritieke veerstijfheid ($k_{kr}(E)$) nodig. Indien een verlies van 5% in de draagkracht wordt geaccepteerd is slechts $0.03k_{kr}(E)$ nodig. De kritieke veerstijfheid volgens de huidige methode [25] (een Eulerse knikberekening) is

*1 Wegens verre extrapolatie onbetrouwbaar.

*2 Draagkracht van een ongesteunde staaf is al $0.926 F_k$.

voor de gedrongen kolom ($\bar{\lambda}_s = 0.2$) inderdaad te hoog.

Bovenstaand resultaat wordt versterkt door de geconstateerde knikvorm van de gedrongen kolom (par. 6.4.1.). De slankheid van de kolom is eigenlijk 0.141 i.p.v. 0.2, waardoor de benodigde veerstijfheid in de tabellen 3 en 4 met een factor 2 afneemt.

Voor $\bar{\lambda}_s = 1.5$ blijkt uit DIANA-sommen, in tegenstelling tot de verwachting, dat een hogere veerstijfheid nodig is dan $k_{kr}(E)$ om de gewenste draagkracht te bereiken. De benodigde veerstijfheid om $0.99F_k$ te bereiken is ongeveer $2.5k_{kr}(E)$. De resultaten van de DIANA-sommen worden hierin ondersteund door [8]. De daar voorgestelde kritieke veerstijfheid voor $\bar{\lambda} \geq 1$, ook gebaseerd op eindige-elementen berekeningen, is $3k_{kr}(E)$.

In par. 6.3.3. is vermeld dat voor $\bar{\lambda}_s = 1.5$ een "overall" imperfectie met een amplitude van $W_{01} = 83.63$ mm. niet wordt getolereerd. De DIANA-sommen zijn daarom ook uitgevoerd voor een "overall" imperfectie van $W_{01} = 30.86$ mm. Nu blijkt dat indien een vermindering in draagkracht van 5% wordt geaccepteerd een veerstijfheid van "slechts" $0.774k_{kr}(E)$ voldoende is.

ad 2.) De veersterkte:

Opvallend is het verschil in veerkracht tussen de gedrongen en slanke kolom. Indien de veerkracht wordt gerelateerd aan de gewenste draagkracht, dan blijkt dat de veerkracht bij de gedrongen kolommen ongeveer een factor 10 lager ligt dan bij de slanke kolommen.

Verontrustend is de veerkracht bij slanke kolommen. Veel voorschriften en richtlijnen stellen dat dimensionering van de veersterkte op 2% à 2.5% van de axiale belasting voldoende is. Bij een "overall" imperfectie met amplitude $W_{01} = 30.86$ mm is bij toepassing van $k = k_{kr}(E)$ een veersterkte van $0.02F_k$ juist voldoende. Bij een "overall" imperfectie met een amplitude van $W_{01} = 83.63$ mm. is pas bij hoge veerstijfheid ($k \geq 2.5k_{kr}(E)$) een veersterkte, gedimensioneerd op $0.02F_k$, voldoende.

Tegenstrijdig zijn de figuren 6.12 en 6.14 met figuur 6.16. Uit figuur 6.16 blijkt dat bij afname van de veerstijfheid de kracht in de veer minder wordt. Bij slanke kolommen (figuur 102 en 104) is dit juist andersom. Beide oplossingen convergeren wel bij toenemende veerstijfheid naar de kracht die behoort bij een starre ondersteuning.

ad 3.) De "overall" imperfectie:

Uit tabel 4 blijkt dat de grootte van de "overall" imperfectie van invloed is op de benodigde veerstijfheid. Voor eenzelfde draagkracht ($F_D = 0.95F_k$) is bij de "overall" imperfectie met amplitude $W_{01} = 83.63$ mm bijna een tweemaal zo grote veerstijfheid nodig dan bij de "overall" imperfectie met amplitude $W_{01} = 30.86$ mm. Dit verschil wordt echter kleiner naarmate de veerstijfheid toeneemt. Verwaarloosd hierbij is de invloed van de bijkomende imperfectie, waarvan het verschil relatief veel kleiner is.

6.4.3. Conclusies.

- 1.) De huidige berekeningsmethode voor verend gesteunde kolommen [25], een Eulerse knikberekening, geeft volgens de DIANA-resultaten voor kolommen met een kleine systeemslankheid inderdaad te hoge waarden voor de benodigde kritieke veerstijfheid.
- 2.) Voor kolommen met een grote systeemslankheid is de kritieke veerstijfheid, berekend volgens de huidige methode, niet voldoende om volledige draagkracht te bereiken.
- 3.) Uit DIANA-resultaten blijkt dat voor $\bar{\lambda}_s = 1.5$ "slechts" een veerstijfheid van $0.774k_{kr}(E)$ voldoende is om 95% van de gewenste draagkracht te bereiken, indien voor de initiële "overall" imperfectie een amplitude wordt toegepast, die volgt uit de scheefstand van de kolom die volgens [25] in rekening moet worden gebracht bij fysisch en geometrisch niet lineaire berekeningen.
- 4.) Bij gebruik van de kritieke veerstijfheid volgens de huidige methode, voldoen de in [25] gestelde eisen niet aan de veersterkte.
- 5.) De grootte van de initiële "overall" imperfectie is van invloed op de benodigde kritieke veerstijfheid. Bij toepassing van de veerstijfheid waarbij volledige draagkracht wordt bereikt is de invloed van de initiële "overall" imperfectie gering.

6.5. Verificatie.

In deze paragraaf vindt verificatie plaats van de gevonden resultaten in hoofdstuk 3 en 5. De gevonden relaties tussen de kritieke veerstijfheid en de systeemslankheid van de kolom, zullen worden getoetst aan de resultaten van de DIANA-sommen (par. 6.4.2.). De verificatie vindt plaats door in de gevonden oplossingen de benodigde veerstijfheid te plotten, welke volgens de DIANA-resultaten achtereenvolgens een draagkracht (F_D) geven van:

- 1.) $0.90F_k$, aangeduid met een Δ
- 2.) $0.95F_k$, aangeduid met een $\square$
- 3.) $0.99F_k$, aangeduid met een $\circ$

Bij de slankheid $\bar{\lambda}_s = 1.5$ is voor de verificatie in eerste instantie gekozen voor de DIANA-resultaten, behorende bij de imperfectie:

$$w(x) = 30.86 \sin \frac{\pi x}{2a} + 28.38 \sin \frac{\pi x}{a}.$$

De volgende oplossingen zijn geselecteerd voor verificatie met de DIANA-resultaten:

-Uit de literatuurstudie:

- 1.) De oplossing m.b.v. de fictieve buigstijfheid par. 3.6.3., fig. 3.9,10.
- 2.) De oplossing waarbij voor het elasto-plastische gebied voor de kritieke veerstijfheid de waarde behorende bij $\bar{\lambda}_s = 1$, volgens een Eulerse knikberekening, wordt gebruikt par. 3.6.3, fig. 3.11.
- 3.) De oplossing gevonden m.b.v. een eindige elementenmethode par. 3.6.4., fig. 3.11.

-Aangereikte oplossing en oplossingen volgens de gemodificeerde E_t -modulus theorie:

- 4.) De oplossing gebaseerd op de instabiliteitscurve van TGB-staal 1972 par. 5.2, fig. 5.13.
- 5.) Oplossing gebaseerd op een parabolische relatie tussen E_t en σ na de proportionaliteitsgrens en de instabiliteitscurve ECCS(b), par. 5.1.3.2, fig. 5.7b.
- 6.) Oplossing gebaseerd op een parabolische relatie tussen σ en ε na de proportionaliteitsgrens en de instabiliteitscurve ECCS(b), par. 5.1.3.2., fig. 5.8b.

