



Berekenen en ontwerpen van
eenvoudige constructies
van bouwwerken

1 **Mechanica** + **constructie**

V.G. Keijzers

Uitwerking van
oefenopgaven

bouwen met
staal.

Inhoud

1	Evenwicht en eenheden	2
2	Krachtenleer	3
3	Uitwendig evenwicht van liggers	9
4	Inwendig evenwicht van liggers	14
5	Scharnierliggers en driescharnierspanen	20
6	Vakwerken	31
7	Spanningen, elastisch	38
8	Vervormingen	53

Deze uitgave bevat de uitwerkingen van de oefenopgaven in V.G. Keijzers, *Mechanica + Constructie 1*, Zoetermeer 2020 (tweede, gecorrigeerde oplage)

Ga naar www.bouwenmetstaal.nl/publicaties/. Kies vervolgens:

- ‘Gratis publicaties’ voor de meest recente versie van de uitwerkingen van de oefenopgaven.
- ‘Correcties (errata)’ voor de meest recente versie van het correctieblad bij het boek.

samenstelling ir. V.G. Keijzers
met ondersteuning van ir. F.J. Klein (De Haagse Hogeschool)
versie 2 (01-05-2025)
uitgave Bouwen met Staal
foto omslag woontoren De StadsHeer in Tilburg van EGM architecten

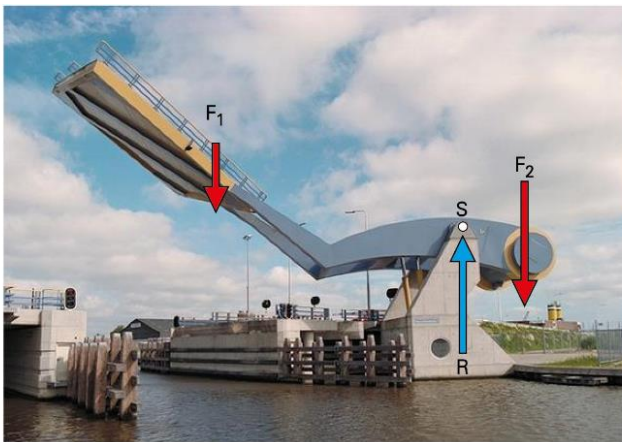


www.bouwenmetstaal.nl

© **Bouwen met Staal 2025**

Alle rechten voorbehouden. Deze uitgave is bedoeld voor persoonlijk gebruik. Niets uit deze uitgave mag elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier worden verveelvoudigd zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever. Docenten mogen deze uitgave plaatsen in de elektronische leeromgeving van de onderwijsinstelling.

1 Basculebrug



- a. Kracht
- F_2
- berekend met het balansprincipe

$$F_1 \cdot a_1 = F_2 \cdot a_2 \Rightarrow 1000 \cdot 20 = F_2 \cdot 5 \Rightarrow F_2 = 4000 \text{ kN}$$

- b. Kracht
- F_2
- berekend met een evenwichtsvergelijking (momentevenwicht)

$$\sum M_{\text{om } S} = 0 \Rightarrow +F_1 \cdot a_1 - F_2 \cdot a_2 = 0 \Rightarrow +1000 \cdot 20 - F_2 \cdot 5 = 0 \Rightarrow F_2 = +4000 \text{ kN}$$

- c. Scharnierkracht (oplegreactie
- R
-) berekend met een evenwichtsvergelijking (verticaal evenwicht)

$$\sum V = 0 \Rightarrow +F_1 + F_2 - R = 0 \Rightarrow +1000 + 4000 - R = 0 \Rightarrow R = +5000 \text{ kN}$$

De krachten F_1 en F_2 zijn de actiekrachten. Kracht R is de reactiekracht.

- d. Kracht
- F_2
- berekend t.o.v. de werklijn van kracht
- F_1

$$\sum M_{\text{om } F_1} = 0 \Rightarrow +R \cdot a_1 - F_2 \cdot (a_1 + a_2) = 0 \Rightarrow +R \cdot 20 - F_2 \cdot (20 + 5) = 0 \Rightarrow 20R - 25F_2 = 0 \quad (1)$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow +F_1 + F_2 - R = 0 \Rightarrow +1000 - R + F_2 = 0 \Rightarrow -20R + 20F_2 + 20000 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Uit (1) + (2) volgt: } -5F_2 + 20.000 = 0 \Rightarrow F_2 = +4000 \text{ kN}$$

Dit is hetzelfde resultaat als onder vraag a en b, maar met veel meer rekenwerk. Hieruit blijkt dat momentevenwicht geldt ten opzichte van elk willekeurig punt (dus ook buiten de constructie). Ook blijkt uit deze berekening het belang dat het momentevenwicht ten opzichte van een 'slim' punt wordt gekozen. Dat is een punt waarbij één of meerdere onbekende krachten geen moment leveren: punt S of de werklijn van kracht F_2 .

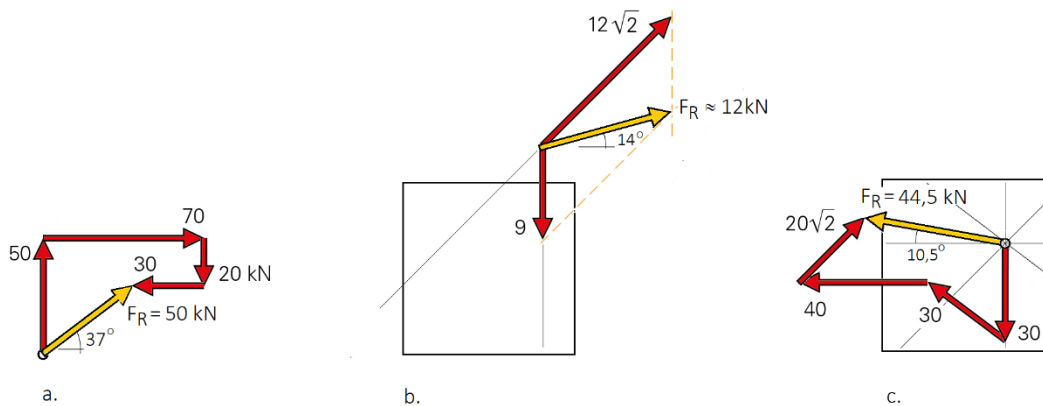
- e. Wetten van Newton

De toestand van een gesloten of stilstaande geopende brug wordt, ten opzichte van de omgeving, ervaren als een 'lichaam in rust'. Door het uitoefenen van een kracht – volgens de 2^e wet van Newton: $F = m \cdot a$ – komt de brug in beweging. Als de kracht constant aanblijft ondergaat de brug volgens deze wet een versnelling (gaat steeds sneller bewegen). Echter door wrijving in de lagers en luchtweerstand wordt zowel de versnelling als de snelheid geremd. Deze tegenwerkende krachten zijn zo groot dat tijdens het openen en sluiten van de brug continu een kracht moet worden uitgeoefend om een constante snelheid te behouden. Volgens de 1^e wet van Newton wil het lichaam volharden in een *rechtlijnige* beweging. In dit geval resulteert die beweging in een rotatie ten opzichte van S, waardoor in de draagarmen een middelpuntvliedende kracht ontstaat.

1 Resultante van krachtenstelsels

a. Resultante grafisch

De krachten zijn op schaal uitgezet: 1 cm $\equiv$ 10 kN (kies bijvoorbeeld 1 cm $\equiv$ 5 kN voor een grotere nauwkeurigheid). De lengte en de hoek van de resultante is opgemeten. Met de aangenomen schaal is de grootte van de resultante F_R berekend.



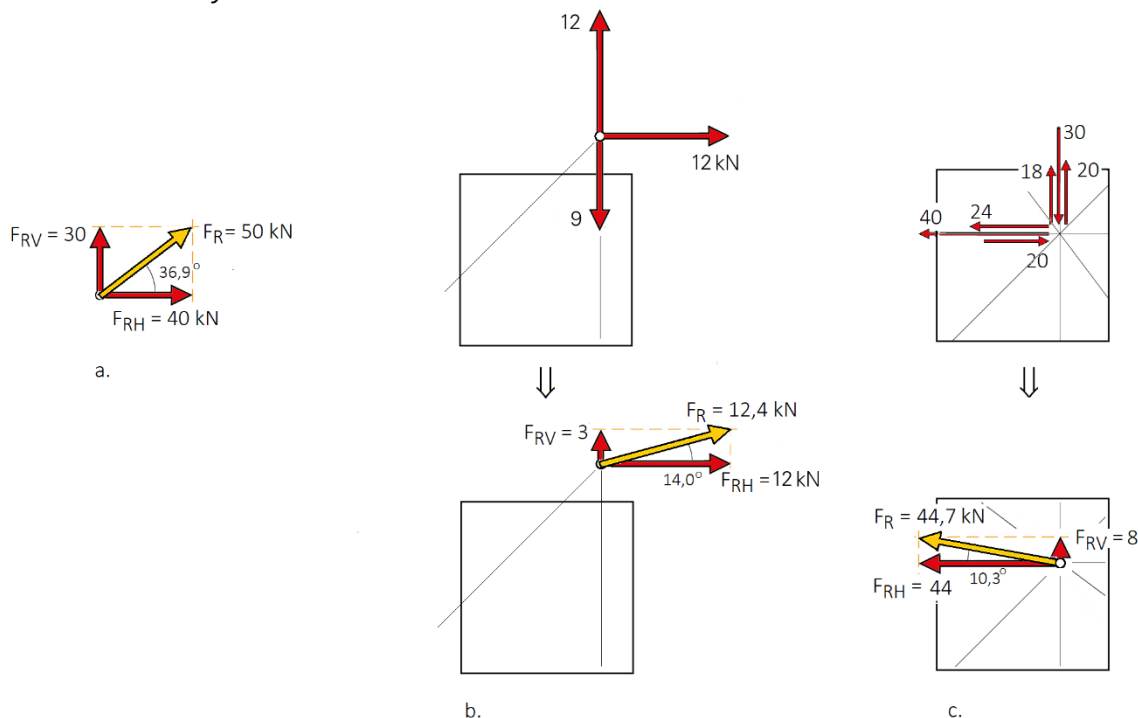
Afbeelding a en c

Een krachtenveelhoek werkt sneller dan een krachtenparallellogram. Er kunnen meerdere krachtenveelhoeken worden getekend. In afbeelding c gaan alle gegeven krachten door één punt. De resultante gaat dan ook door dit punt.

Afbeelding. b

Hier is gekozen voor een krachtenparallellogram. De krachten zijn naar het gemeenschappelijk snijpunt verplaatst. Tevens ontstaat het inzicht waar de resultante aangrijpt t.o.v. het lichaam.

b. Resultante analytisch

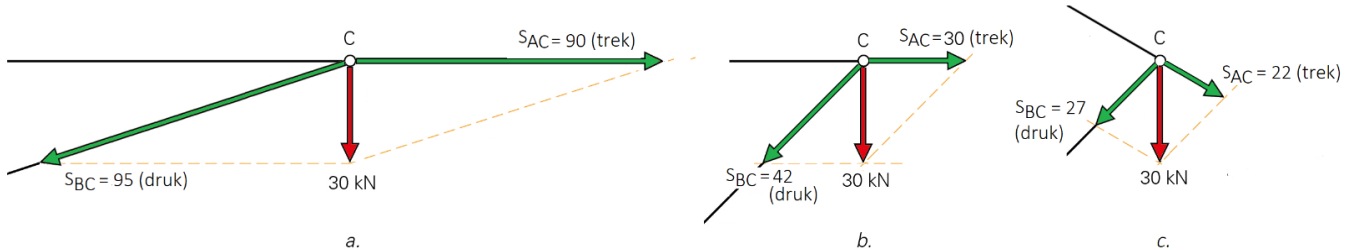


De krachten zijn naar een gemeenschappelijk snijpunt verplaatst. Elke schuine kracht is ontbonden in een verticale en horizontale component. Na sommatie zijn de verticale en horizontale resultante F_{RV} en F_{RH} samengesteld tot F_R met een hoek: $\tan \alpha = \frac{F_{RV}}{F_{RH}} \Rightarrow \alpha$.

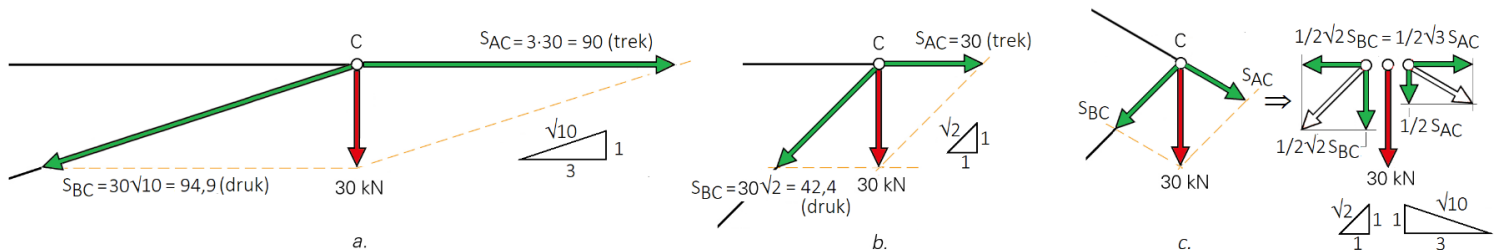
a. Staafkrachten grafisch met een krachtenparallellogram

Het is gebruikelijk dat een staafkracht in een vakwerk worden aangegeven met symbool S .

Voor elk gegeven vakwerk geldt dat de afstand tussen de knopen A en C groter wordt als de staaf wordt doorgesneden: staaf AC wordt dus op trek belast. De afstand tussen de knopen B en C wordt na doorsnijden kleiner: staaf BC wordt op druk belast. De belasting van 30 kN is hieronder getekend als de resultante van de twee staafkrachten. Verder is de werkwijze van opgave 1 gevolgd.



b. Staafkrachten analytisch



Afbeelding a en b

De staafkrachten zijn berekend op basis van de verhouding van de zijden van de driehoek.

Afbeelding c

De horizontaal ontbonden staafkrachten van S_{AC} en S_{BC} zijn even groot:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}S_{BC} = \frac{1}{2}\sqrt{3}S_{AC} \Rightarrow S_{BC} = (\sqrt{3}/\sqrt{2})S_{AC} \quad (1)$$

Daarnaast zijn de verticaal ontbonden staafkrachten van S_{AC} en S_{BC} samen 30 kN:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}S_{BC} + \frac{1}{2}S_{AC} = 30 \text{ kN} \quad (2)$$

Substitutie van (1) in (2) geeft: $\frac{1}{2}\sqrt{2}[(\sqrt{3}/\sqrt{2})S_{AC}] + \frac{1}{2}S_{AC} = 30 \text{ kN} \Rightarrow S_{AC} = 22,0 \text{ kN} \quad (3)$

Substitutie van (3) in (1) geeft: $S_{BC} = 26,9 \text{ kN}$

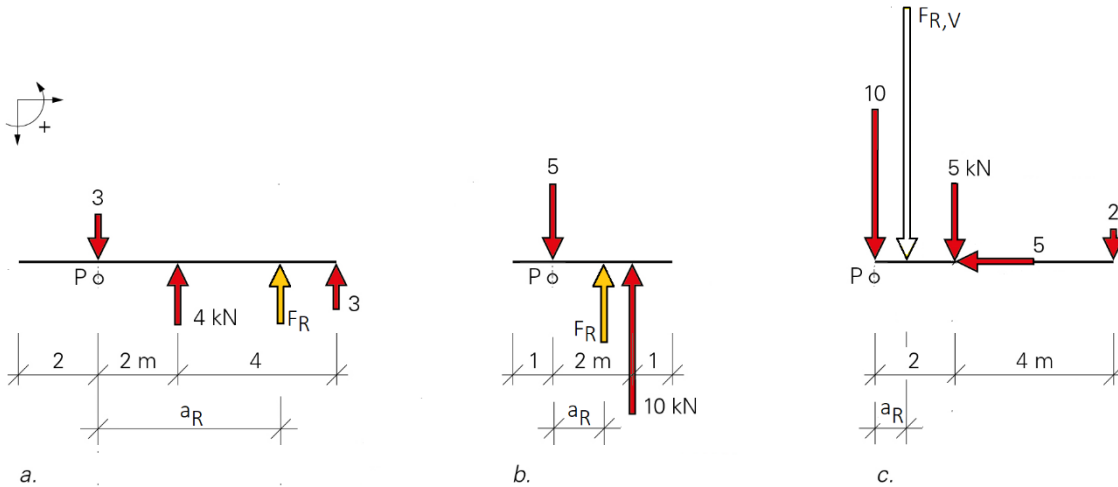
c. Verschil in grootte van de staafkrachten van afbeelding a en b

In afbeelding a is de hoek tussen de staven AC en BC kleiner dan in afbeelding b. Door een kleine hoek ontstaan na ontbinden grote staafkrachten. De trekkracht in staaf AC van afbeelding b is $90/30 = 3x$ zo klein, de drukkracht is $94,9/42,4 = 2,2x$ kleiner.

Als de situatie het toelaat moeten kleine hoeken worden vermeden. Naast grotere staafkrachten zijn de vervormingen, bij hetzelfde oppervlak van de staafdoorsnede, ook navenant groter.

3 Evenwijdige krachten op liggers

a. Grootte, richting en berekening ligging van de resultante F_R



Afbeelding a

Resultante

$$F_R = \Sigma F \Rightarrow F_R = +3 - 4 - 3 = -4 \text{ kN} \uparrow$$

Momentstelling t.o.v. P

$$+F_R \cdot a_R = +4 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \Rightarrow 4 \cdot a_R = 26 \text{ kNm} \Rightarrow a_R = +6,5 \text{ m}$$

Afbeelding b

Resultante

$$F_R = \Sigma F \Rightarrow F_R = +5 - 10 = -5 \text{ kN} \uparrow$$

Momentstelling t.o.v. P

$$+F_R \cdot a_R = +10 \cdot 2 \Rightarrow 5 \cdot a_R = 20 \text{ kNm} \Rightarrow a_R = +4 \text{ m}$$

Afbeelding c

Eerst wordt de schuine kracht $5\sqrt{2}$ ontbonden in een verticale en horizontale kracht van 5 kN

Verticale resultante

$$F_{R,V} = \Sigma F \Rightarrow F_{R,V} = +10 + 5 + 2 = +17 \text{ kN} \downarrow$$

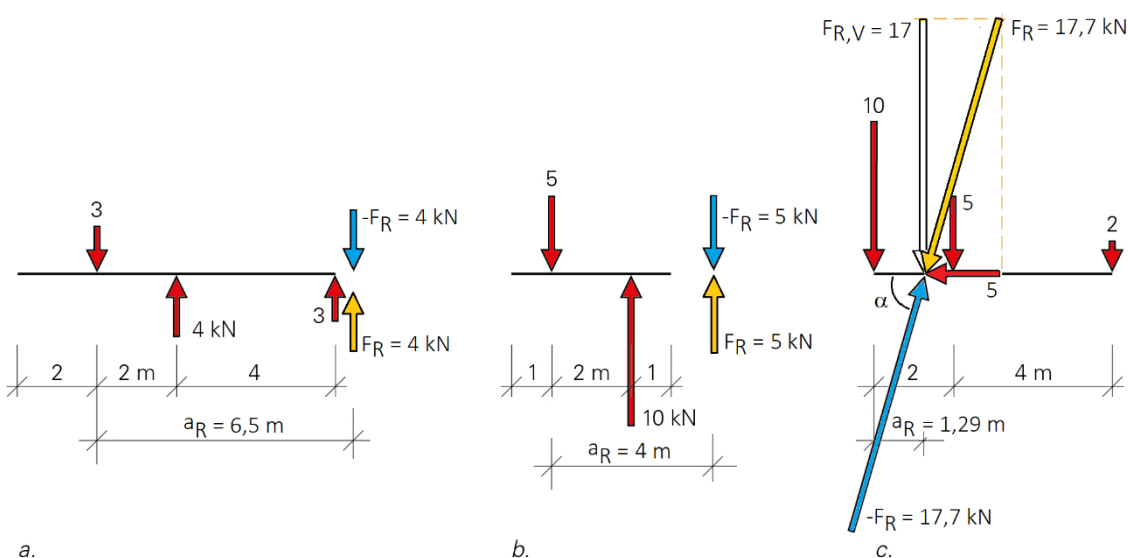
Momentstelling t.o.v. P

$$+F_{R,V} \cdot a_R = +5 \cdot 2 + 2 \cdot 6 \Rightarrow 17 \cdot a_R = 22 \text{ kNm} \Rightarrow a_R = +1,29 \text{ m (van } F_{R,V})$$

Resultante $F_{R,V}$ en 5 kN

$$F_R = \sqrt{(17^2 + 5^2)} = 17,7 \text{ kN met: } \tan \alpha = \frac{F_{R,V}}{F_{R,H}} = \frac{17}{5} = 3,4 \Rightarrow \alpha = 73,6^\circ$$

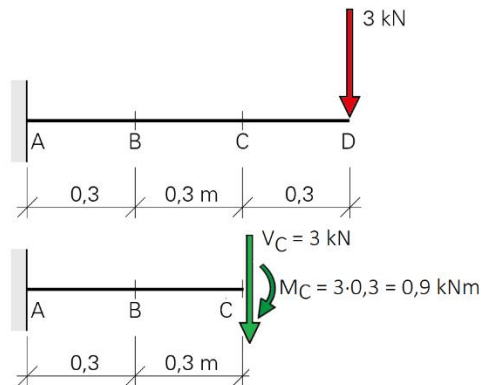
b. Ligging van de resultante F_R en de evenwichtmakende kracht $-F_R$ (blauw)



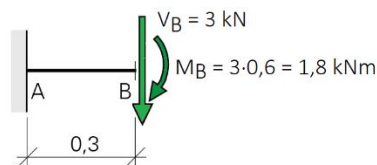
4 Snedekrachten in een ligger

Het is gebruikelijk dat een staafkracht dwars op de staafas (een dwarskracht) aangegeven wordt met symbool V .

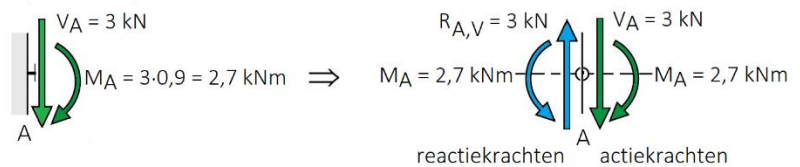
a. Krachten in snede C



b. Krachten in snede B



c. Krachten in snede A met actie- en reactiekrachten op knoop A.



Merk op dat:

– in afbeelding c knoop A in evenwicht is.

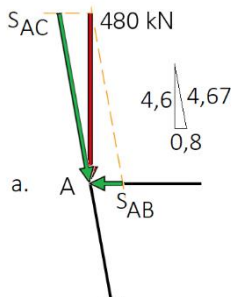
– in *elke* afbeelding de reactiekrachten in A een grootte hebben: $R_{A,V} = 3 \text{ kN} \uparrow$ en $M_A = 2,7 \text{ kNm} \curvearrowleft$

5 Krachten in een ondersteuningsconstructie van een loopbrug

De afstand tussen de knopen A en C wordt kleiner als de staaf wordt doorgesneden: staaf AC wordt op druk belast. Knooppafstand AB wordt na doorsnijden groter: staaf AB wordt op trek belast. Voor staaf CD geldt dat na doorsnijden de afstand tussen de knopen kleiner wordt: staaf CD wordt op druk belast.

a. Knoop A: staafkrachten met een krachtenparallelogram

De kracht van 480 kN is hier getekend als de resultante van de twee staafkrachten S_{AC} en S_{AB} .

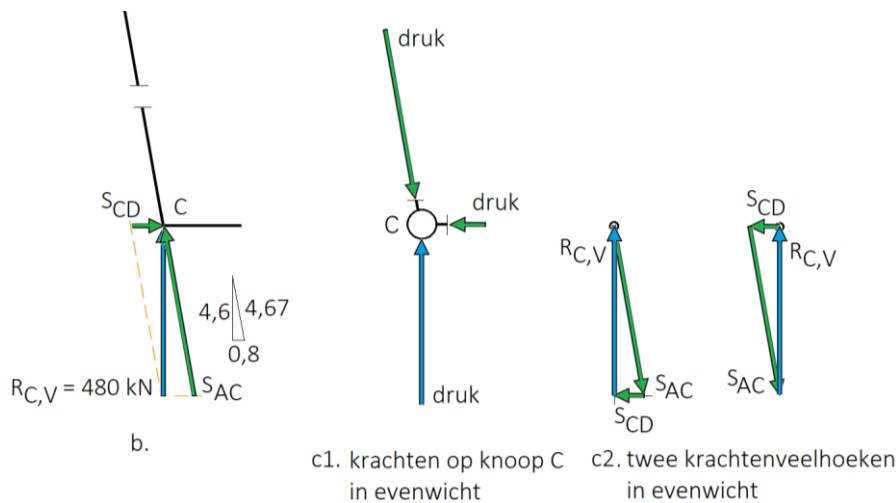


$$S_{AC} = \frac{4,67}{4,6} \cdot 480 = 487 \text{ kN (druk)}$$

$$S_{AB} = \frac{0,8}{4,6} \cdot 480 = 83,5 \text{ kN (druk)}$$

b. Knoop C: reactiekracht $R_{C,V}$ en staafkrachten met een krachtenparallellogram (afb. b)

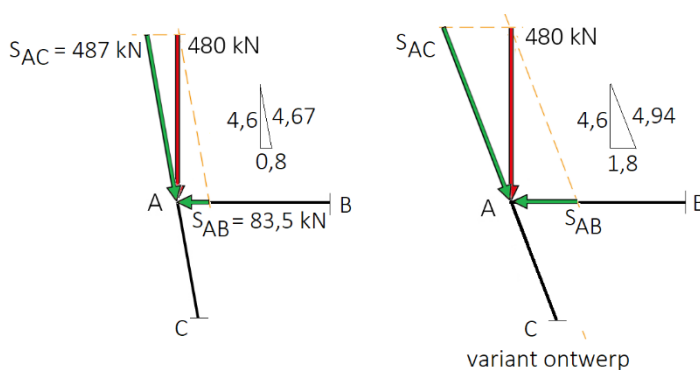
De ondersteuningsconstructie is 'opgelegd' in de knopen C en D. Vanwege symmetrie zijn de oplegreacties even groot: $R_{C,V} = R_{D,V} = 480 \text{ kN} \uparrow$. Het krachtenparallellogram en de staafkrachten zijn even groot als in knoop A. $S_{AC} = 487 \text{ kN}$ (druk) en $S_{CD} = 83,5 \text{ kN}$ (druk).



c. Twee krachtenveelhoeken van knoop C (afb. c1 en c2)

Vanuit een krachtenparallellogram is het vaak lastig vast te stellen of een staafkracht een trek-of drukkracht is. Voor het correct tekenen van een krachtenveelhoek is het advies: teken eerst de knoop met daarop de krachten die op de knoop werken (afb. c1). Er was al geconcludeerd dat de twee staven die op knoop C aansluiten op druk worden belast. Dat betekent dat een drukkracht naar de knoop toe getekend wordt. Uit afbeelding c2 blijkt dat de twee krachtenveelhoeken van knoop C in evenwicht zijn, en waarbij de oplegreactie $R_{C,V}$ de krachtenveelhoek sluit.

d. Staafkrachten in een variant ontwerp van de ondersteuningsconstructie (afstand $CD = 0$)



Uit de afbeelding van het variant ontwerp blijkt dat de staafkrachten S_{AB} en S_{AC} groter worden bij een kleinere hoek tussen de staven AC en AB. Uit de verhoudingen van de zijden van de driehoeken volgt dat staafkracht S_{AB} $1,8/0,8 = 2,25$ x groter wordt en staafkracht S_{AC} $4,94/4,67 = 1,06$ x groter wordt.

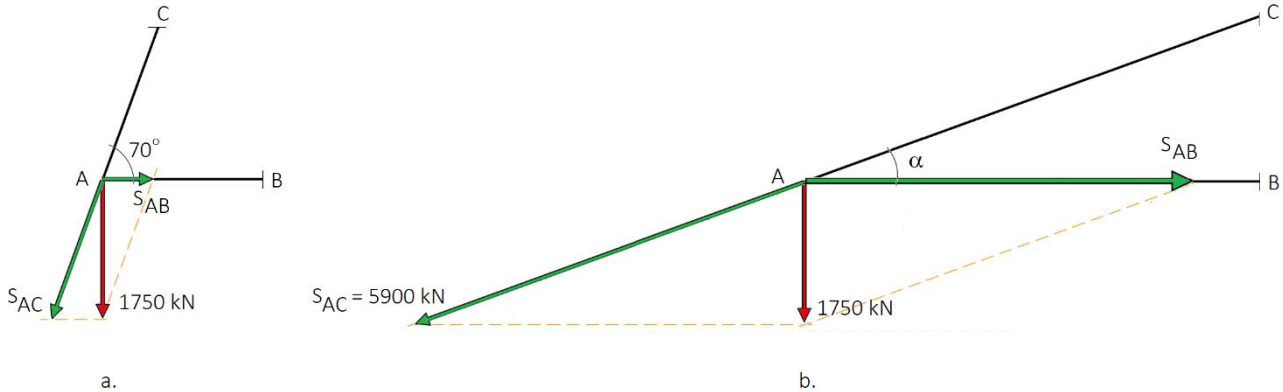
Dit geeft voor het variantontwerp de staafkrachten: $S_{AB} = 2,25 \cdot 83,5 = 188 \text{ kN}$ en $S_{AC} = 1,06 \cdot 487 = 516 \text{ kN}$.

a. Staafkrachten in de kabels en bovenste evenaar (afb. a)

Vanwege symmetrie wordt het hijsgewicht gelijk verdeeld over de knopen A en B: hijsgewicht $F_A = F_B = 3500/2 = 1750$ kN, Dit geeft de volgende staafkrachten:

$$S_{AC} = 1750/\sin 70 = 1862 \text{ kN} \quad \text{trek, en kan daarom een kabel zijn}$$

$$S_{AB} = 1750/\tan 70 = 637 \text{ kN} \quad \text{druk en moet daarom, i.v.m. knik, een balk zijn}$$



b. Minimale hoek van de kabel met de evenaar (afb. b)

De hoek die nog toelaatbaar is bij een kracht in de kabel van 5900 kN is: $\sin \alpha = 1750/5900 \Rightarrow \alpha = 17,3^\circ$.

Uit de afbeelding blijkt (ook nu weer) dat bij een kleinere hoek de staafkrachten aanzienlijk toenemen. De kracht in de evenaar wordt nu: $S_{AB} = 1750/\tan 20 = 4808$ kN. Dat is maar liefst $4808/637 = 7,5$ x zo groot. De trekkracht in de kabel wordt $5900/1862 = 3,2$ x groter.

c. Staafkrachten in de kabels en onderste evenaar.

De belasting van de bovenste evenaar verdeelt zich gelijkmatig over de twee onderste evenaars. Elke onderste hijsconstructie draagt de helft van 3500 kN. Omdat de hijskabels ook een hoek van 70° maken met de onderste evenaars hebben de staafkrachten exact dezelfde verhouding als in de bovenste evenaar. Dat betekent dat alle staafkrachten precies de helft zijn: in de kabels is een trekkracht aanwezig van $637/2 = 318$ kN, in de evenaar een drukkracht van $1862/2 = 931$ kN.

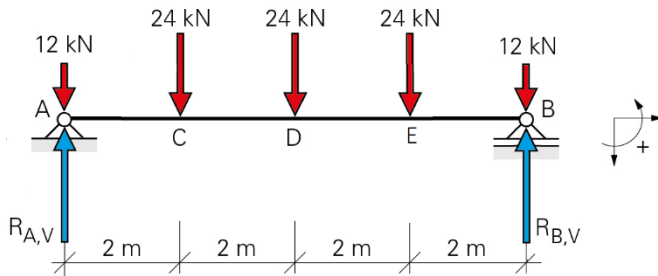
Uitwendig evenwicht van liggers

3.6 Oefenopgaven

1 Liggers op twee steunpunten

Op deze drie liggers werken geen horizontale krachten $\Rightarrow R_{A,H} = 0$.