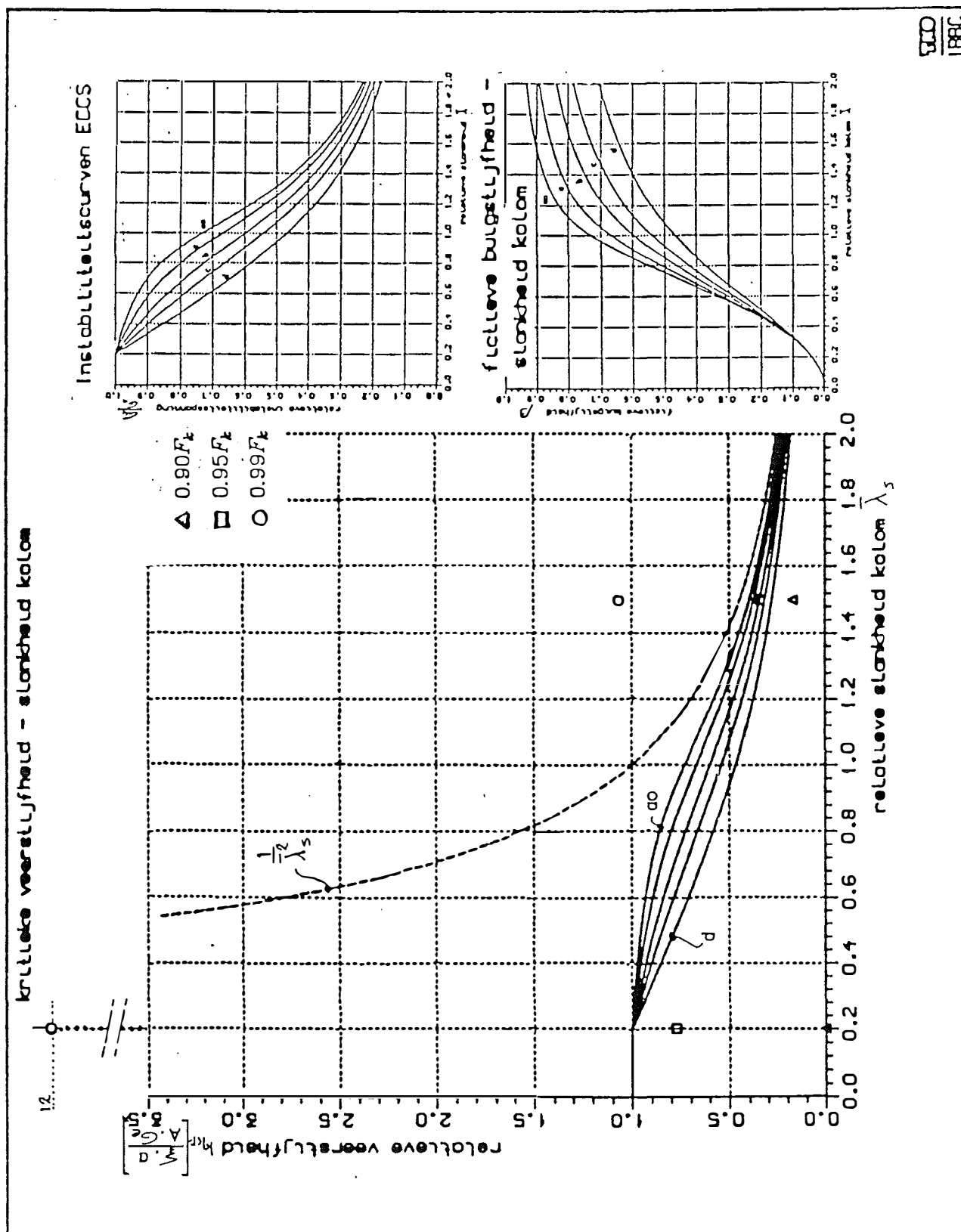


Fig. 6.17a Oplossing nr: 1

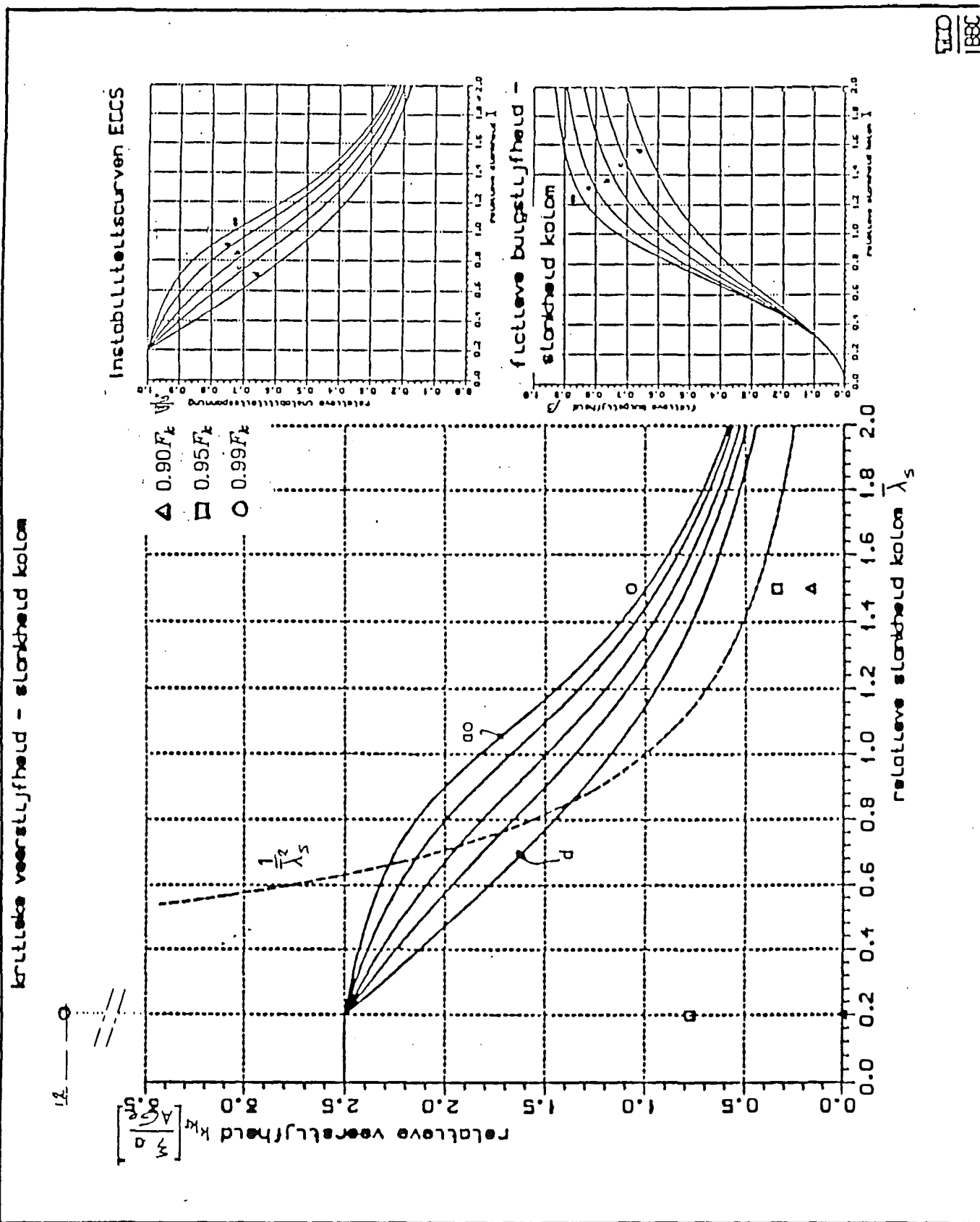


Fig. 6.17b 2.5 maal oplossing nr:1

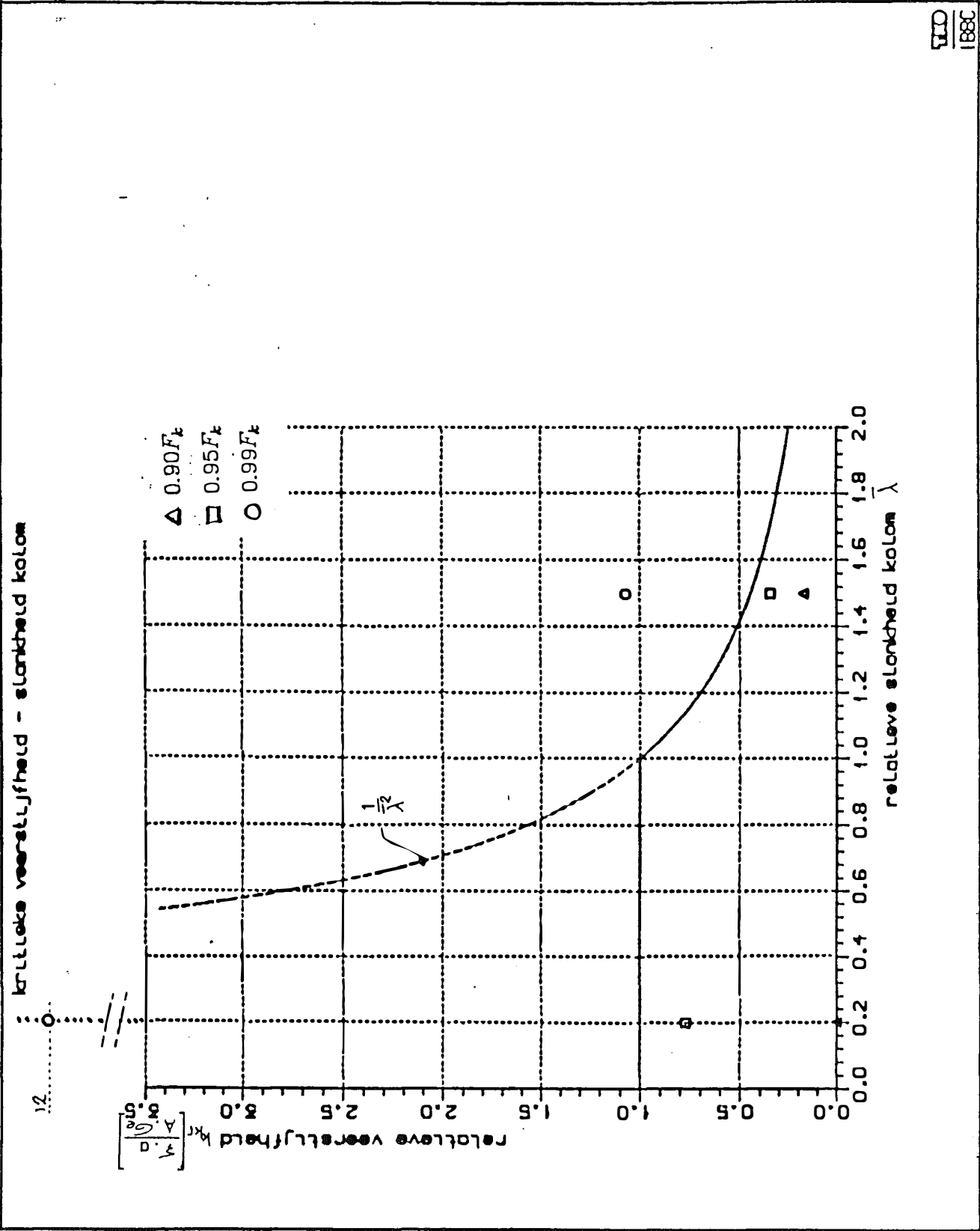


Fig. 6.18 Oplossing nr: 2