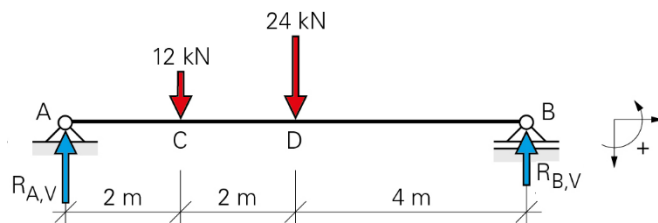
Ligger a



De oplegreacties worden het snelst op basis van symmetrie bepaald

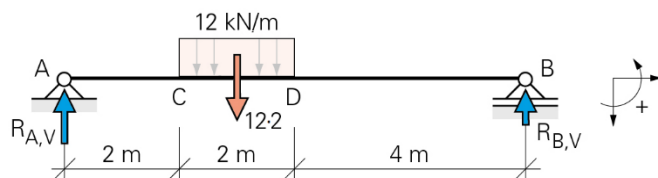
$$R_{A,V} = R_{B,V} = \frac{2 \cdot 12 + 3 \cdot 24}{2} = 48 \text{ kN} \uparrow$$

Ligger b



$$\begin{aligned} \Sigma M_{\text{om } A} = 0 &\Rightarrow -12 \cdot 2 - 24 \cdot 4 + R_{B,V} \cdot 8 = 0 \Rightarrow R_{B,V} = +15 \text{ kN} \uparrow \\ \Sigma V = 0 &\Rightarrow -R_{A,V} + 12 + 24 - 15 = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +21 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

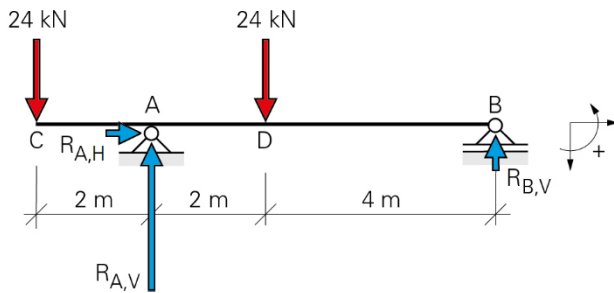
Ligger c



$$\begin{aligned} \Sigma M_{\text{om } A} = 0 &\Rightarrow -(12 \cdot 2) \cdot 3 + R_{B,V} \cdot 8 = 0 \Rightarrow R_{B,V} = +9 \text{ kN} \uparrow \\ \Sigma V = 0 &\Rightarrow -R_{A,V} + (12 \cdot 2) - 9 = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +15 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

2 Ligger op twee steunpunten met aan één zijde een overstek

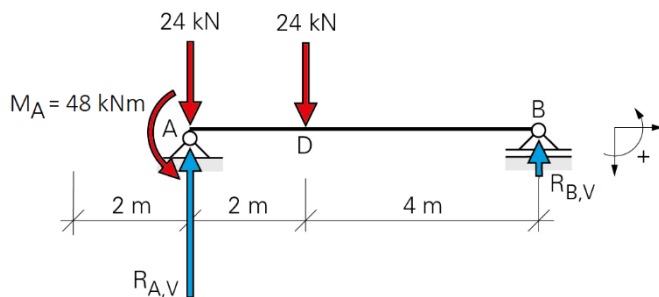
a. Oplegreacties



$$\begin{aligned}\Sigma H = 0 & \Rightarrow R_{A,H} = 0 \text{ kN} \\ \Sigma M_{\text{om } B} = 0 & \Rightarrow +24 \cdot 8 - R_{A,V} \cdot 6 + 24 \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +48 \text{ kN} \uparrow \\ \Sigma V = 0 & \Rightarrow +24 - 48 + 24 - R_{B,V} = 0 \Rightarrow R_{B,V} = 0 \text{ kN}\end{aligned}$$

Zie in dat zonder oplegging B de ligger precies in evenwicht is (verticaal én moment): de resultante van de twee puntlasten staat namelijk precies boven oplegging A.

b. Oplegreacties nadat de kracht in C van 24 kN naar A is verplaatst



$$M_A = 24 \cdot 2 = 48 \text{ kNm} \curvearrowleft$$

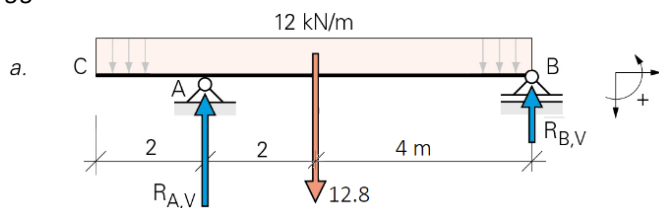
$$\begin{aligned}\Sigma M_{\text{om } A} = 0 & \Rightarrow +48 - 24 \cdot 2 + R_{B,V} \cdot 6 = 0 \Rightarrow R_{B,V} = 0 \text{ kN} \\ \Sigma V = 0 & \Rightarrow -R_{A,V} + 24 + 24 + 0 = 0 \Rightarrow R_{A,V} = 48 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

Deze waarden komen overeen met vraag a.

3 Liggers op twee steunpunten

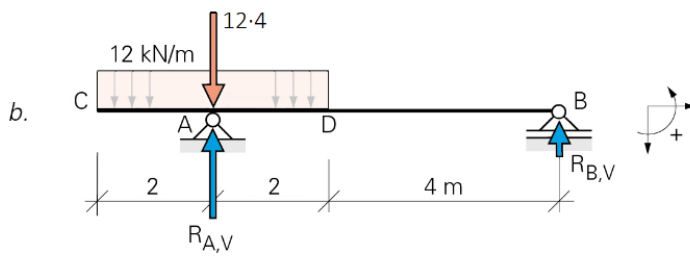
Op deze drie liggers werken geen horizontale krachten $\Rightarrow R_{A,H} = 0$.

Ligger a



$$\begin{aligned}\Sigma M_{\text{om } A} = 0 & \Rightarrow -(12 \cdot 8) \cdot 2 + R_{B,V} \cdot 6 = 0 \Rightarrow R_{B,V} = +32 \text{ kN} \uparrow \\ \Sigma V = 0 & \Rightarrow -32 + (12 \cdot 8) - R_{A,V} = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +64 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

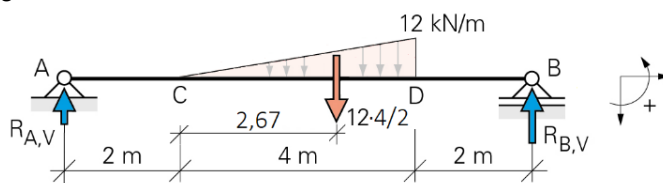
Ligger b



De resultante van de belasting staat precies boven oplegging A $\Rightarrow R_{B,V} = 0 \text{ kN}$ (zoals in opgave 2)

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow (12 \cdot 8) - R_{A,V} = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +48 \text{ kN} \uparrow$$

Ligger c



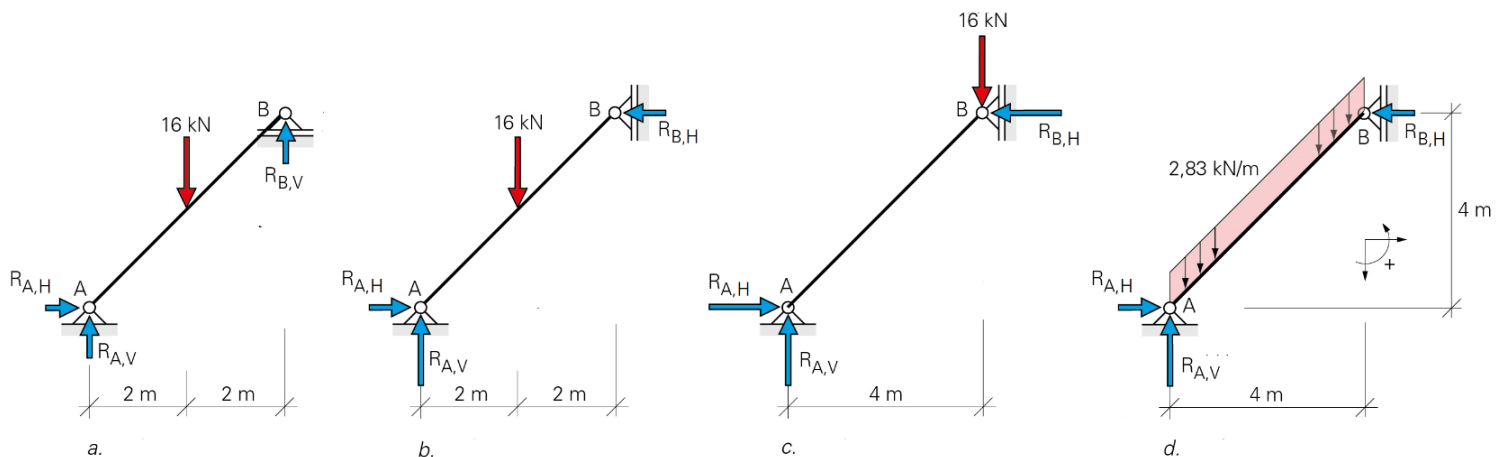
$$\Sigma M_{\text{om A}} = 0 \Rightarrow -(12 \cdot 4 / 2) \cdot 4,67 + R_{B,V} \cdot 8 = 0 \Rightarrow R_{B,V} = +14 \text{ kN} \uparrow$$

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow -14 + (12 \cdot 4 / 2) - R_{A,V} = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +10 \text{ kN} \uparrow$$

In de uitwerkingen hierna wordt de resultante van de lijnlast 'in gedachte' voorgesteld.

4 Schuin geplaatste liggers op twee steunpunten

a. reactiekrachten



Ligger a

$$\Sigma M_{\text{om A}} = 0 \Rightarrow -16 \cdot 2 + R_{B,V} \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_{B,V} = +8 \text{ kN} \uparrow$$

$$\Sigma H = 0 \Rightarrow R_{A,H} = 0 \text{ kN}$$

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow -R_{A,V} + 16 - 8 = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +8 \text{ kN} \uparrow$$

Ligger b

$$\begin{aligned}\Sigma M_{\text{om } A} = 0 &\Rightarrow -16 \cdot 2 + R_{B,V} \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_{B,V} = +8 \text{ kN} \leftarrow \\ \Sigma H = 0 &\Rightarrow +R_{A,H} - 8 = 0 \Rightarrow R_{A,H} = +8 \text{ kN} \rightarrow \\ \Sigma V = 0 &\Rightarrow -R_{A,V} + 16 = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +16 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

Ligger c

$$\begin{aligned}\Sigma M_{\text{om } A} = 0 &\Rightarrow -16 \cdot 4 + R_{B,H} \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_{B,H} = +16 \text{ kN} \leftarrow \\ \Sigma H = 0 &\Rightarrow +R_{A,H} - 16 = 0 \Rightarrow R_{A,H} = +16 \text{ kN} \rightarrow \\ \Sigma V = 0 &\Rightarrow -R_{A,V} + 16 = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +16 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

Ligger d (de resultante van de lijnlast is in gedachte voorgesteld)

$$\begin{aligned}\Sigma M_{\text{om } A} = 0 &\Rightarrow -(2,83 \cdot 4 \sqrt{2}) \cdot 2 + R_{B,H} \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_{B,H} = +8 \text{ kN} \leftarrow \text{ hierin is } 2,83 \cdot (4 \sqrt{2}) \text{ de resultante} \\ \Sigma H = 0 &\Rightarrow +R_{A,H} - 8 = 0 \Rightarrow R_{A,H} = +8 \text{ kN} \rightarrow \\ \Sigma V = 0 &\Rightarrow -R_{A,V} + 2,83 \cdot 4 \sqrt{2} = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +16 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

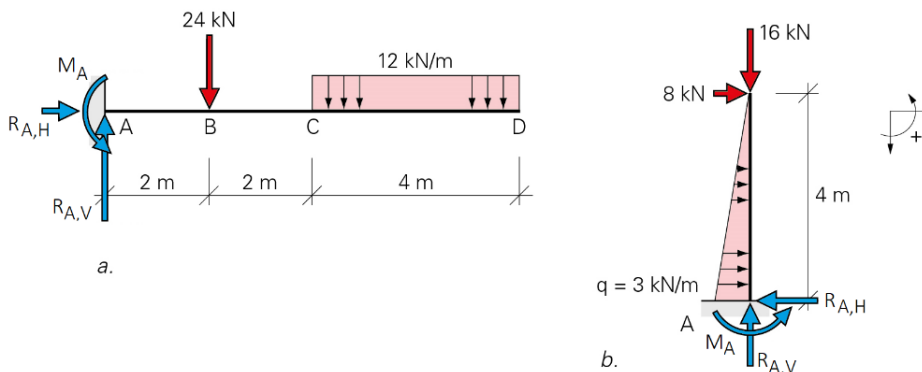
b. Herkennen van koppels

Het momentevenwicht is ook herkenbaar als twee koppels: een rechtsom draaiend koppel maakt evenwicht met een linksom draaiend koppel. Dit geeft voor:

- ligger b: $16 \cdot 2 = 8 \cdot 4 \text{ kNm}$
- ligger c: $16 \cdot 4 = 16 \cdot 4 \text{ kNm}$
- ligger d: $16 \cdot 2 = 8 \cdot 4 \text{ kNm}$ met een resultante $2,83 \cdot 4 \sqrt{2} = 16 \text{ kN}$, op een afstand van 2 m vanaf oplegging A.

5

Eénzijdig ingeklemde ligger en éénzijdig ingeklemde kolom



Ligger a

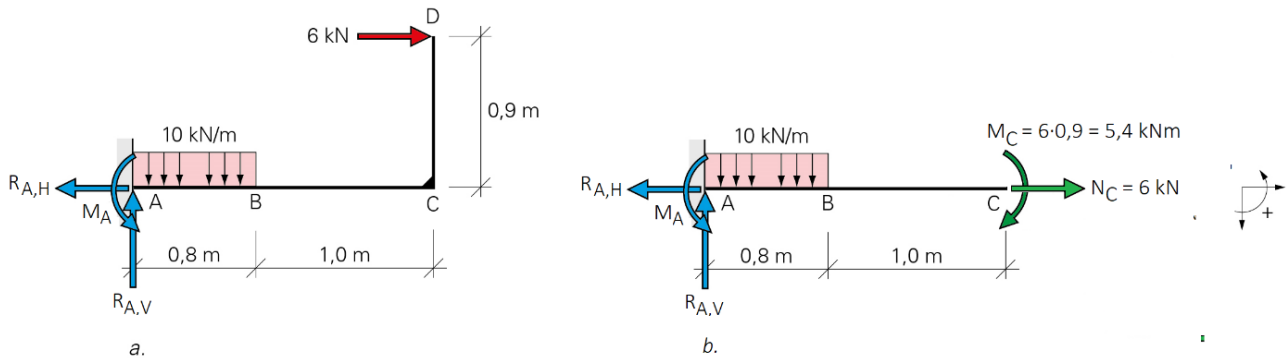
$$\begin{aligned}\Sigma H = 0 &\Rightarrow R_{A,H} = 0 \text{ kN} \\ \Sigma M_{\text{om } A} = 0 &\Rightarrow +M_A - 24 \cdot 2 - (12 \cdot 4) \cdot 6 = 0 \Rightarrow M_A = +336 \text{ kN} \curvearrowright \\ \Sigma V = 0 &\Rightarrow -R_{A,V} + 24 + 12 \cdot 4 = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +72 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

Kolom b

$$\begin{aligned}\Sigma H = 0 &\Rightarrow -R_{A,H} + (3 \cdot 4)/2 + 8 = 0 \Rightarrow R_{A,H} = +14 \text{ kN} \leftarrow \\ \Sigma M_{\text{om } A} = 0 &\Rightarrow +M_A - [(3 \cdot 4)/2] \cdot [(1/3) \cdot 4] - 8 \cdot 4 = 0 \Rightarrow M_A = +40 \text{ kN} \curvearrowright \\ \Sigma V = 0 &\Rightarrow -R_{A,V} + 16 = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +16 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

6

Eénzijdig ingeklemd geknikte ligger van een balkon



a. Oplegreacties (afb. a)

$$\begin{aligned}\Sigma H = 0 &\Rightarrow -R_{A,H} + 6 = 0 &\Rightarrow R_{A,H} = +6 \text{ kN} \leftarrow \\ \Sigma M_{\text{om } A} = 0 &\Rightarrow +M_A - (10 \cdot 0,8) \cdot 0,4 - 6 \cdot 0,9 = 0 &\Rightarrow M_A = +8,6 \text{ kNm} \curvearrowleft \\ \Sigma V = 0 &\Rightarrow -R_{A,V} + (10 \cdot 0,8) = 0 &\Rightarrow R_{A,V} = +8 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

b. Oplegreacties (afb. b)

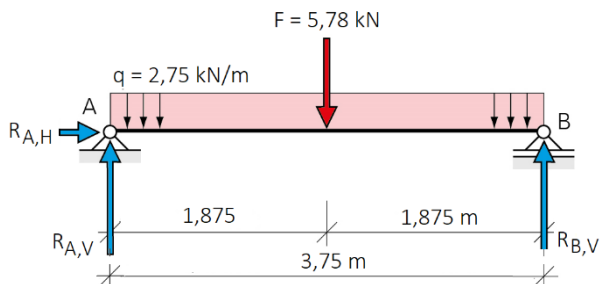
In staaf AC werken in snede C: een moment $M_C = 6 \cdot 0,9 = 5,4 \text{ kNm}$ en een normaaltrekkkracht $N_C = 6 \text{ kN}$.

$$\begin{aligned}\Sigma H = 0 &\Rightarrow -R_{A,H} + 6 = 0 &\Rightarrow R_{A,H} = +6 \text{ kN} \leftarrow \\ \Sigma M_{\text{om } A} = 0 &\Rightarrow +M_A - (10 \cdot 0,8) \cdot 0,4 - 5,4 = 0 &\Rightarrow M_A = +8,6 \text{ kNm} \curvearrowleft \\ \Sigma V = 0 &\Rightarrow -R_{A,V} + (10 \cdot 0,8) = 0 &\Rightarrow R_{A,V} = +8 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

7

Stalen latei HEA 140 boven de entree van twee woningen

a. schema



$$\begin{aligned}q &= q_1 + q_2 = 2,48 + 0,27 = 2,75 \text{ kN/m} \\ F &= F_1 + F_2 = (2,46 + 3,52) \cdot \cos 15 = 5,78 \text{ kN}\end{aligned}$$

b. oplegreacties

$$\begin{aligned}\Sigma H = 0 &\quad R_{A,H} = 0 \text{ kN} \\ \text{Vanwege symmetrie:} &\quad R_{A,V} = R_{B,V} = 2,75 \cdot 3,75 / 2 + 5,78 / 2 = 8,05 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