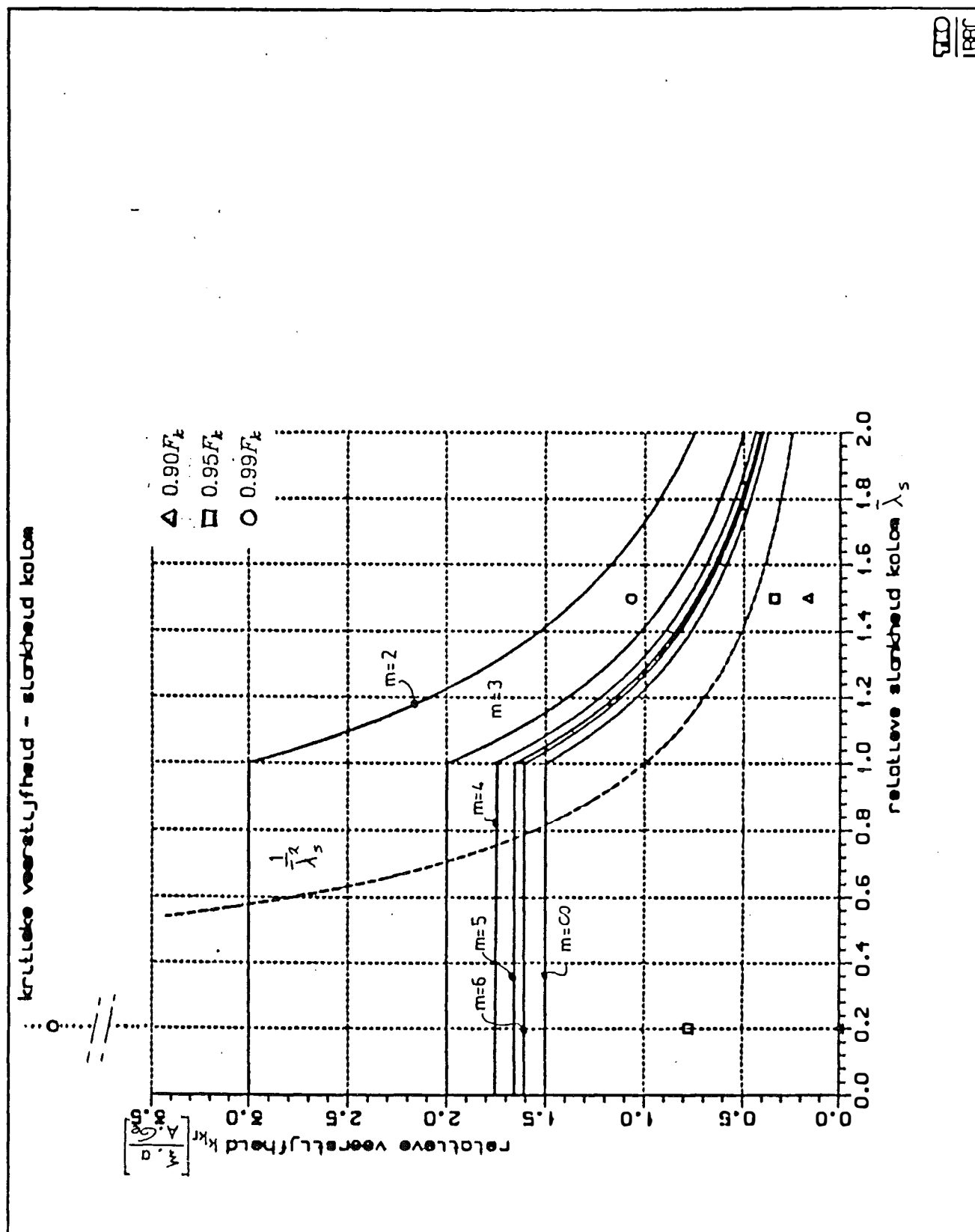


Fig. 6.19 Oplossing nr: 3

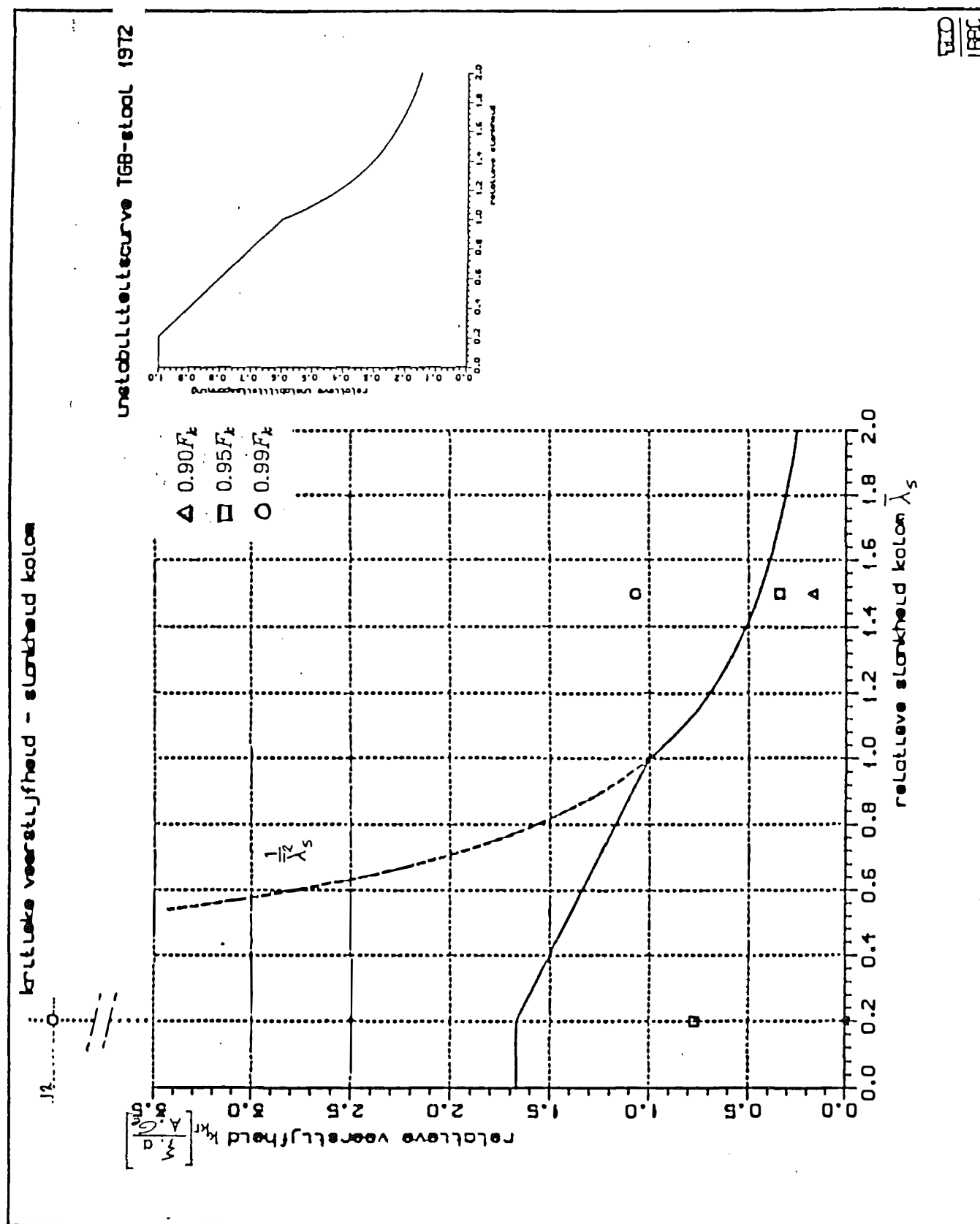


Fig. 8.20 Oplossing nr: 4

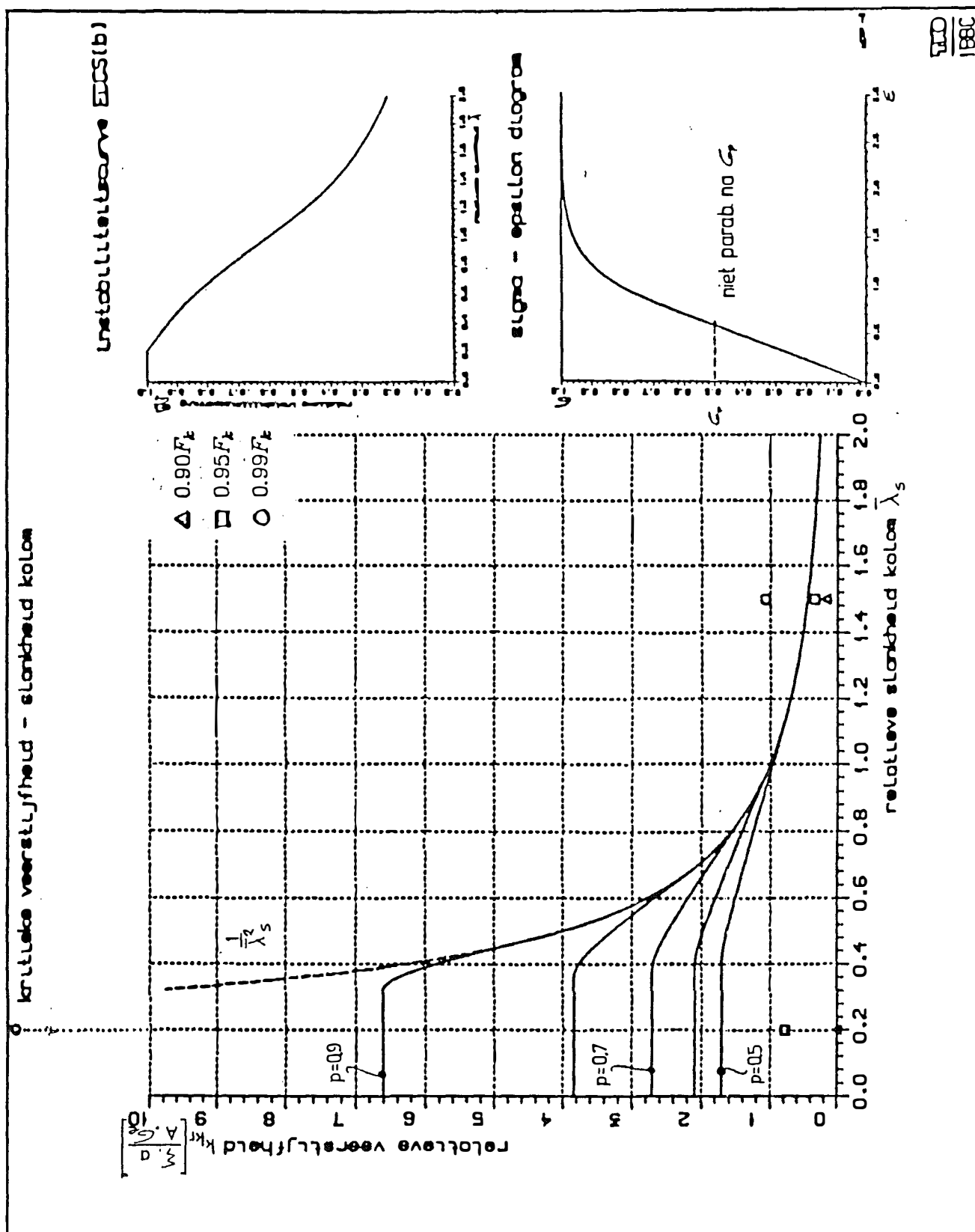


Fig. 6.21 Oplossing nr: 5

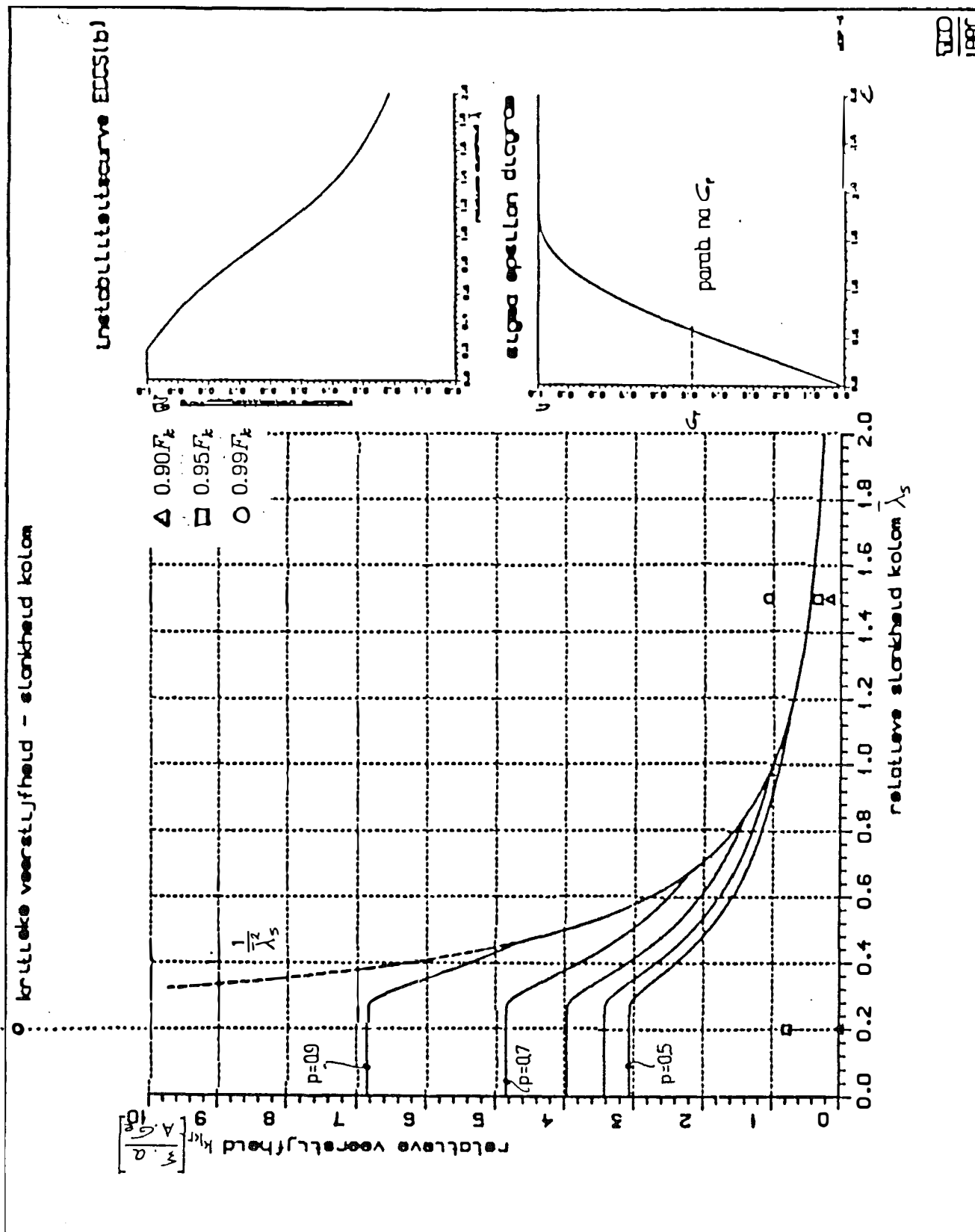