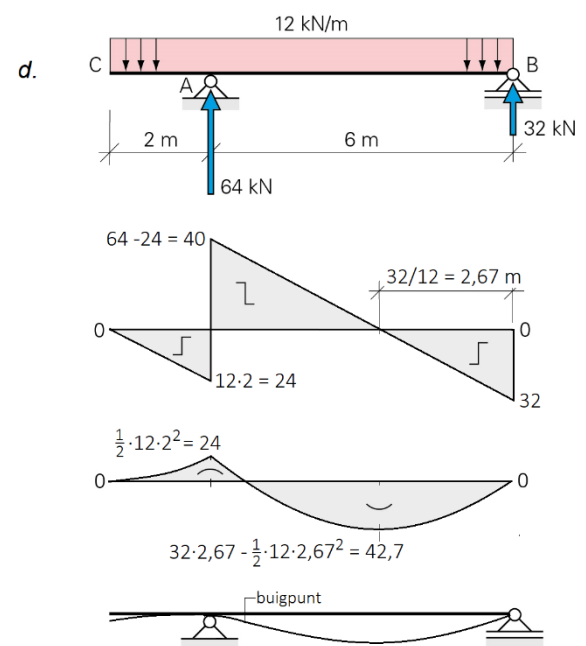
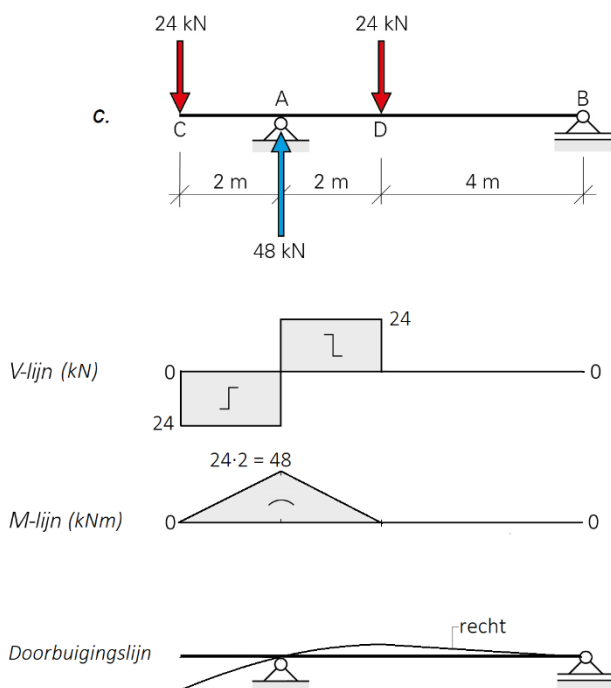
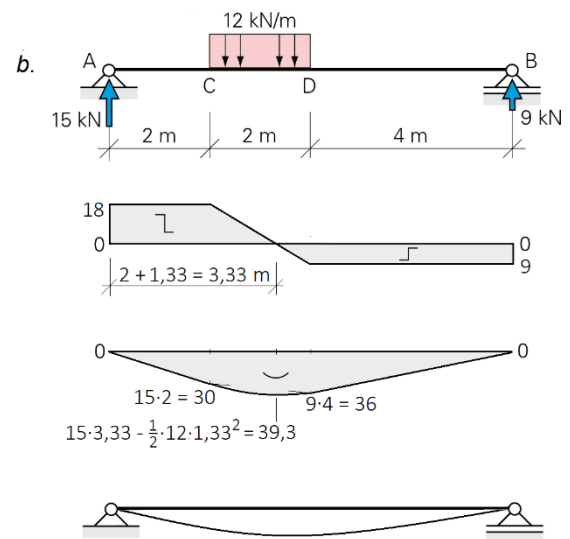
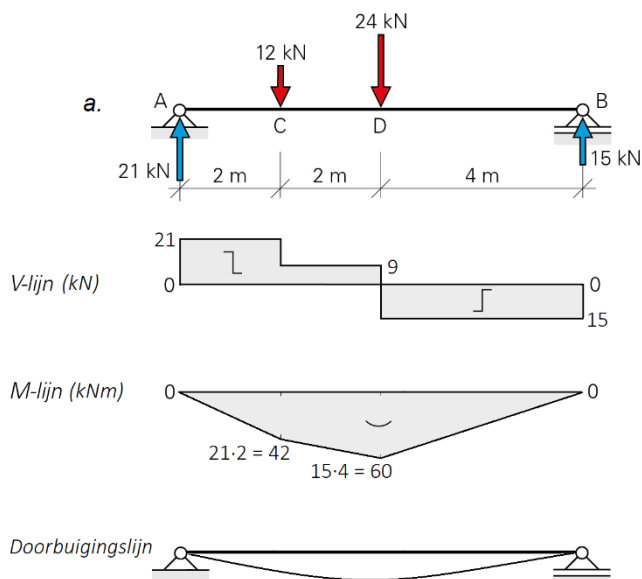
1 N-, V-, M- en doorbuigingslijn van liggers en een kolom

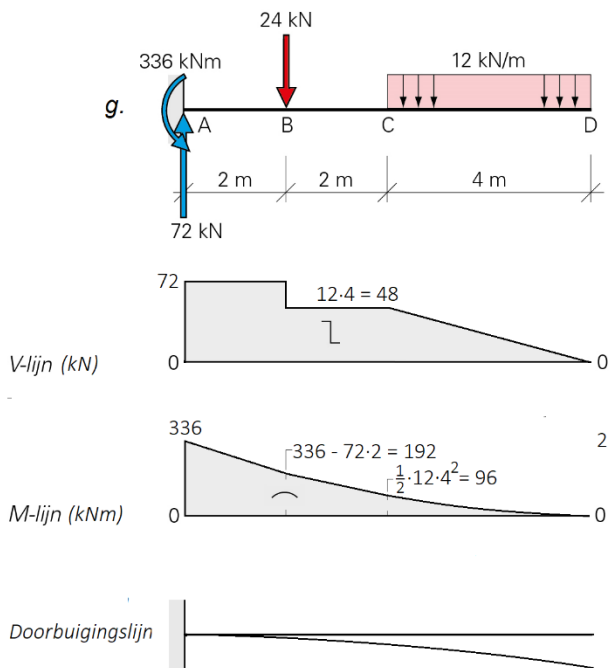
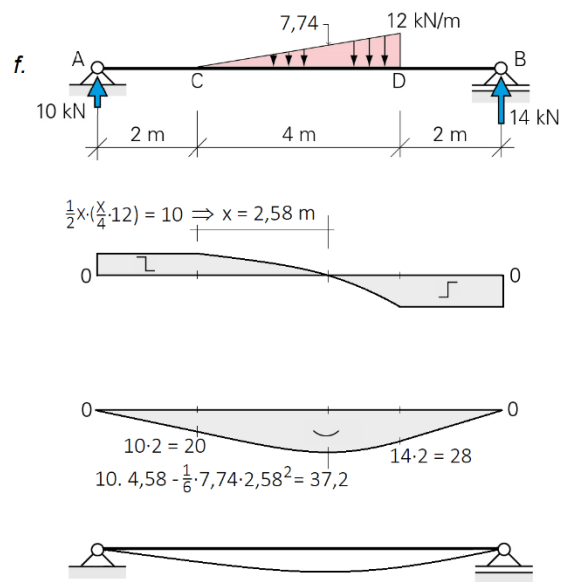
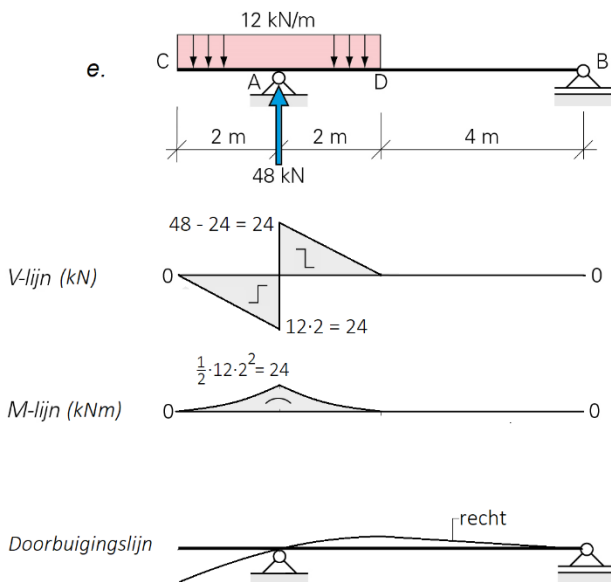
a. Controle van de oplegreacties

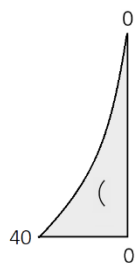
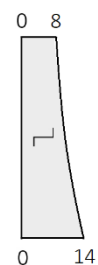
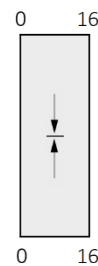
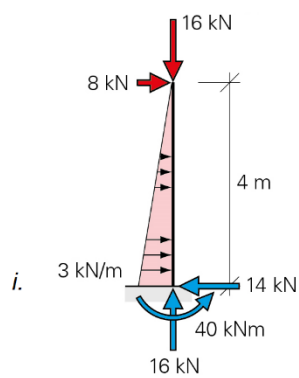
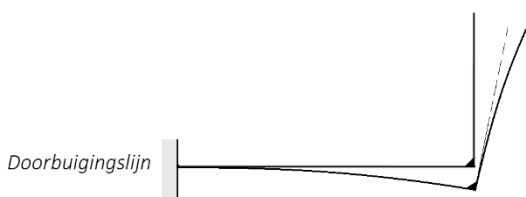
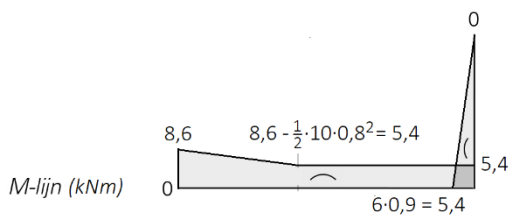
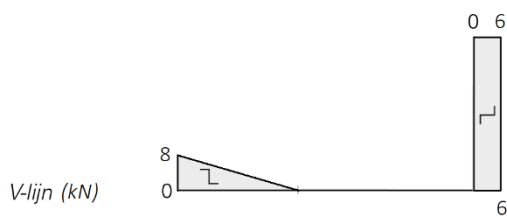
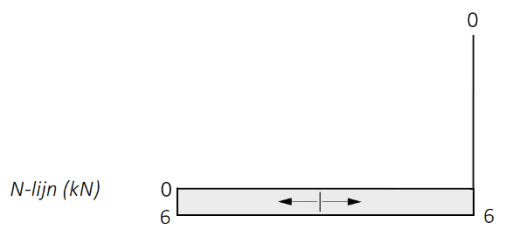
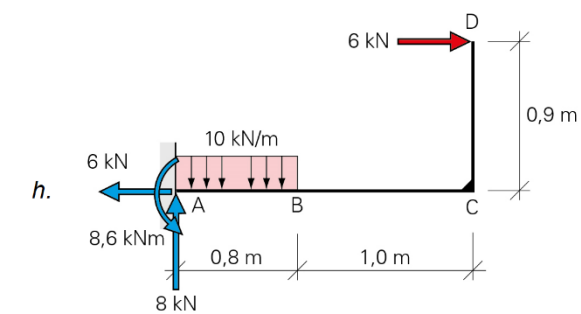
Zie de uitwerkingen van hoofdstuk 3 (paragraaf 3.6)

b. Zie c.

c. V-, M- en doorbuigingslijn en -indien van toepassing- de N-lijn





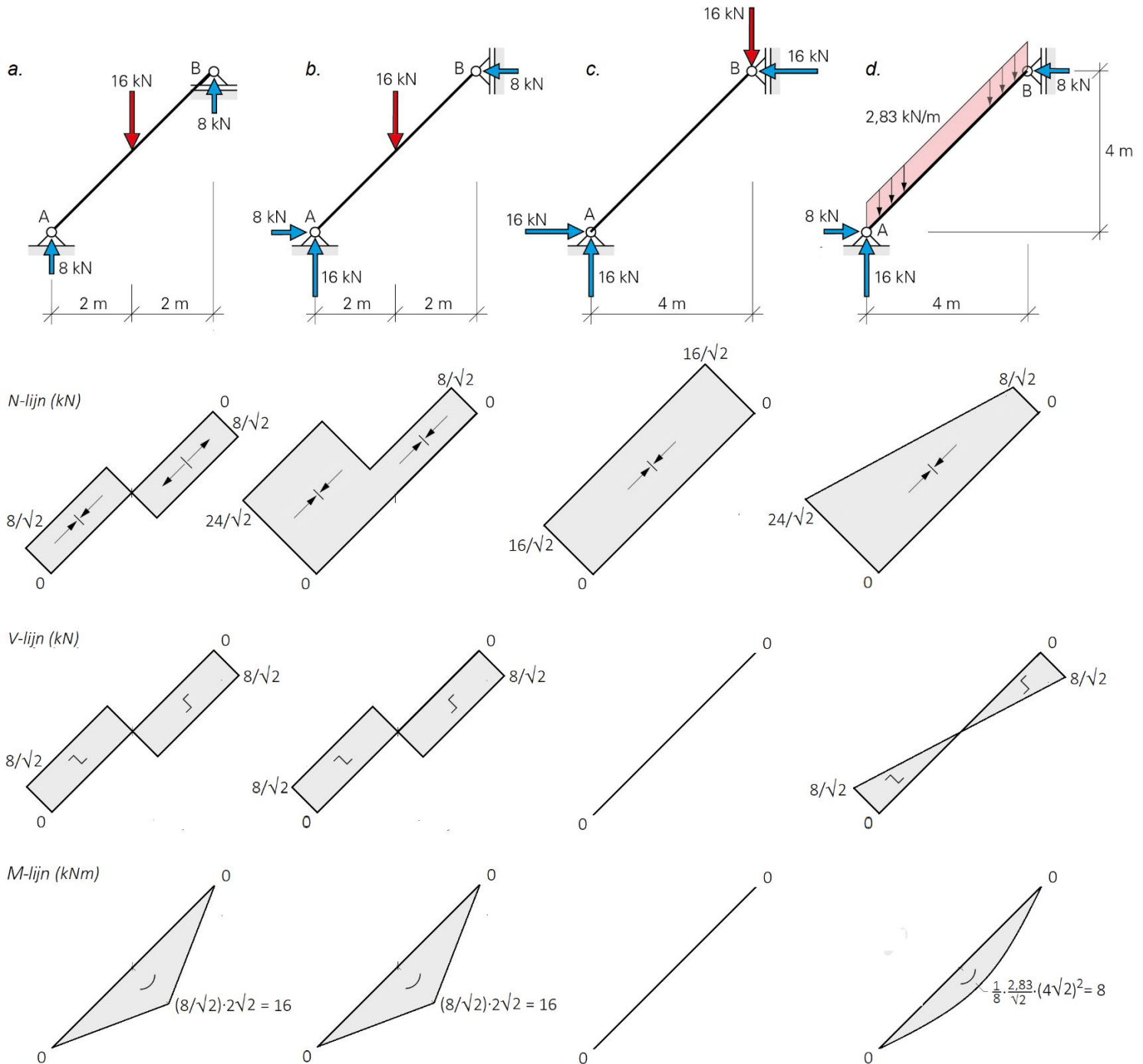


a. Controle van de oplegreacties

Zie de uitwerkingen van hoofdstuk 3 (paragraaf 3.6)

b. Zie c.

c. N-, V-, M-lijn



3 Ligger op twee steunpunten

a. Controle van de oplegreacties

Zie de uitwerkingen van hoofdstuk 3 (paragraaf 3.6)

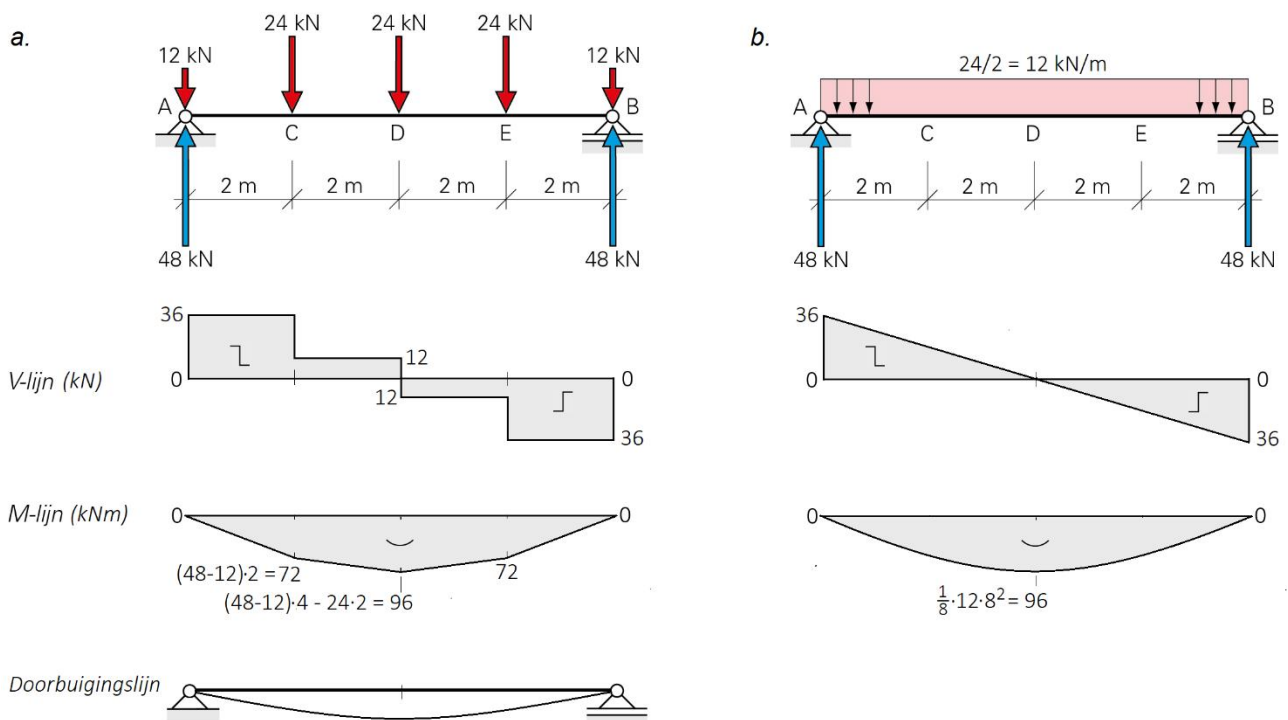
b. Zie c

c. V-, M-, en doorbuigingslijn (afb. a)

d. V- en M-lijn in geval van lijnlast (afb. b)

Dezelfde maximale dwarskracht (logisch toch?) maar ook hetzelfde maximale moment.