Fig. 6.22 Oplossing nr: 6

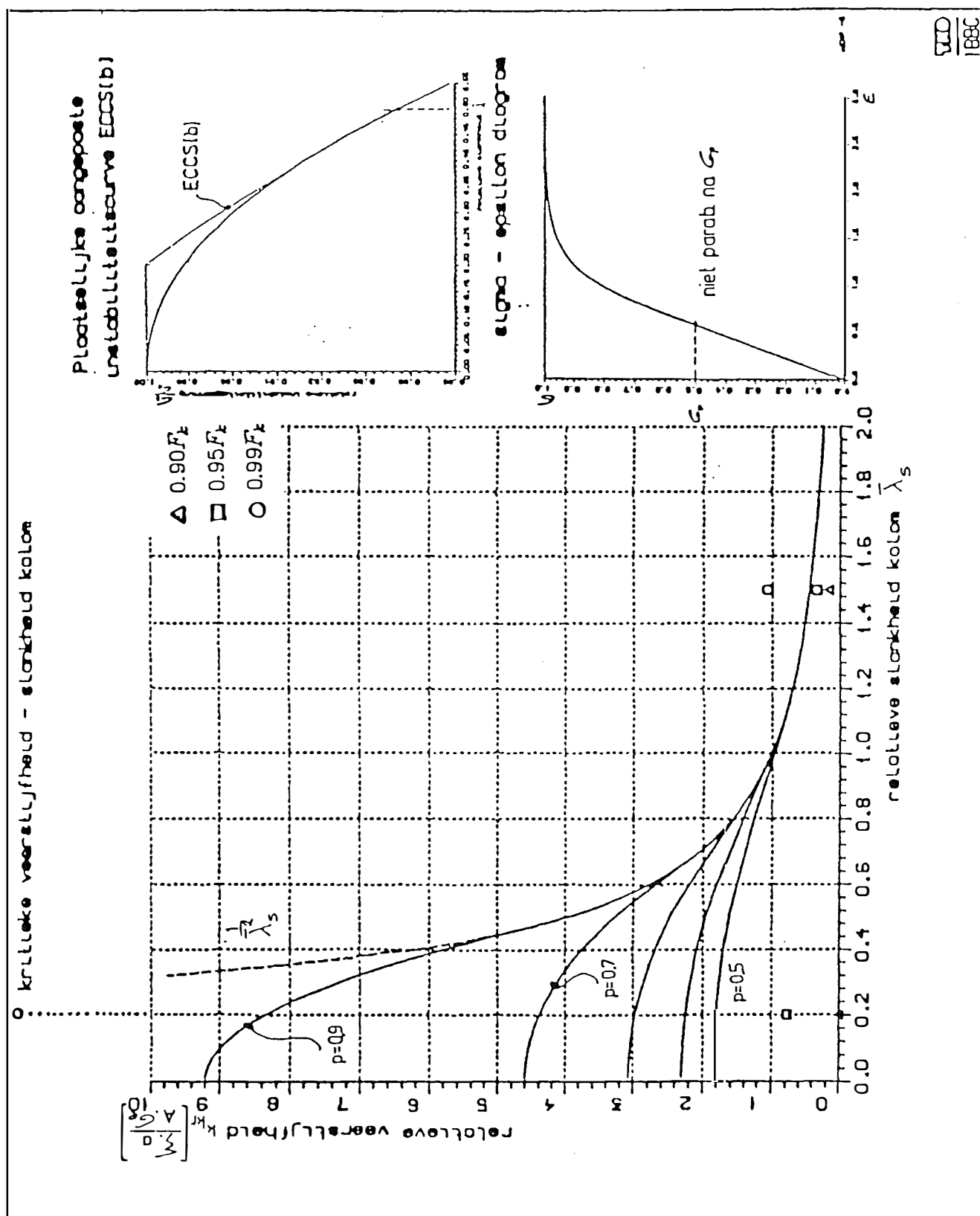


Fig. 6.23 Oplossing nr: 7

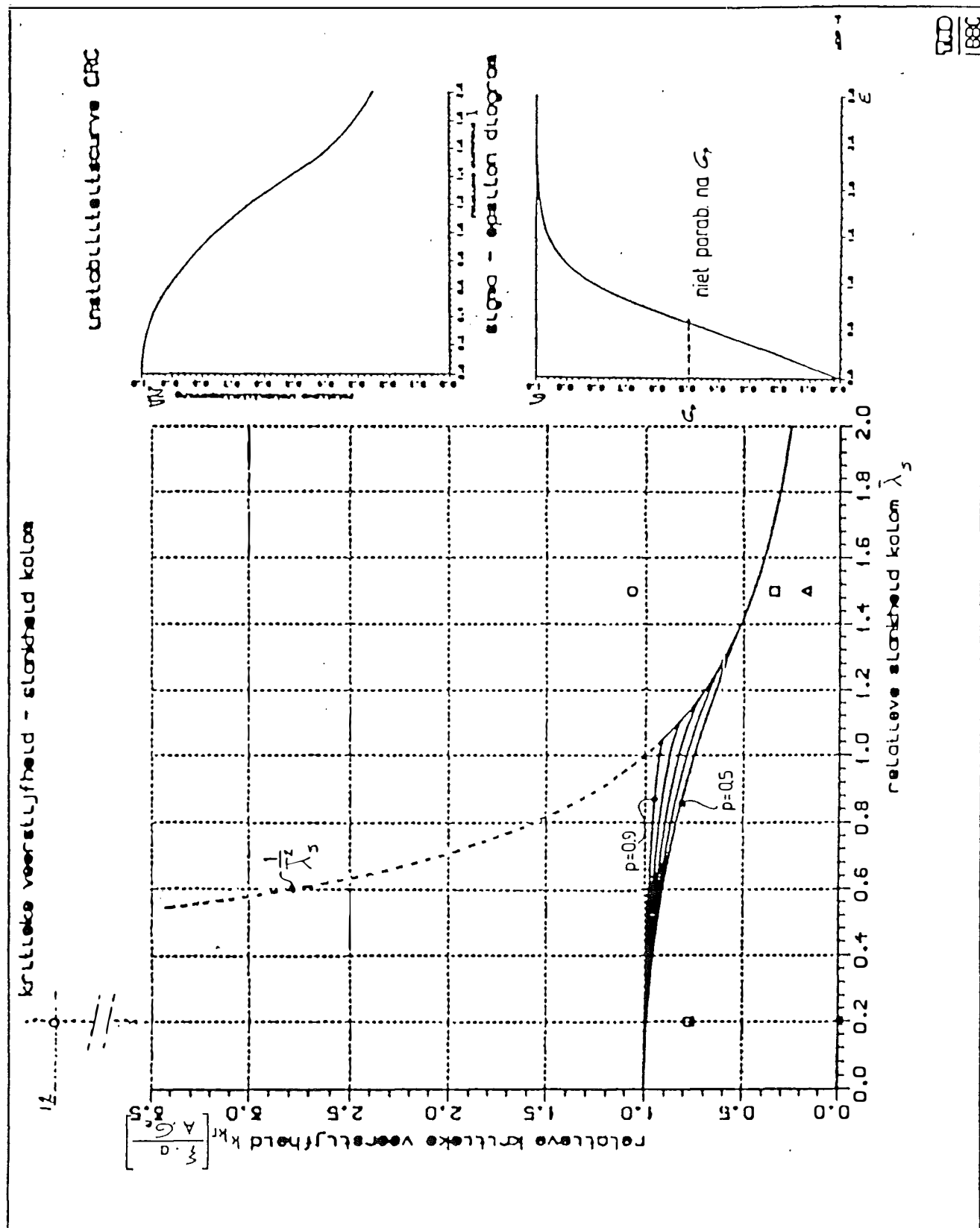


Fig. 6.24 Oplossing nr: 8

- 7.) Oplossing gebaseerd op een parabolische relatie tussen E_t en σ na de proportionaliteitsgrens en een gereduceerde instabiliteitscurve ECCS(b) par. 5.1.3.4 ad 1, fig. 5.9c.
- 8.) Oplossing gebaseerd op een parabolische relatie tussen E_t en σ na σ_p par. 5.1.3.1, fig. 5.6.