Conclusie: schematiseer een constructie met puntlasten in zo'n geval als lijnlast, dat rekt sneller.



a. Controle van de oplegreacties

Zie de uitwerkingen van hoofdstuk 3 (paragraaf 3.6)

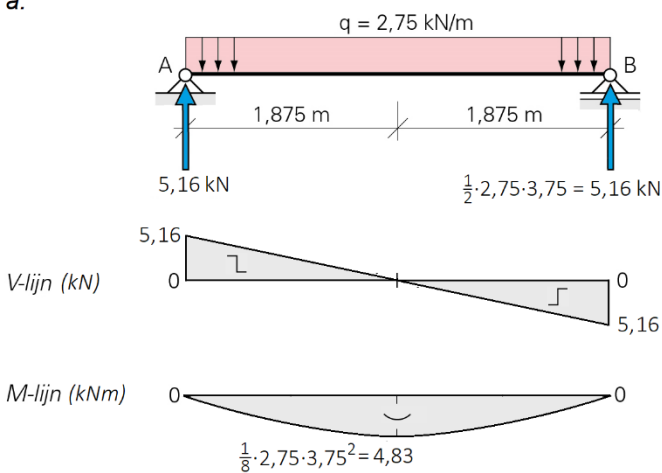
b. Zie c.

c. V- en M-lijn ten gevolge van de lijnlast (afb. a)

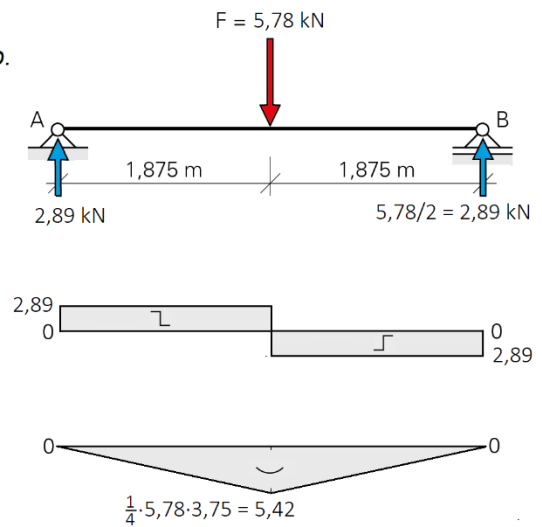
d. V- en M-lijn ten gevolge van de puntlast (afb. b)

e. Superpositie van beide V- en M-lijnen (afb. c)

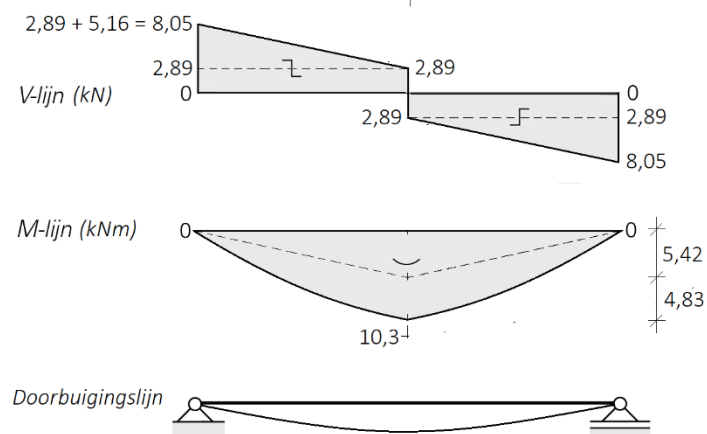
a.



b.



c. Superpositie



Scharnierliggers en driescharnierspanten

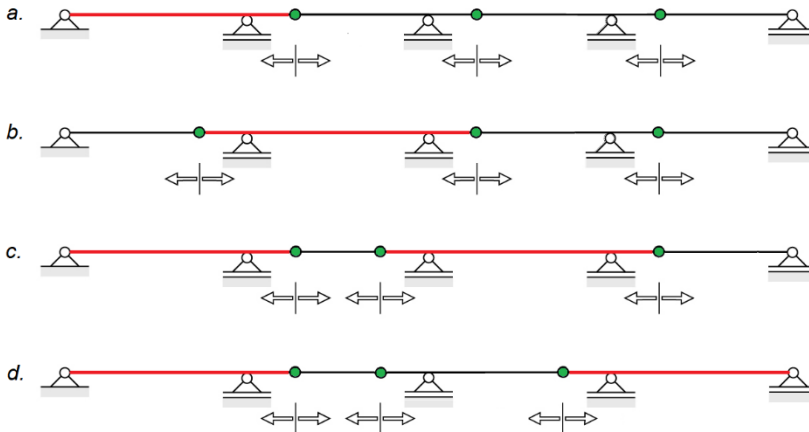
5.4 Oefenopgaven

1 Scharnierplaatsing in een viervelds-scharnierligger

Bij vier velden zijn drie inwendige scharnieren vereist.

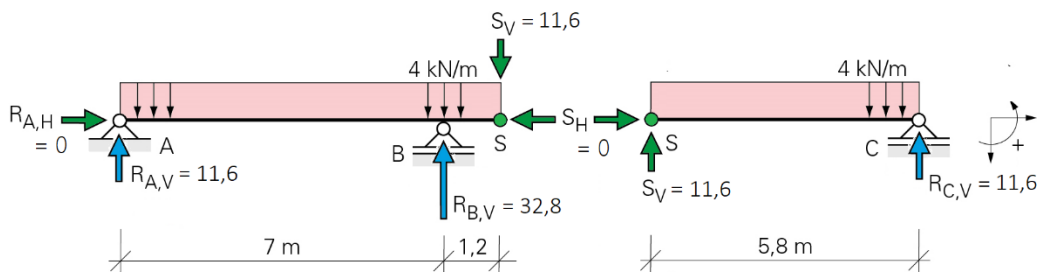
Er zijn vier verschillende oplossingen mogelijk: twee oplossingen waarbij één liggerdeel star is ondersteund (a en b) en twee oplossingen waarbij twee liggerdelen star zijn ondersteund (c en d).

Het spiegelbeeld geeft hetzelfde resultaat.



2 Tweevelds-scharnierligger belast door een lijnlast

a. Oplegreacties en scharnierkrachten



$$\Sigma H = 0 \Rightarrow S_H = R_{A,H} = 0 \text{ kN} \quad (\text{er is geen uitwendige horizontale belasting aanwezig})$$

Het evenwicht van het liggerdeel met een zwevende ondersteuning wordt het eerst beoordeeld.

Evenwicht liggerdeel SC

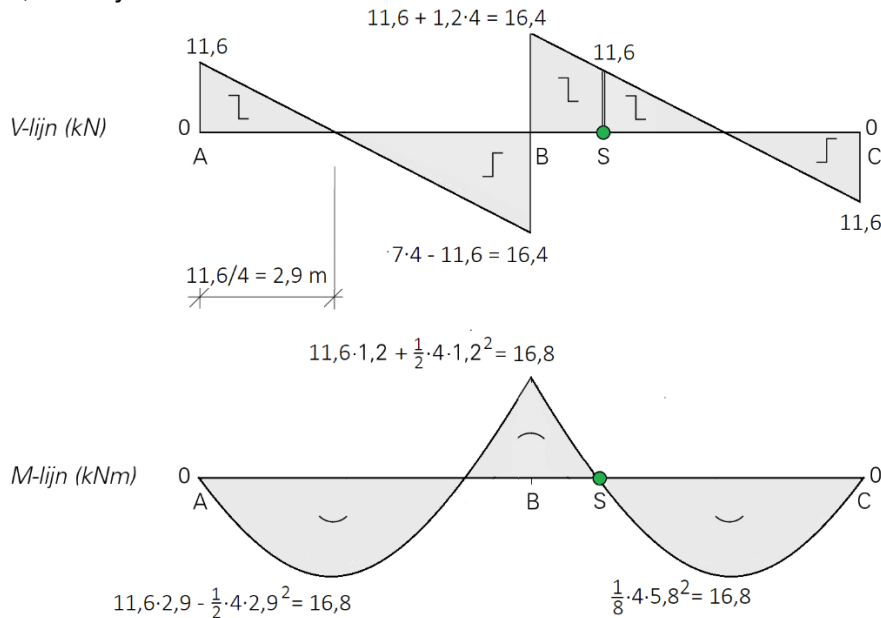
$$\Sigma V = 0 \Rightarrow S_V = R_{C,V} = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot 5,8) = 11,6 \text{ kN} \uparrow$$

Evenwicht liggerdeel AS

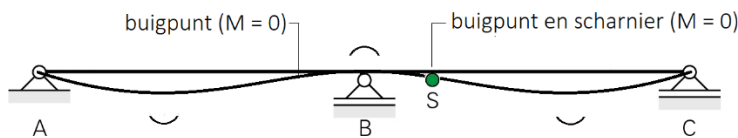
$$\Sigma M_{om A} = 0 \Rightarrow -(4 \cdot 8,2) \cdot \frac{8,2}{2} + R_{B,V} \cdot 7 - 11,6 \cdot 8,2 = 0 \Rightarrow 7R_{B,V} = +230 \Rightarrow R_{B,V} = +32,8 \text{ kN} \uparrow$$

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow -R_{A,V} + 4 \cdot 8,2 - 32,8 + 11,6 = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +11,6 \text{ kN} \uparrow$$

b. V-, en M-lijn



c. Kwalitatief verloop van de doorbuigingslijn



d. Grootte van de steunpunts- en veldmomenten

De veldmomenten links en rechts zijn even groot. Dat is altijd zo in geval van een tweeveldsscharnierligger met gelijke overspanningen en een even grote gelijkmatig verdeelde q-last op beide velden (ongeacht de ligging van het scharnier).

De ligging van het scharnier op $(1,2\text{m}/7\text{m})L = 0,171L$ vanaf het tussensteunpunt geeft een veld- en een steunpuntsmoment die even groot zijn.

e. Momenten in geval het inwendig scharnier geplaatst is in B

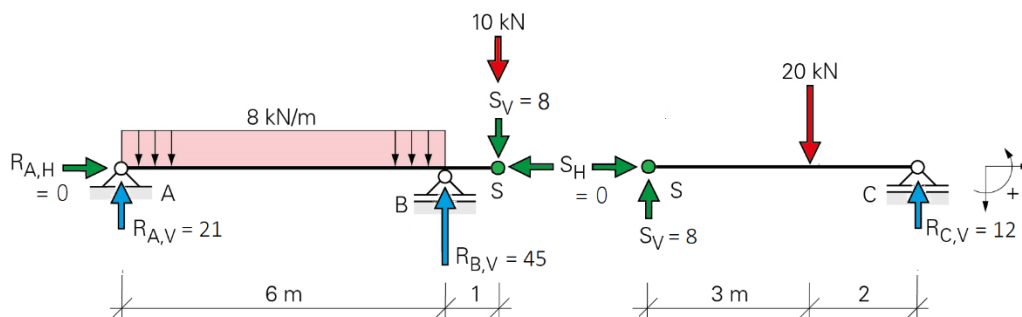
Als het inwendig scharnier geplaatst is in B, is het steunpuntsmoment $M_B = 0$.

Het veldmoment links en rechts is ook nu even groot: $M_{A-B} = M_{B-C} = \frac{1}{8} \cdot 4 \cdot 7^2 = 24,5 \text{ kNm}$.

Dit moment is $24,5/16,8 = 1,46$ x groter dan het moment in de ligger van vraag b.

3 Tweevelds-scharnierligger belast door een lijnlast en twee puntlasten

a. Oplegreacties en scharnierkrachten



$$\Sigma H = 0 \Rightarrow S_H = R_{A,H} = 0 \text{ kN (er is geen uitwendige horizontale belasting aanwezig)}$$

Het evenwicht van het liggerdeel met een zwevende ondersteuning wordt het eerst beoordeeld.
 Advies: plaats de scharnierkracht van 10 kN in S op het star ondersteunde liggerdeel omdat deze kracht uiteindelijk toch wordt afgedragen op het liggerdeel met vaste ondersteuning.

Evenwicht liggerdeel SC

$$\Sigma M_{om S} = 0 \Rightarrow -20 \cdot 3 + R_{CV} \cdot 5 = 0 \Rightarrow 5R_{CV} = +60 \Rightarrow R_{CV} = +12 \text{ kN} \uparrow$$

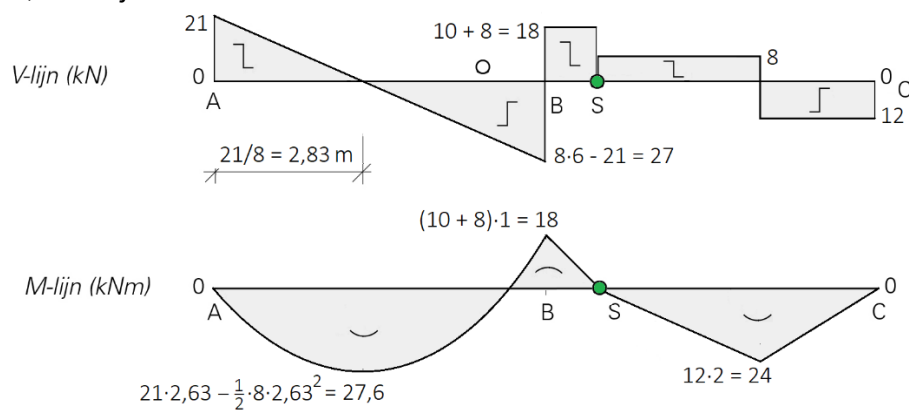
$$\Sigma V = 0 \Rightarrow -S_V + 20 - 12 = 0 \Rightarrow S_V = +8 \text{ kN} \uparrow$$

Evenwicht liggerdeel AS

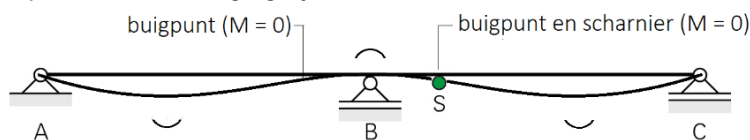
$$\Sigma M_{om A} = 0 \Rightarrow -(8 \cdot 6) \cdot \frac{6}{2} + R_{BV} \cdot 6 - (10 + 8) \cdot 7 = 0 \Rightarrow 6R_{BV} = +270 \Rightarrow R_{BV} = +45 \text{ kN} \uparrow$$

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow -R_{A,V} + 8 \cdot 6 - 45 + (10 + 8) = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +21 \text{ kN} \uparrow$$

b. V-, en M-lijn

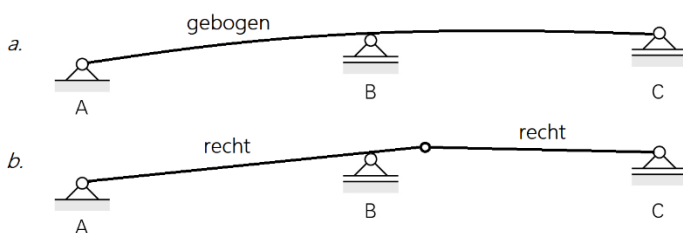


c. Kwalitatief verloop van de doorbuigingslijn

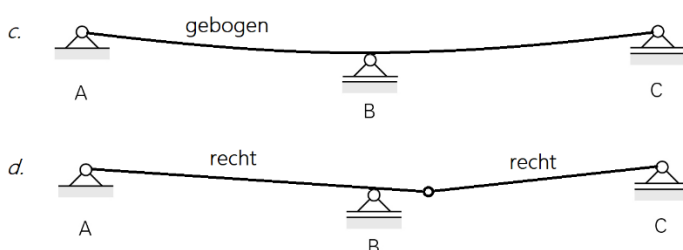


4 Steunpuntzakking

a. Doorbuigingslijn na steunpuntzakking van oplegging A



b. Doorbuigingslijn na steunpuntzakking van oplegging B

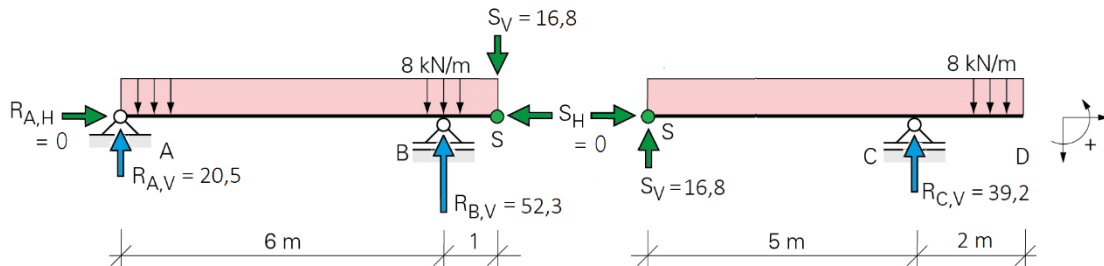


c. Gevolgen steunpuntzakking

In een statisch onbepaalde ligger (afb. a en c) treden door steunpuntzakking altijd inwendige krachten op (buigende momenten en dwarskrachten), in een (statisch bepaalde) scharnierligger niet (afb. b en d).

5 Tweevelds-scharnierligger met een overstek belast door een lijnlast

a. Oplegreacties en scharnierkrachten

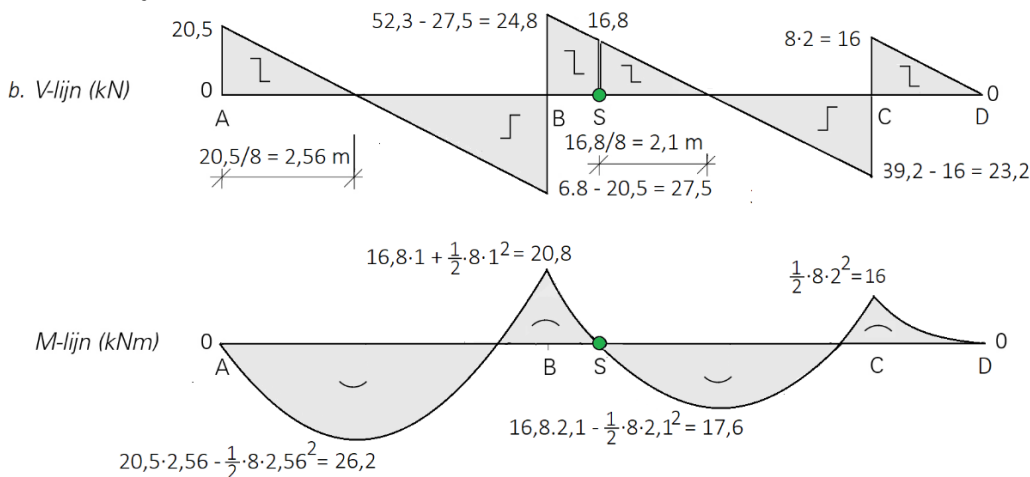


$$\Sigma H = 0 \Rightarrow S_H = R_{A,H} = 0 \text{ kN (er is geen uitwendige horizontale belasting aanwezig)}$$

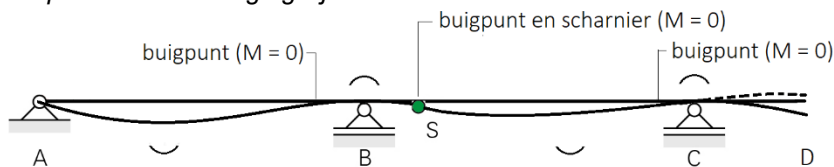
$$\begin{aligned} \text{Uit het evenwicht van liggerdeel SD volgt:} \quad & \Sigma M_{\text{om } S} = 0 \Rightarrow R_{C,V} = 39,2 \text{ kN } \uparrow \\ & \Sigma V = 0 \Rightarrow S_V = 16,8 \text{ kN } \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Uit het evenwicht van liggerdeel AS volgt:} \quad & \Sigma M_{\text{om } A} = 0 \Rightarrow R_{B,V} = 52,3 \text{ kN } \uparrow \\ & \Sigma V = 0 \Rightarrow R_{A,V} = 20,5 \text{ kN } \uparrow \end{aligned}$$

b. V- en M-lijn



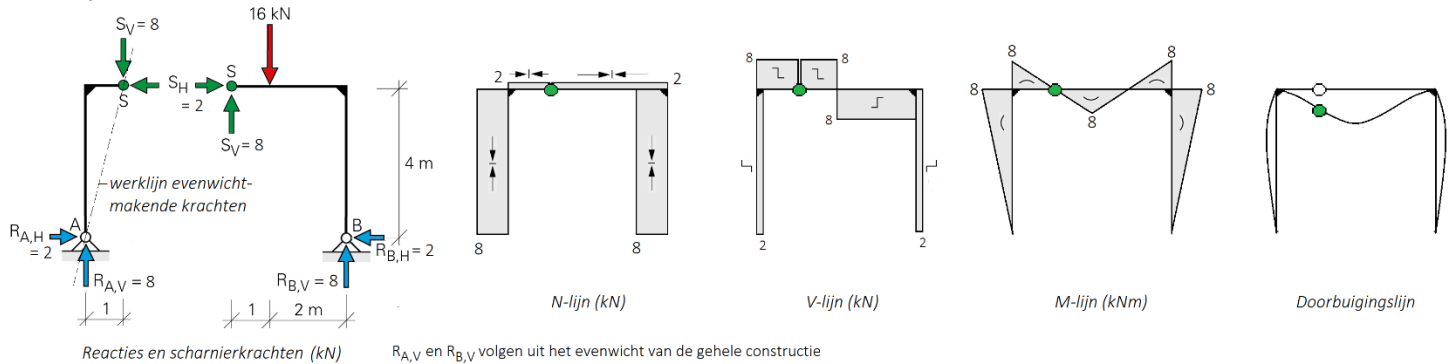
c. Kwalitatief verloop van de doorbuigingslijn



6 Driescharnier-portaalspanten

a t/m c: Oplegreacties en scharnierkrachten, N-, V- en M-lijn en doorbuigingslijn

portaal a

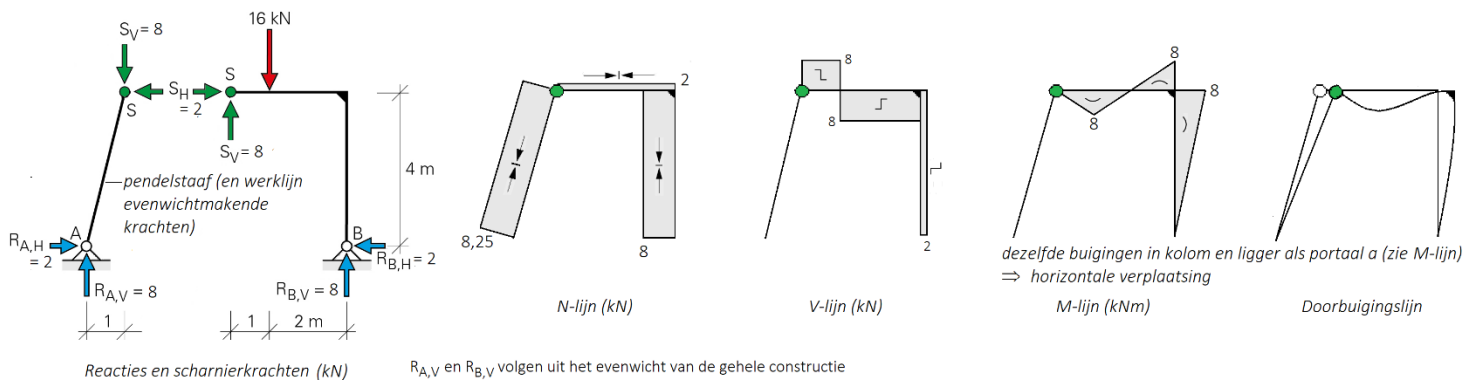


Uit het evenwicht van de hele constructie volgt: $\Sigma M_{om A} = 0 \Rightarrow R_{B,V} = 8 \text{ kN} \uparrow$
 $\Sigma V = 0 \Rightarrow R_{A,V} = 8 \text{ kN} \uparrow$

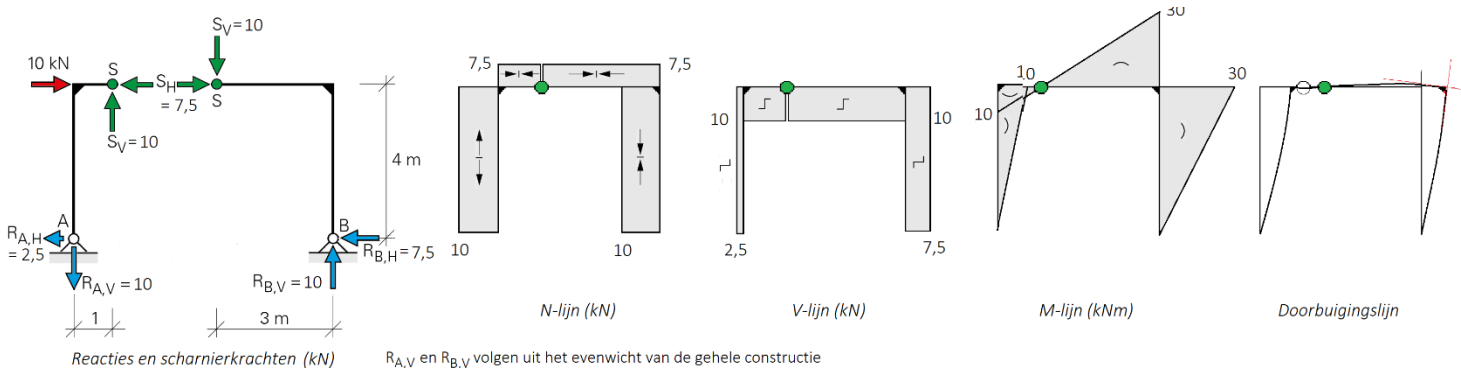
Uit het evenwicht van liggerdeel AS volgt: $\Sigma M_{om S} = 0 \Rightarrow R_{A,H} = 2 \text{ kN} \rightarrow$
 $\Sigma H = 0 \Rightarrow S_H = 2 \text{ kN} \leftarrow$
 $\Sigma V = 0 \Rightarrow S_V = 8 \text{ kN} \downarrow$

Uit het evenwicht van liggerdeel BS volgt: $S_H = 2 \text{ kN} \rightarrow$
 $S_V = 8 \text{ kN} \uparrow$

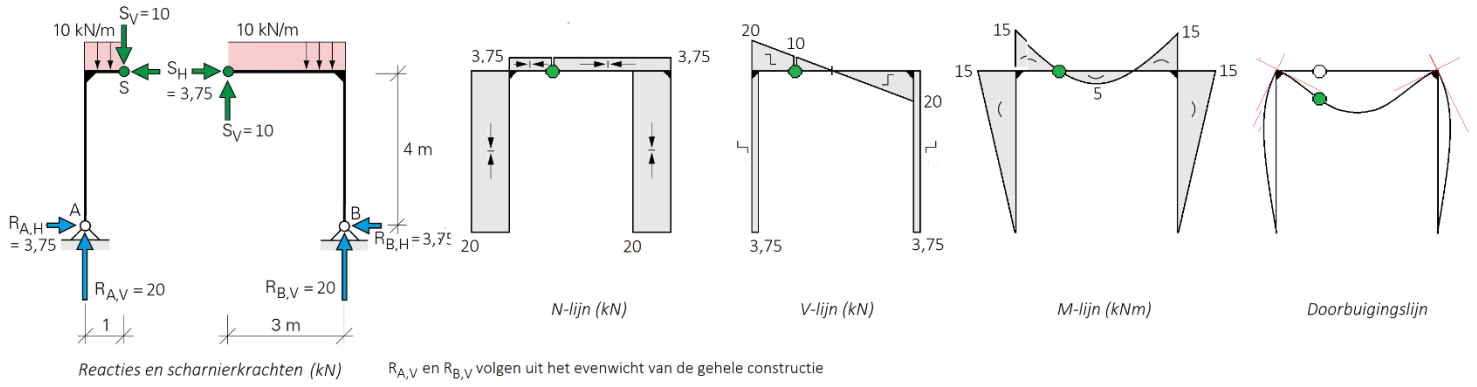
portaal b



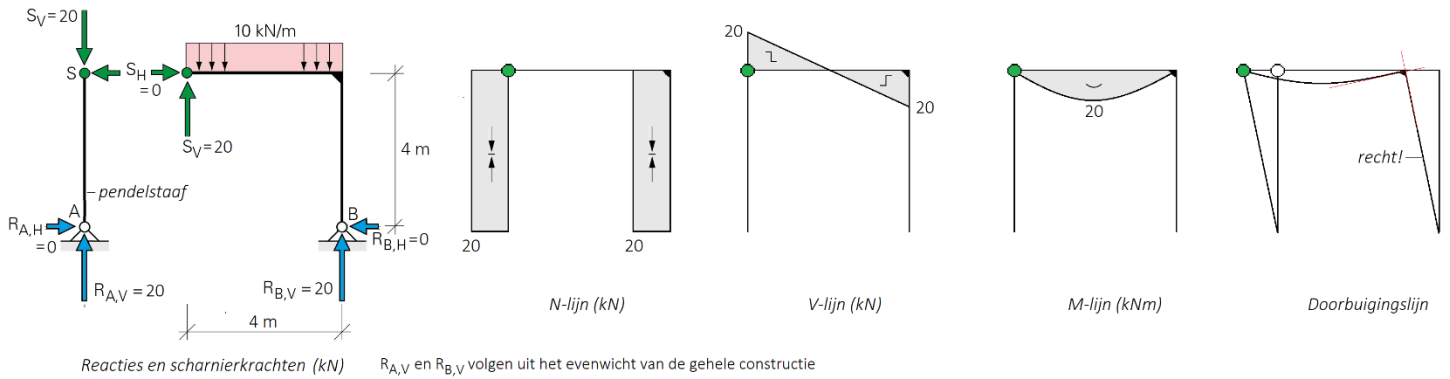
portaal c



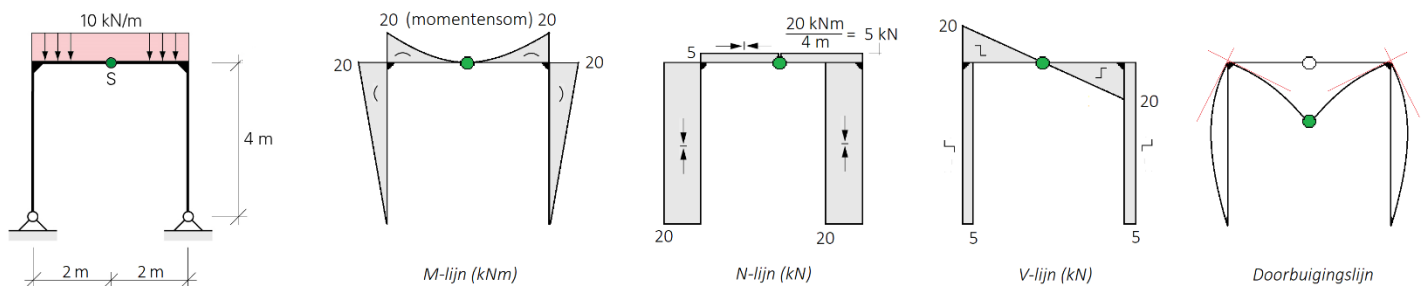
portaal d



portaal e



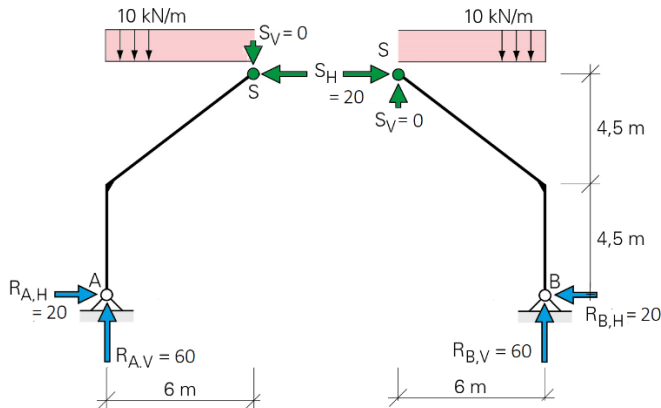
d. Portaal e, nu met het scharnier in het midden van de ligger



7

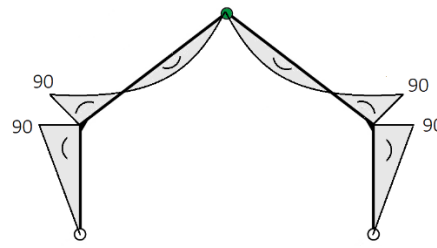
Kniespant belast door een gelijkmatig verdeelde belasting

a t/m c: Oplegreacties en scharnierkrachten, M-lijn en doorbuigingslijn

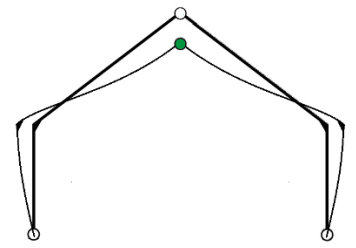


a. Reacties en scharnierkrachten (kN)

$R_{A,V}$ en $R_{B,V}$ volgen uit het evenwicht van de gehele constructie



b. M-lijn (kNm)

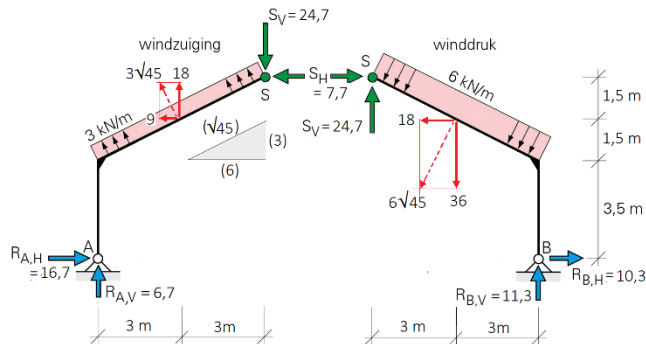


c. Doorbuigingslijn

8

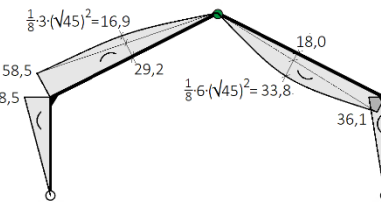
Kniespant opslagloods belast door winddruk en windzuiging

a t/m c: Oplegreacties en scharnierkrachten, M-lijn en doorbuigingslijn

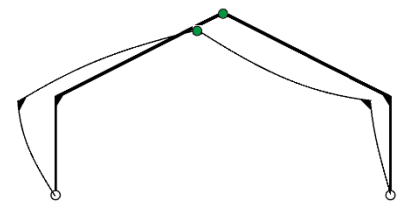


a. Reacties en scharnierkrachten (kN)