6.5.1. Veersterkte.

Naast de veerstijfheid, die rechtstreeks in verband staat met de draagkracht van de kolom, is ook de veersterkte van belang. In onderstaande tabel is daarom de veersterkte volgens [25] gezet naast de veersterkte volgens DIANA, voor de verschillende oplossingen.

Tabel 5: Veersterkte [25] versus veersterkte DIANA.

Opl no.	$\bar{\lambda}_s = 0.2$		$\bar{\lambda}_s = 1.5$	
	$F_v[25]$	F_vD	$F_v[25]$	F_vD
1a	1	0.295	1	3.348
1b	1	0.562	1.68	1.12
2	1	0.295	1	2.019
3	1	0.595	1	2.019
4	1	0.466	1	2.019
5	1	0.576	1	2.019
6	1	0.661	1	2.019
7	1	0.649	1	2.019
8	1	0.284	1	2.019

$F_v[25]$ → Vereiste veersterkte volgens [25].

F_vD → Vereiste veersterkte volgens DIANA.

Uit de tabel blijkt duidelijk dat de veersterkte volgens [25] voor $\bar{\lambda}_s = 0.2$ voldoet. Daarentegen is voor $\bar{\lambda}_s = 1.5$ de veersterkte volgens [25] bijna nooit voldoende.

6.5.2. Bespreking oplossingen.

- 1.) Met deze oplossing (fig. 6.17a) wordt volgens de DIANA-resultaten geen volledige draagkracht ($0.99F_k$) bereikt, zowel bij een systeemslankheid van $\bar{\lambda}_s = 0.2$ als $\bar{\lambda}_s = 1.5$. Indien 5% draagkrachtsverlies wordt geaccepteerd dan voldoet deze oplossing wel aan de benodigde kritieke veerstijfheid. Speciale eisen moeten dan worden gesteld aan de veersterkte aangezien de eisen in de huidige richtlijnen (o.a. [25]) niet voldoen in het elastische gebied. Een betere overeenstemming met de DIANA-resultaten wordt verkregen indien de oplossing met een factor 2.5 wordt vermenigvuldigd (fig. 6.17b). Bij $\bar{\lambda}_s = 1.5$ wordt dan een volledige draagkracht bereikt. Bij $\bar{\lambda}_s = 0.2$ wordt nog geen volledige draagkracht behaald, maar een draagkracht van $0.97F_k$. De veersterkte is gering en kleiner dan 1% van F_k . Voordeel van deze oplossing is dat de invloed van de grootte van de initiële "overall" imperfectie niet zo groot meer is (par. 6.4.3. conclusie 2). Bijkomend voordeel van deze oplossing is dat hij ook bruikbaar is voor veerstijfheden kleiner dan de kritieke.
- 2.) De methode waarbij de kritieke veerstijfheid wordt bepaald m.b.v. een Eulerse knikberekening is in de huidige richtlijnen [25] volledig geaccepteerd. Volgens de DIANA-resultaten wordt bij gebruik van deze methode geen volledige draagkracht behaald voor $\bar{\lambda}_s = 1.5$ en is tevens de veerkracht ongeveer $0.02F_k$ en dus vrij groot. Indien 5% draagkrachtsverlies wordt geaccepteerd dan voldoet deze oplossing (fig. 6.18) aan de DIANA-resultaten. Nadeel van deze oplossing is de fysisch niet mogelijke discontinuïteit t.p.v. $\bar{\lambda}_s = 1$.
- 3.) In het elastische gebied voldoet deze oplossing (fig. 6.19) goed voor zowel de kritieke veerstijfheid als de veersterkte. In het elasto-plastische gebied moet echter enig draagkrachtsverlies worden geaccepteerd. De draagkracht bij toepassing van de kritieke veerstijfheid volgens deze oplossing voor $\bar{\lambda}_s = 0.2$ is $0.973F_k$. Nadeel van deze methode is wederom de fysisch niet mogelijke discontinuïteit t.p.v. $\bar{\lambda}_s = 1$.
- 4.) Voor $\bar{\lambda}_s \geq 1$ zie oplossing 2. In het gedrongen gebied wordt ook bij deze oplossing (fig. 6.20) geen volledige draagkracht behaald.
- 5.) In het elastische gebied is de benodigde kritieke veerstijfheid volgens deze oplossing (fig. 6.21) gelijk aan de Eulerse kritieke veerstijfheid. Voor dit gebied geldt het gestelde onder 2. In het elasto-plastische gebied ($\sigma_k \geq \sigma_p$) moet voor de proportionaliteitsgrens een keuze worden gemaakt. Een realistische

keuze voor $p = 0.7$.

Voor $\bar{\lambda}_s = 0.2$ levert de kritieke veerstijfheid volgens deze oplossing een draagkracht op, volgens de DIANA-resultaten van $0.975 F_k$, dus nog geen volledige draagkracht.

Vermenigvuldiging van deze oplossing voor de kritieke veerstijfheid met een factor 2.5 levert betere resultaten op. Zowel in het elastische als het elasto-plastische gebied levert de methode dan een draagkracht van $0.99 F_k$ op.

Nadeel van deze oplossing is dat 3 gebieden worden onderscheiden, wat het praktisch gebruik ervan belemmert.

- 6.) Als 5. De oplossing (fig. 6.22) zal na vermenigvuldiging met de factor 2.5 nog iets beter met de DIANA-resultaten overeenkomen dan oplossing no. 5.
- 7.) Als 5. Voordeel t.o.v. oplossing 5 is dat nu een vloeiend verlopende curve is verkregen. Tevens onderscheiden zich nu nog maar 2 gebieden ($\sigma_k \leq \sigma_p$ en $\sigma_k \geq \sigma_p$) (fig. 6.23).
- 8.) Als 2. Voordeel van deze oplossing (fig. 6.24) is dat nu meer vloeiende curven zijn verkregen, vooral bij een lagere proportionaliteitsgrens. Tevens kan de methode waardoor de oplossing tot stand is gekomen eenvoudig worden toegepast bij veerstijfheden kleiner dan de kritieke (par. 3.6.1. en par. 5.1.3.1).

6.5.3. Voorstel relatie $k_{kr} - \bar{\lambda}_s$

Een tweetal voorstellen wordt gedaan voor de relatie tussen de kritieke veerstijfheid en de systeemslankheid. Eén om praktisch volledige draagkracht te garanderen en één waarbij 5% draagkrachtsverlies wordt geaccepteerd, maar waardoor met een lagere kritieke veerstijfheid kan worden volstaan.

1.) "Volledige" draagkracht.

Voorgesteld wordt om voor de relatie tussen de kritieke veerstijfheid en de systeemslankheid oplossing no: 7 te nemen, vermenigvuldigd met een factor 2.5 (formule 6.5; fig. 6.25). Voor p wordt de algemeen geaccepteerde waarde 0.7 genomen.

In formule voor $\bar{\lambda}_s \leq 0.5$

$$k_{kr} = \left\{ \frac{A\sigma_s}{\xi\alpha} \right\} \frac{2.5}{\bar{\lambda}^2} \left[1 - \left\{ \frac{\alpha^2 \bar{\lambda}^2 + 1 - p}{1 - p} \right\} \right] \quad (6.5a)$$

en voor $\bar{\lambda}_s \geq 0.5$:

$$k_{kr} = \left\{ \frac{A\sigma_e}{\xi a} \right\} \frac{2.5}{\bar{\lambda}_s} \quad (6.5b)$$

Waarin: a^1 een van de toegepaste instabiliteitscurve afhankelijke waarde is. Voor de ECCS instabiliteitscurven is a^1 in tabel 6 gegeven.

Tabel 6:

ECCS knikcurve	a^1
ao	-0.224
a	-0.308
b	-0.460
c	-0.624
d	-0.924

Motivatie:

- Met deze oplossing wordt volgens de DIANA-resultaten zowel in het elastische- als het elasto-plastische gebied praktisch volledige draagkracht bereikt ($\approx 0.99F_k$).
- De veerkrachten zijn bij zowel $\bar{\lambda}_s = 0.2$ als $\bar{\lambda}_s = 1.5$ kleiner dan $0.01F_k$. Hierdoor zullen de sterkte-eisen aan de verende ondersteuning in huidige richtlijnen en voorschriften veelal voldoende zijn. Wellicht kan met een 1%-regel worden volstaan.
- In de curve komen geen discontinuïteiten voor.
- De invloed van de grootte van de initiële "overall" imperfectie is bij $\bar{\lambda}_s = 1.5$ niet groot (par. 6.4.3. conclusie 5).
- De oplossing sluit aan bij de oplossing voor plaatvelden. Daar wordt voor de vereiste "veerstijfheid" de "Eulerse kritieke veerstijfheid" met een factor 3 vermenigvuldigd.
- Nadeel is dat deze oplossing niet in een eenvoudige rekenregel kan worden verwerkt, omdat de formules voor de kritieke veerstijfheid voor het elastische gebied verschilt van de formules voor het elasto-plastisch gebied.
- Ook voor veerstijfheden kleiner dan de kritieke is de methode, waarop de oplossing is gebaseerd, eenvoudig te gebruiken.