$R_{A,V}$ en $R_{B,V}$ volgen uit het evenwicht van de gehele constructie



b. M-lijn (kNm)

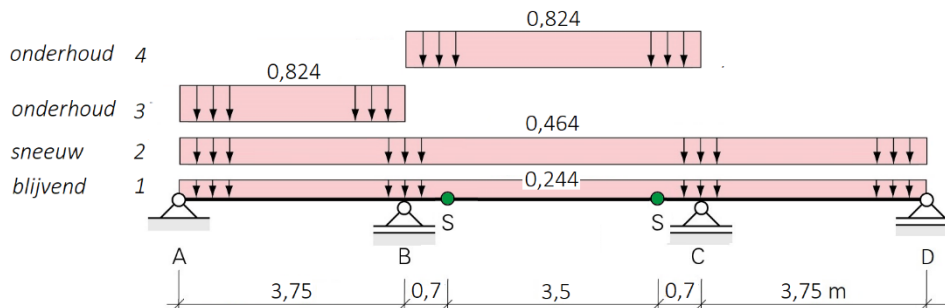


c. Doorbuigingslijn

9

Scharnierligger overkapping tankstation

a. Schema



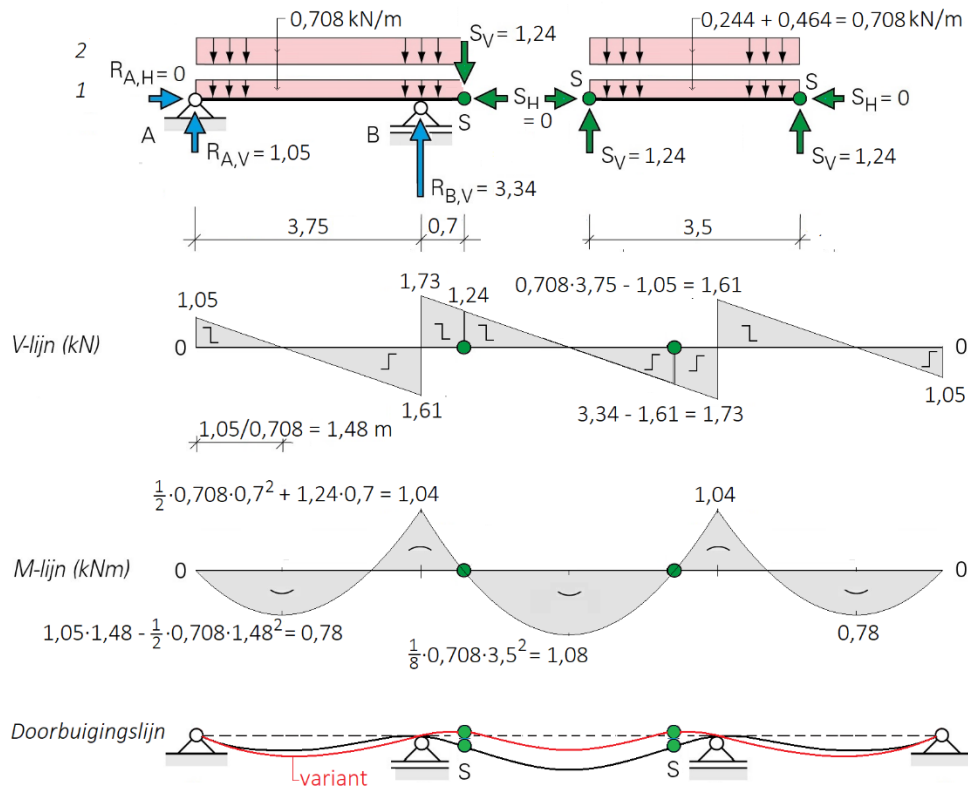
Belastingaanneمة

1	Blijvend	$0,61 \cdot 0,40 = 0,244$ kN/m
2	Sneeuw	$0,61 \cdot 0,76 = 0,464$ kN/m
3 en 4	Onderhoud	$0,61 \cdot 1,35 = 0,824$ kN/m

b. oplegreacties en scharnierkrachten, V- en M-lijn en doorbuigingslijn

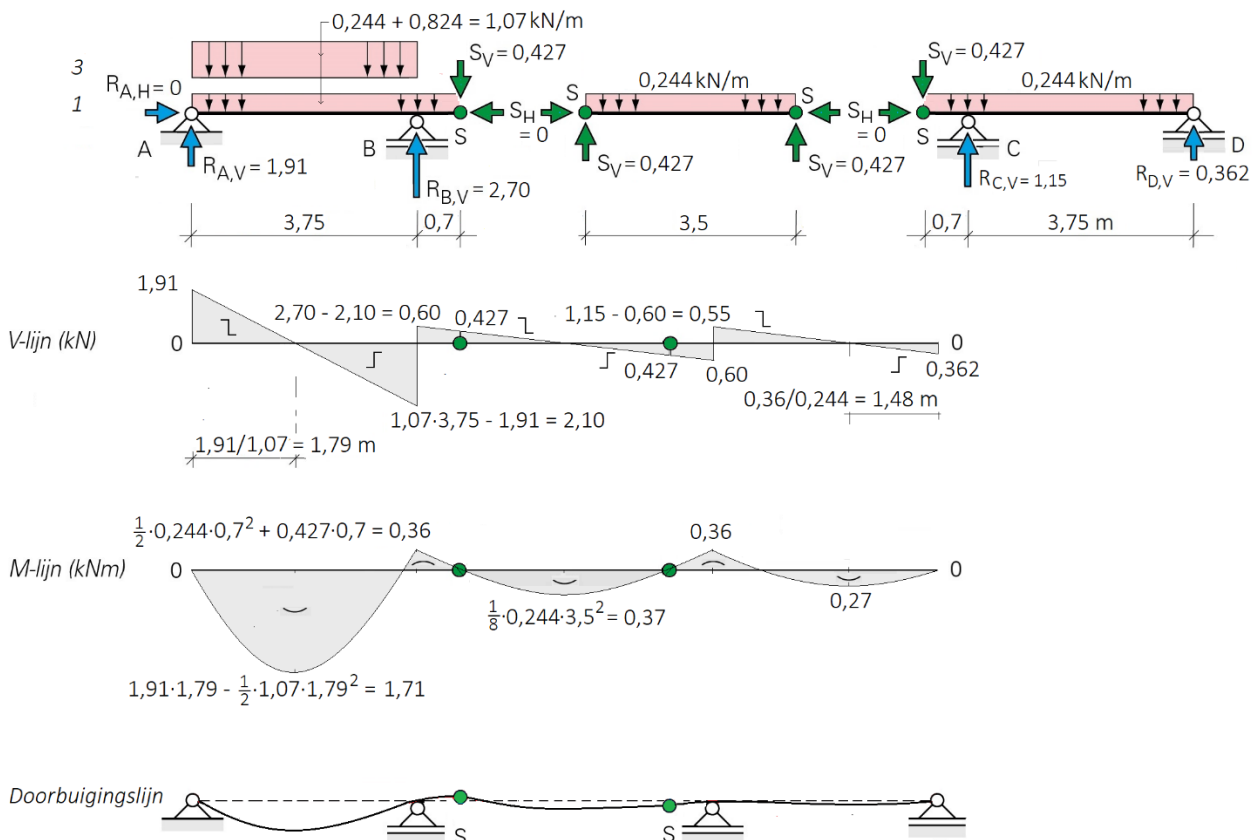
1. Belastingcombinatie 1 + 2: blijvend + sneeuw

Oplegreacties en scharnierkrachten (kN)



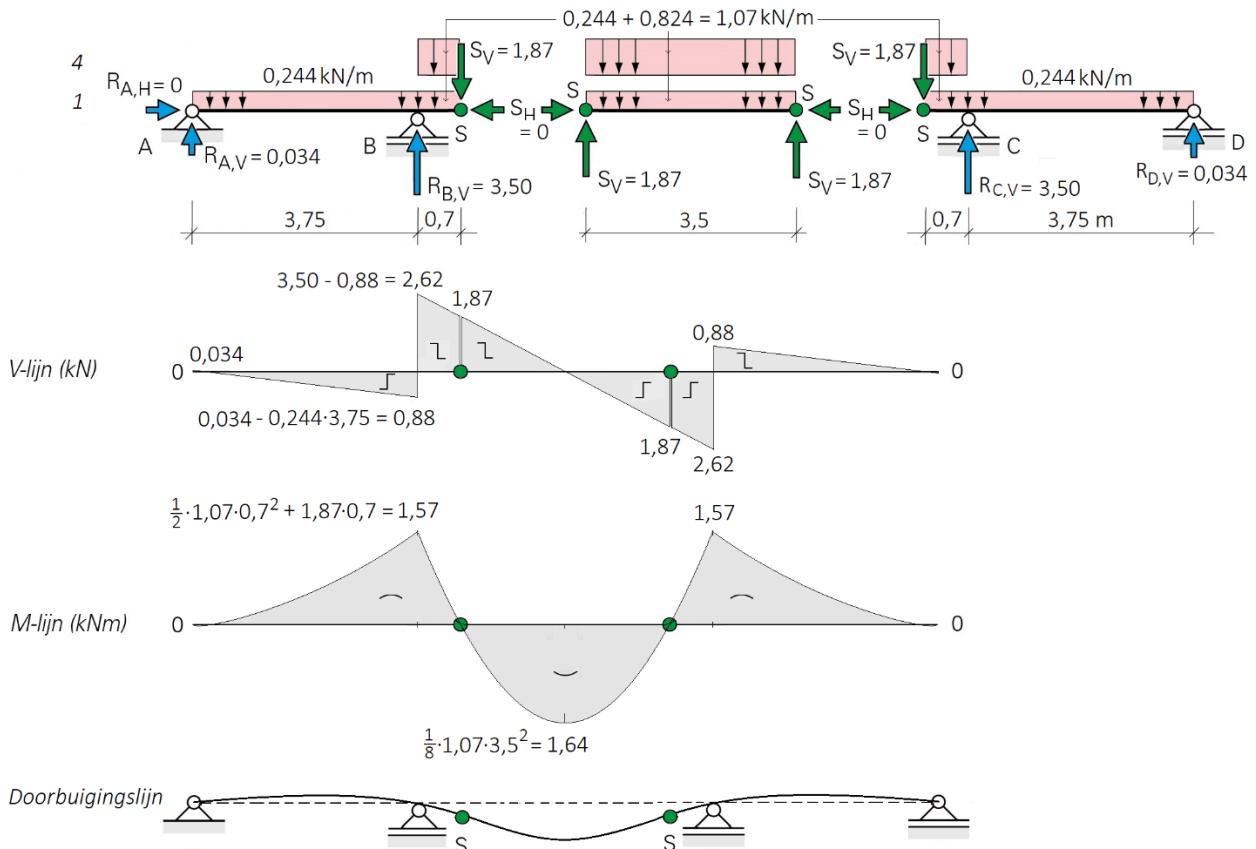
2. Belastingcombinatie 1 + 3: blijvend + onderhoud

Oplegreacties en scharnierkrachten (kN)



3. Belastingcombinatie 1 + 4: blijvend + onderhoud

Oplegreacties en scharnierkrachten (kN)



c. Conclusie plaats van de opleggingen (gelamineerde liggers) en plaats van de scharnieren

De belastingcombinaties blijvend + onderhoud 1+3 en 1+4 geven de grootste steunpunts- en veldmomenten. De momenten van deze belastingcombinaties liggen al redelijk dicht bij al elkaar, maar kan nét nog wat beter. Door een kleine verplaatsing van steunpunt B naar links wordt veldmoment M_{A-B} iets kleiner en het steunpuntsmoment M_B iets groter. De grootte van het veldmoment van 1,64 kNm van de ingehangen ligger wordt dan erg dicht benaderd.

d. Ontwerp scharnier en materiaalkosten

Balkdrager 59x156, verzinkt.
 Prijsindicatie: ongeveer 1,5 euro per stuk.
 Varianten hierop zijn mogelijk.

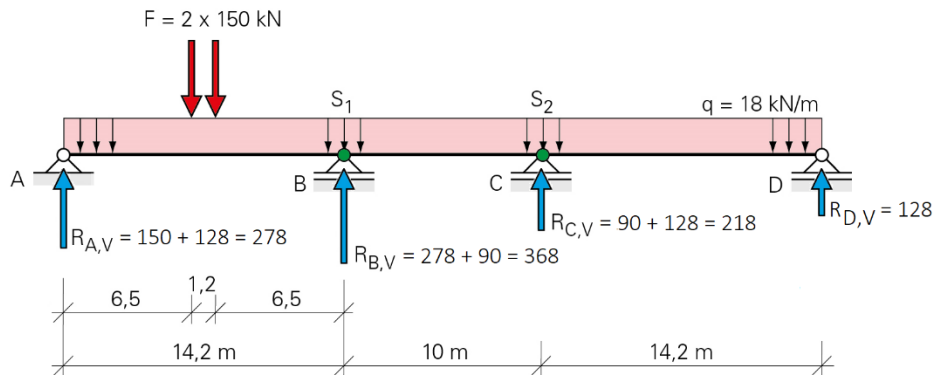


10 Scharnierligger viaduct

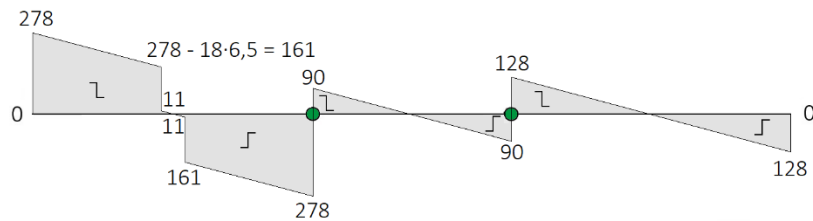
a en b: Oplegreacties en scharnierkrachten, V- en M-lijn

Variant a: drie enkelveldsliggers met scharnieren ter plaatse van de opleggingen

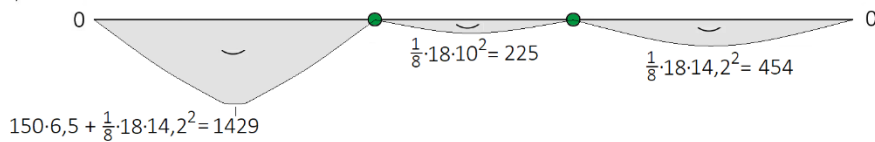
a. Reacties en scharnierkrachten (kN)



b. V-lijn (kN)

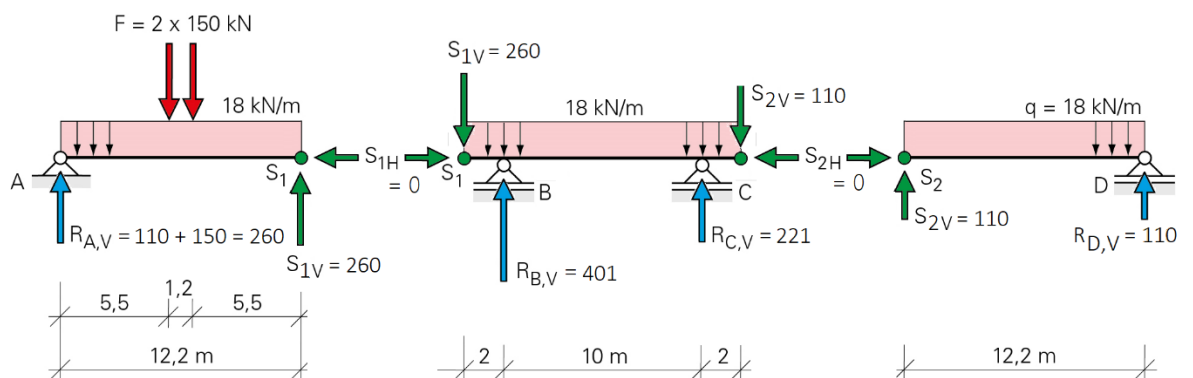


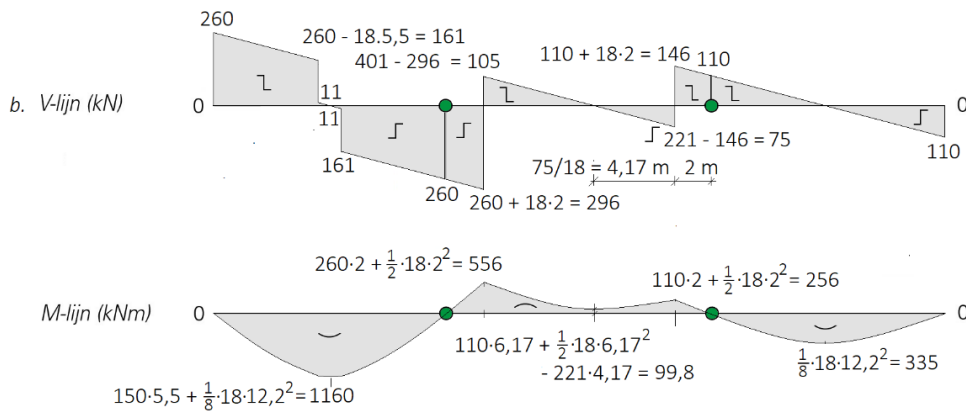
M-lijn (kNm)



Variant b: uitvoering als scharnierligger

a. Reacties en scharnierkrachten (kN)





c. Doorbuigingslijn van beide varianten



d. Verhouding van de maximale veldmomenten van beide varianten

Het veldmoment van de scharnierligger van variant b bedraagt $(1160/1429) \cdot 100 = 81\%$ van de enkelveldsligger van variant a.

e. Tandemstelsel van variant b boven scharnier S_1

- Gevolgen voor de veldmomenten:

Liggerdeel AS₁: $F = 150$ kN op een afstand van 0,6 m links van scharnier S_1 geeft een klein moment

Liggerdeel BC: hierin ontstaat een nog groter opbuigend veldmoment $\cap$

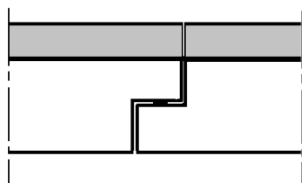
Liggerdeel S₂D: geen moment

- Steunpuntsmoment in B: $M_B = (2 \cdot 150) \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 2^2 = 636$ kNm $\cap$.