2.) 5% reductie in de draagkracht.

Voorgesteld wordt om voor de relatie tussen de kritieke veerstijfheid en de systeemslankheid oplossing nr: 1 te nemen (fig. 6.17a).

In formule:

$$k_{kr} = \left\{ \frac{A \sigma_s}{\xi a} \right\} \bar{N} \quad (6.6)$$

Motivatie:

- De oplossing kan in een eenvoudige rekenregel worden gegeven (formule (6.6)).
- Ook voor veerstijfheden kleiner dan de kritieke is de methode, waarop de oplossing is gebaseerd, eenvoudig te gebruiken (par. 3.6.2.).
- De methode berust op het goede uitgangspunt dat vermindering van de draagkracht in rekening wordt gebracht m.b.v. de fictieve buigstijfheid (hfst. 3.6.2). De methode is tevens in [2] goed onderbouwd.
- De discontinuïteit t.p.v. $\bar{\lambda}_s = 0.2$ is een klein nadeel.
- Een nadeel is dat 5% van de draagkracht moet worden ingeleverd.
- Een tweede nadeel is dat de sterkte eisen van [25] niet voldoen bij deze oplossing.
- Een derde nadeel is dat de invloed van de "overall" imperfectie groot is. (par. 6.4.3 conclusie 5)
- De oplossing sluit niet aan bij oplossingen voor soortgelijke stabiliteitsproblemen (b.v. plaatvelden).

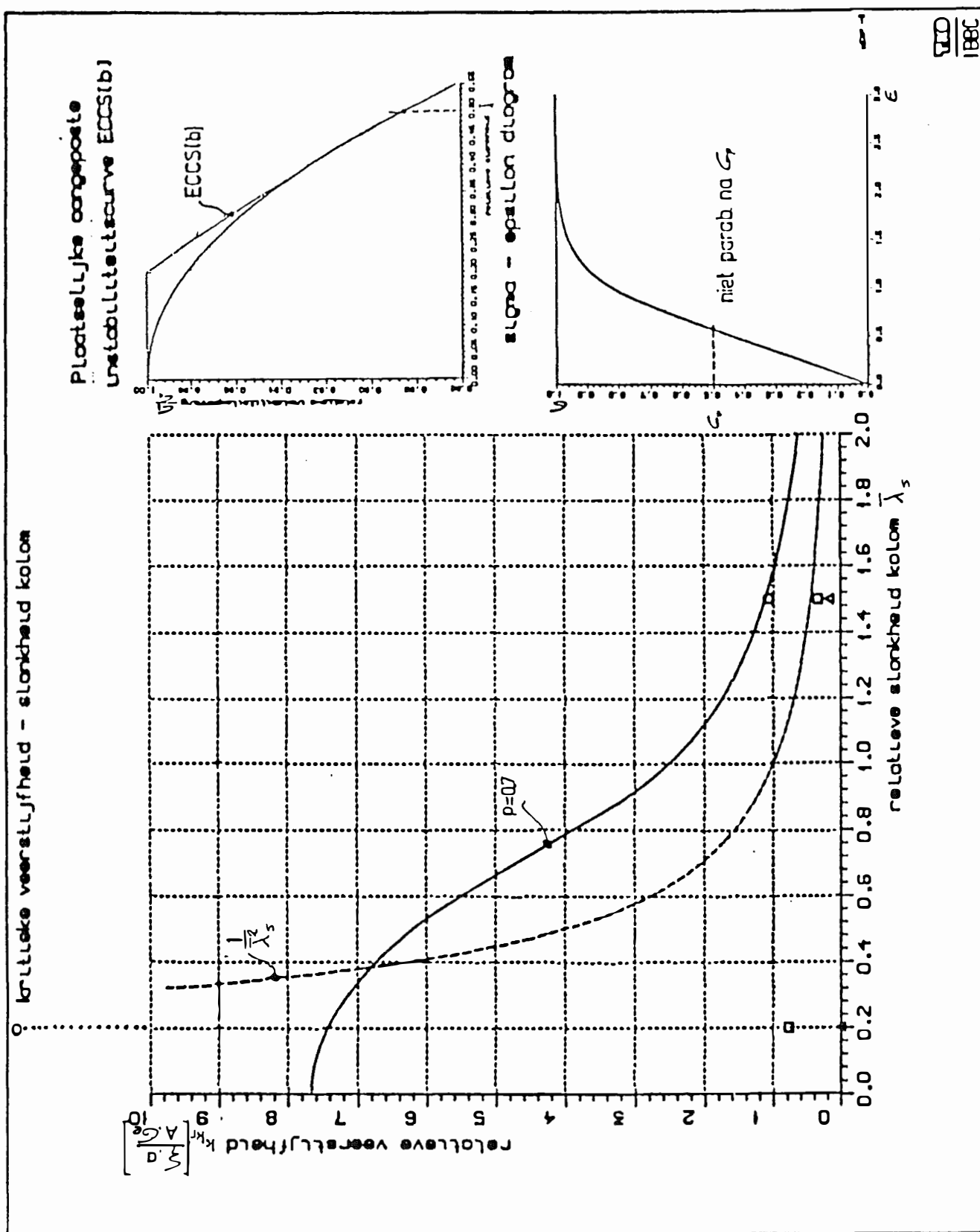


Fig. 6.25 Voorstel nr: 1

7. Samenvatting en conclusies.

- De huidige methode [25], een Eulerse knikberekening, voor het berekenen van de benodigde veerstijfheid levert bij kleiner worden van de slankheid van de te steunen staaf, onnodig hoge waarden op voor de vereiste benodigde veerstijfheid.
- Doel van het onderzoek is dan ook te komen tot een complete rekenmethode welke voor elke slankheid van de te steunen staaf realistische waarden geeft voor de stijfheid en sterkte van de verende ondersteuning.
- Ter vergroting van het inzicht is een literatuuronderzoek naar op druk belaste verend gesteunde staven uitgevoerd. Berekeningsmethoden die in de literatuur zijn gevonden zijn in het onderzoek betrokken. Eén daarvan, de gemodificeerde tangent-modulus theorie is verder uitgewerkt.
- Van alle methoden zijn de meest reële geverifieerd aan geometrisch en fysisch niet-lineaire berekeningen. Deze berekeningen zijn uitgevoerd met behulp van het eindige elementenprogramma DIANA. Bij de computerberekeningen met DIANA is rekening gehouden met walsrestspanningen en met een geometrische imperfectie.
- Bij veel oplossingen voor de kritieke veerstijfheid wordt in het elastisch gebied ($\bar{\lambda} \geq 1$) uitgegaan van een Eulerse knikberekening. Een geometrisch en fysisch niet-lineaire berekening heeft aangetoond dat bij toepassing van de Eulerse kritieke veerstijfheid $k_{kr}(E)$ in het elastische gebied geen draagkracht wordt verkregen die correspondeert met de ECCS instabiliteitscurve (volledig draagkracht).
- De eisen die in [25] worden gesteld aan de sterkte van de veer voldoen niet volgens geometrisch en fysisch niet-lineaire berekeningen, als $k_{kr}(E)$ wordt toegepast in het elastische gebied.
- Het onderzoek heeft geleid tot een tweetal berekeningsmethoden voor de kritieke veerstijfheid die ook voor kleine slankheden van de te steunen staven voldoen. Voorstel 1 waarbij praktisch volledige draagkracht wordt gegarandeerd en voorstel 2 waarbij 5% draagkrachtsverlies in rekening wordt gebracht.
- Voorstel 1 (par. 6.5.3.) is gebaseerd op de gemodificeerde tangent-modulus theorie. Uitgegaan is van een parabolische relatie tussen de tangent-modulus en de normaalspanning na de proportionaliteitsgrens en een gemodificeerde instabiliteitscurve ECCS (b). Om volledige draagkracht te garanderen moet een factor 2.5 in rekening worden gebracht op de kritieke veerstijfheid volgens voorstel 1, wat aansluit bij de oplossing van de "kritieke veerstijfheid" voor plaatvelden.

- Gebruik van de berekeningsmethode van voorstel 1, levert voldoende veerstijfheid op, om de volledige draagkracht te bereiken, zowel in het elastisch als het elasto-plastische gebied. Tevens geeft gebruik van deze methode geen onrealistisch hoge kritieke veerstijfheid bij kleiner worden van de slankheid van de te steunen staaf.
- Indien de berekeningsmethode van voorstel 1 wordt toegepast dan zijn de sterkte eisen in [25] aan de verende ondersteuning, volgens geometrisch en fysisch niet-lineaire berekeningen, voldoende voor de onderzochte systeemslankheden. De kracht in de veer is kleiner dan 1% van de volledige draagkracht. Een 1% regel zou, voorlopig voor veerstijfheden groter dan die van voorstel 1, in de voorschriften kunnen worden toegepast.
- Bij voorstel 2 wordt in plaats van de buigstijfheid een fictieve buigstijfheid toegepast. De verhouding tussen de fictieve buigstijfheid en de buigstijfheid wordt daarbij gelijk gesteld aan de verhouding tussen de instabiliteitskracht en de Eulerse knikkracht van de verend gesteunde staaf.
- Bij gebruik van de berekeningsmethode van voorstel 2 (par. 6.5.3.) moet een verlies van 5% in de draagkracht in rekening worden gebracht. Tevens voldoen de eisen aan de veersterkte volgens [25] niet meer.
- De berekeningsmethode voor de kritieke veerstijfheid van voorstel 1 voldoet aan de doelstelling van dit onderzoek.

8. Voorstel voor vervolg onderzoek.

- 1.) DIANA-sommen zijn gemaakt voor de systeemslankheden $\bar{\lambda}_0 = 0.2$ en $\bar{\lambda}_0 = 1.5$. Hieruit is veel geconcludeerd omtrent het gedrag van verend gesteunde kolommen in het elastisch en het elasto-plastisch gebied. Door het ontbreken van DIANA-resultaten voor tussenliggende systeemslankheden is er nog weinig bekend over de vorm van de curve, welke de relatie geeft tussen de kritieke veerstijfheid en de systeemslankheid van de kolom.

In een vervolg onderzoek kan voor de kritieke veerstijfheid worden uitgegaan van voorstel 1. Door nu voor meerdere systeemslankheden de bijbehorende draagkracht met DIANA te bepalen, kan de keuze in par. 6.5.2. beter worden onderbouwd.

- 2.) De gevonden oplossingen voor de relatie tussen de kritieke veerstijfheid en de systeemslankheden van de kolom zijn d.m.v. de factor ξ ook van toepassing voor kolommen met meerdere verende ondersteuning. De DIANA-sommen zijn echter gemaakt voor een kolom met 1 verende ondersteuning in het midden. De invloed van meerdere verende ondersteuning op de draagkracht, bij gelijkblijvende systeemslankheid, kan in een vervolgonderzoek daarom nog verder worden onderzocht.

- 3.) Verder onderzoek kan zich ook richten op:

- De relatie tussen de veerkracht en de veerstijfheid. Bij de door fysisch en geometrisch niet lineaire berekeningen onderzochte gedrongen kolom neemt de veerkracht toe als ook de veerstijfheid toeneemt. Bij de slanke kolom is dit juist andersom.
- Kolommen gesteund door zowel translatie veren, als rotatie veren.
- De invloed van excentriciteit van de verende ondersteuning.
- Verend gesteunde kolommen met een verschillende doorsnede per veld.

Literatuur

- [1] Conner, C. O'
Imperfectly braced columns and beams.
Civil Engineering Transactions, Institution of Engineerings
Australia, Vol. CE21, No. 2, September 1979, pp 69 - 74

- [2] Dubas, P.
Ultimate strength of compression members with intermittent
rigid or flexible lateral supports.
Stability of steel structures, Liege 13-15 April 1977,
Preliminary report, pp 469- 474

- [3] Elementenmethode-systeem Diana, deel 3
Gebruikershandleiding.
TNO-IBBC

- [4] Foeken, R.J. van, Snijder H.H.
Steel column and frame stability analysis using finite
element techniques
Heron, Vol. 30, 1985, No. 4

- [5] Horne, M.R., Ajmani, J.L.
Stability of columns supported laterally by side-rails
Int. J. mech. Sci. Pergamon Press, 1969, Vol. 11, pp 159-174

- [6] Jong, H. de
Buckling of an elastically supported chord
Stevin rapport 6-83-5, Delft University of Technology,
Department of Civel Engineering, 1983

- [7] Leroy, L.A., Fisher, J.M.
A unified approach for stability bracing requirements
Engineering journal, American institute of steel construction,
Fourth quarter, 1985

- [8] Matsui, C., Yagi, K
On the lateral bracing required for compression members
Stability of steel structures, Liege 13-15 April 1977,
Preliminary Report, pp 101-106

-
- [9] Medland, I.C.
A basis for the design of column bracing
The structural Engineer, volume 55, No. 7, July 1977, pp 301 - 307
- [10] Medland, I.C., Segedin, C.M.
The buckling of interbraced columns
Solids Structures, 1978, Vol. 14, pp 375-384
- [11] Medland, I.C.
Flexural-torsional buckling of interbraced columns
Eng. Struct., April 1979, Vol. 1, pp 131-138
- [12] Medland, I.C., Segedin, C.
Brace Forces in Interbraced Column Structures
Journal of the structural division, 14698, July 1979, ST7, pp 1543 - 1556
- [13] Medland, I.C.
Locally induced moments in braced column structures
The structural Engineer, Vol. 57B, No. 3, Sept. 1979, pp 66 - 69
- [14] Medland, I.C., Segedin, C.M.
The elastic buckling of restrained plates
Instability and collapse of steel structures,
Proceedings of The Michael R. Horne Conference,
Edited by L.J. Morris., Granada, 1983, pp 294-302
- [15] Medland, I.C., Segedin, C.M.
Interbraced columns and beams
Steel framed structures, stability and strength; Chapter 4
Edited by: R. Narayanan.
Elsevier applied Science publishers, London and New York.
- [16] Mutton, B.R., Trahair, N.S.
Stiffness Requirements For Lateral Bracing
Journal of the structural division, 10086, October 1973, ST10, pp 2167 - 2182
- [17] Nakamura, Takeshi
Strength and deformability of H-shaped steel beams and lateral bracing requirements
Stability of steel structures-Yugoslavia

-
- [18] Nederlands Normalisatie-Instituut
Voorschriften voor het Ontwerpen van Stalen Bruggen (VOSB 1963)
NEN 1008, 1e druk, augustus 1963, pp 56 - 59
- [19] Oliveto, G.
Inelastic buckling of columns partially restrained against
sway and rotation
Eng. struct., 1980, Vol.2, April, pp 97-102
- [20] Rol. M.D.
Niet-lineaire regressie m.b.v. simplex
TNO IBBC, Rapport BI-85-77/63.8.0950
- [21] Snijder. H.H.
Het gebruik van de elastische effectieve kniklengte voor de
stabiliteitscontrole van kolommen en de consequenties voor de
controle van liggers in geschoorde raamwerken
TNO IBBC, Rapport BI-83-54-I/63.1.0310
- [22] Snijder, H.H., Bijlaard, F.S.K.
Een controleprocedure voor knikverkorters in
hoogspanningsmasten
TNO IBBC, Rapport BI-86-60/63.8.0300.310
- [23] Snijder, H.H., Bijlaard, F.S.K.
De dimensionering van knikverkorters in hoogspanningsmasten
TNO IBBC, Rapport BI-85-92/63.4.3680, Deel: A,B,C
- [24] Staalcentrum Nederland, Staalbouwkundig genootschap
Stabiliteit voor de staalconstructeur
- [25] Staalcentrum Nederland, Staalbouwkundig genootschap
Concept rekenregels voor de stabiliteitscontrole van
staalconstructies opgebouwd uit lijnvormige
constructie-elementen
TNO IBBC, Rapport BI-84-22/63.4.3360
- [26] Swannell, P.
The elastic buckling of columns constrained by an initial
curved side rail
Civil Engineering Transactions, Institution of Engineerings
Australia, No. CE15, 1973, pp 90-93.

- [27] Timoshenko, S.
Theory of elastic stability
First Edition
McGraw-Hill book company, Inc, New-York and Londen, 1936

- [28] Winter, G.
Lateral bracing of columns and beams
Transactions American Society of Civil Engineers,
paper no. 3044, Vol. 125, 1960, p. 807-845

- [29] Zuk, W.
Lateral bracing forces on beams and columns
Journal of the structural division, 1032, July 1956, EM3,