- Het tandemstelsel –met het zwaartepunt van de belasting in S_1 – geeft het grootst mogelijke steunpuntsmoment in B. Immers als het tandemstelsel vanaf oplegging A richting S_1 verplaatst zal de scharnierkracht in S_1 groter worden waardoor ook het steunpuntsmoment in B groter wordt. Als het tandemstelsel vanaf scharnier S_1 richting oplegging B verplaatst zal het steunpuntsmoment in B steeds kleiner worden.

e. Principe-oplossing van het scharnier

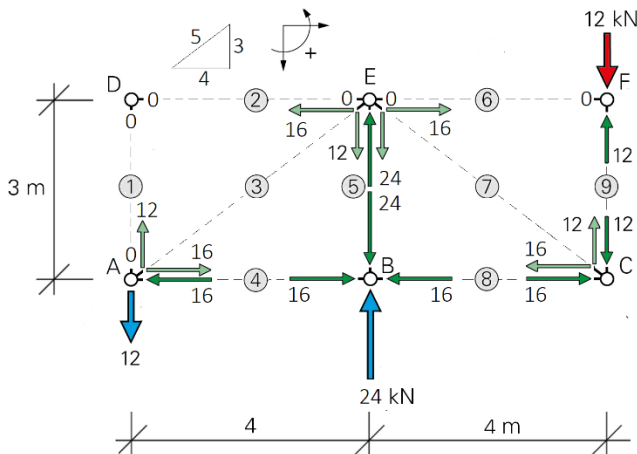
Tandoplegging scharnier S_1 (overeenkomstig boek, afbeelding 5.1)



1 Vakwerkconstructies met de knooppuntmethode

Vooraf is beoordeeld of een staaf op trek of op druk wordt belast, door de staaf door te snijden (variant: vanuit de V- en M-lijn). De nulstaven zijn herkend door de kenmerken van afbeelding 6.20 (zie boek). Vakwerk a is volledig uitgewerkt. De overige vakwerken zijn op dezelfde wijze berekend. Trekkrachten worden met een + teken aangegeven, drukkrachten met een – teken.

a.



Het vakwerk heeft twee niet functionele nulstaven 1 en 2 en een functionele nulstaaf 6.

Oplegreacties

$$\Sigma M_{\text{om A}} = 0 \Rightarrow R_{B,V} \cdot 4 - 12 \cdot 8 = 0 \Rightarrow R_{B,V} = +24 \text{ kN} \uparrow$$

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow R_{A,V} - 24 + 12 = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +12 \text{ kN} \downarrow$$

Knooppuntmethode

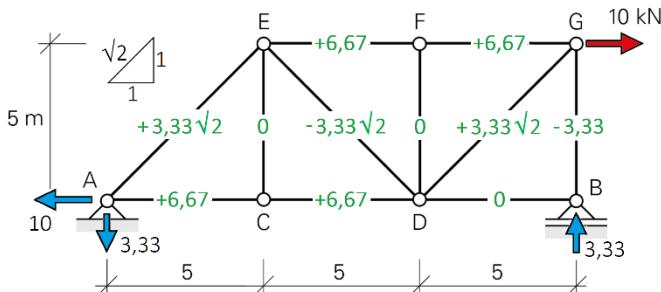
– volgorde knopen: D, A, B, E of C, F

– variant: F, C, B, E of A, D

Staafkrachten [kN]

1	0
2	0
3	+20
4	-16
5	-24
6	0
7	+20
8	-16
9	-12

b.



Het vakwerk heeft twee niet functionele nulstaven CE en DF en een functionele nulstaaf BD.

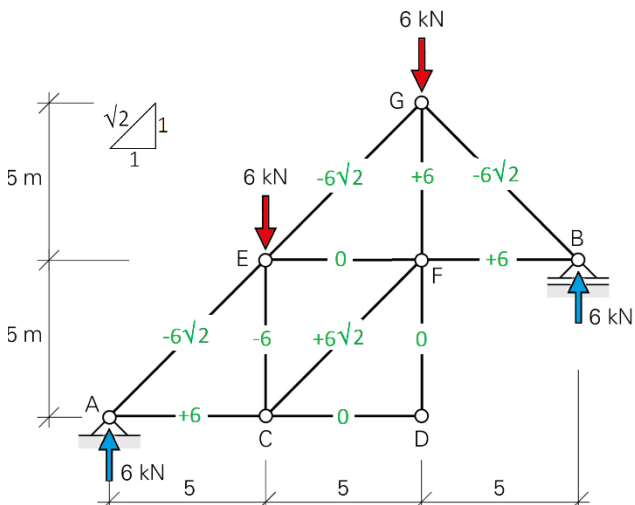
Eerst zijn de oplegreacties berekend.

Knooppuntmethode

– volgorde knopen: A, C, E, F, D, B, G

– variant: B, G, F, D, C, E, A

c.



Het vakwerk heeft twee niet functionele nulstaven CD en DF. In staaf EF is de kracht 'toevallig' 0, maar dat is vooraf niet te beoordelen.

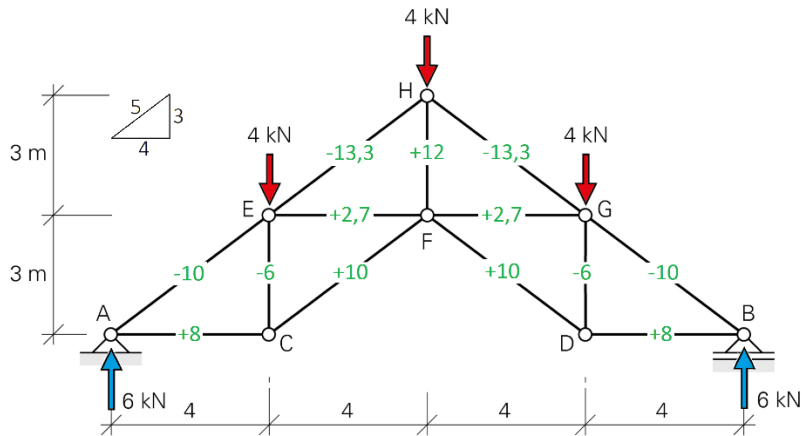
Eerst zijn de oplegreacties berekend.

Knooppuntmethode

– volgorde knopen: A, D, C, E, F of G, B

– variant: B, G, D, F, E of C, A

d.

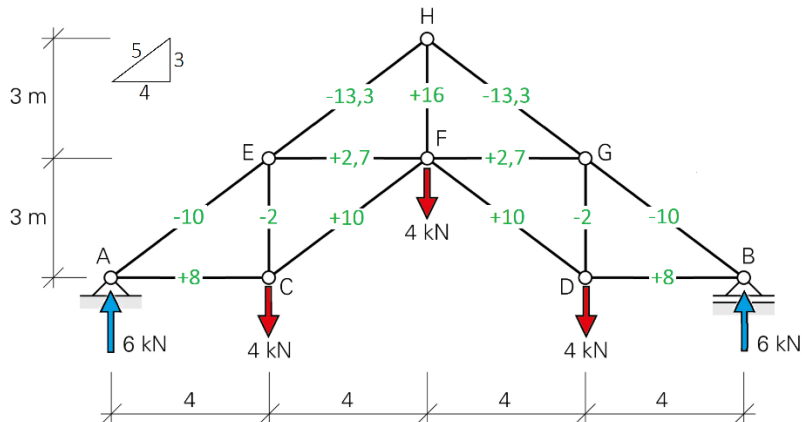


Er zijn geen nulstaven te herkennen.

Eerst zijn de oplegreacties berekend.

Volgorde knopen knooppuntmethode:
A, C, E, H of F (m.b.v. symmetrie)

e.



Er zijn geen nulstaven te herkennen.

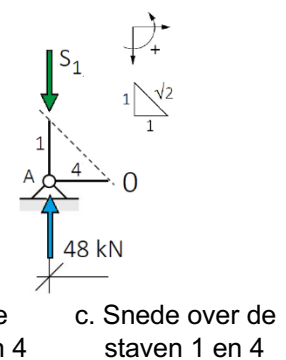
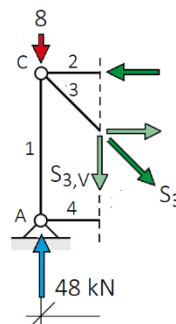
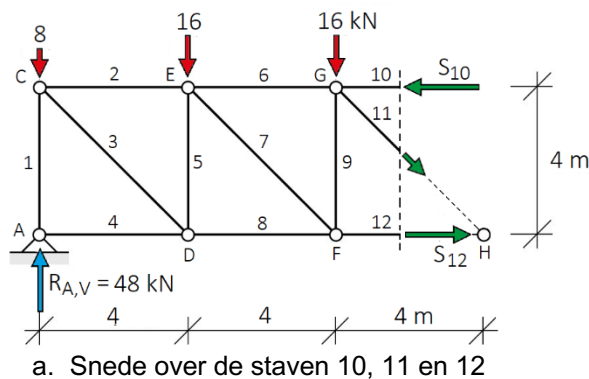
Eerst zijn de oplegreacties berekend.

Volgorde knopen knooppuntmethode:
A, C, E, H of F (m.b.v. symmetrie)

2 Vakwerkliggers met de snedemethode en V- en M-lijn

a. Staafkrachten met de snedemethode

Vakwerkligger a



Oplegreacties

$$\sum V = 0 \Rightarrow R_{A,V} = R_{B,V} = (5 \cdot 16 + 2 \cdot 8) / 2 = 48 \text{ kN} \uparrow$$

Grootste staafkrachten boven- en onderrand (afb. a)

$$\Sigma M_{\text{om H}} = 0 \Rightarrow -(48 - 8) \cdot 12 + 16 \cdot 8 + 16 \cdot 4 + S_{10} \cdot 4 = 0 \Rightarrow S_{10} = +72 \text{ kN (druk)}$$

$$\Sigma M_{\text{om G}} = 0 \Rightarrow -(48 - 8) \cdot 8 + 16 \cdot 8 + S_{12} \cdot 4 = 0 \Rightarrow S_{12} = +64 \text{ kN (trek)}$$

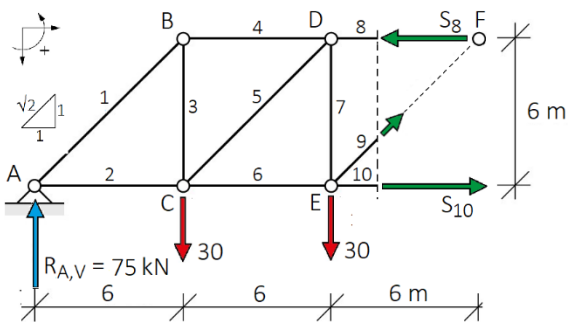
Grootste staafkracht diagonaal (afb. b)

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow -48 + 8 + S_{3,V} = 0 \Rightarrow S_{3,V} = +40 \text{ kN} \Rightarrow S_3 = 40\sqrt{2} \text{ kN (trek)}$$

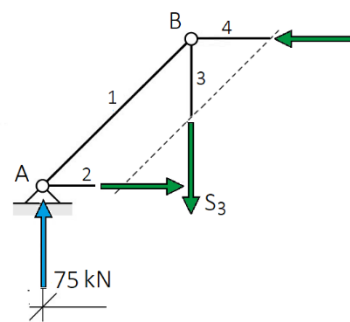
Grootste staafkracht verticaal

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow -48 + S_1 = 0 \Rightarrow S_1 = +48 \text{ kN (druk)}$$

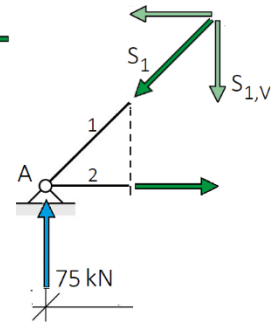
Vakwerkligger b



a. Grootste staafkrachten in boven- en onderrand



b. grootste staafkracht in de verticaal



c. Grootste staafkracht in de diagonaal

Oplegreacties

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow R_{A,V} = R_{B,V} = (5 \cdot 30) / 2 = 75 \text{ kN} \uparrow$$

Grootste staafkrachten boven- en onderrand (afb. a)

$$\Sigma M_{\text{om F}} = 0 \Rightarrow -75 \cdot 18 + 30 \cdot 12 + 30 \cdot 6 + S_{10} \cdot 6 = 0 \Rightarrow S_{10} = +135 \text{ kN (trek)}$$

$$\Sigma M_{\text{om E}} = 0 \Rightarrow -75 \cdot 12 + 30 \cdot 6 + S_8 \cdot 6 = 0 \Rightarrow S_8 = +120 \text{ kN (druk)}$$

Grootste staafkracht verticaal (afb. b)

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow -75 + S_3 = 0 \Rightarrow S_3 = +75 \text{ kN (trek)}$$

Grootste staafkracht diagonaal (afb. c)

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow -75 + S_{1,V} = 0 \Rightarrow S_{1,V} = +75 \text{ kN} \Rightarrow S_1 = +75\sqrt{2} \text{ kN (druk)}$$

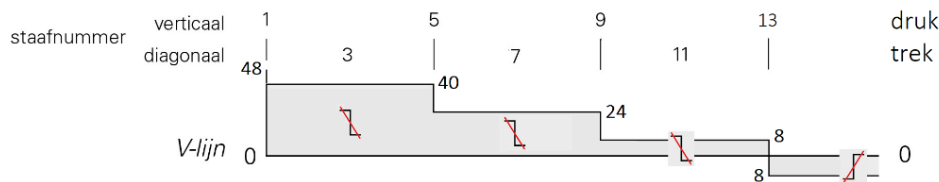
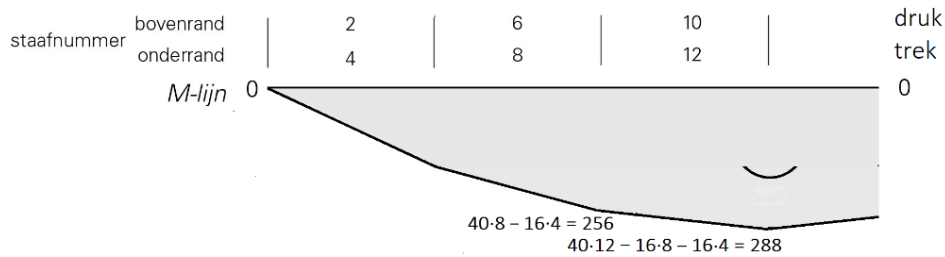
b. Vakwerkligger a: grootste staafkrachten vanuit de V- en M-lijn

Snede nét links van verticaal 13: $M = 288 \text{ kNm} \Rightarrow$ bovenrand: $S_{10} = 288/4 = 72 \text{ kN}$ (druk)

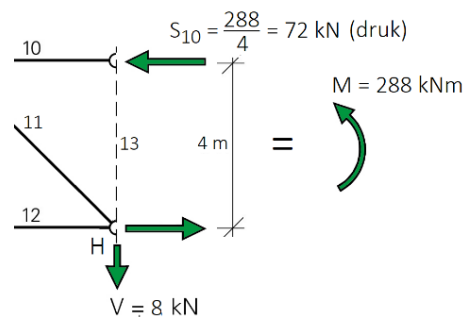
Snede nét rechts van verticaal 9: $M = 256 \text{ kNm} \Rightarrow$ onderrand: $S_{12} = 256/4 = 64 \text{ kN}$ (trek)

In elke snede in het eerste vak: $V = 40 \text{ kN} \Rightarrow$ diagonaal: $S_3 = 40\sqrt{2} \text{ kN}$ (trek)

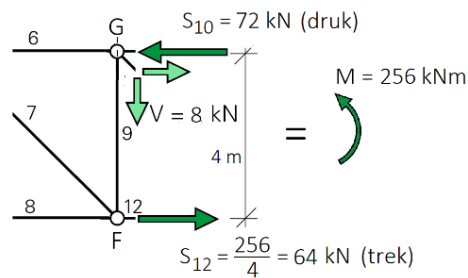
In de verticaal is de kracht gelijk aan de oplegreactie: $\Rightarrow$ verticaal: $S_1 = 48 \text{ kN}$ (druk)



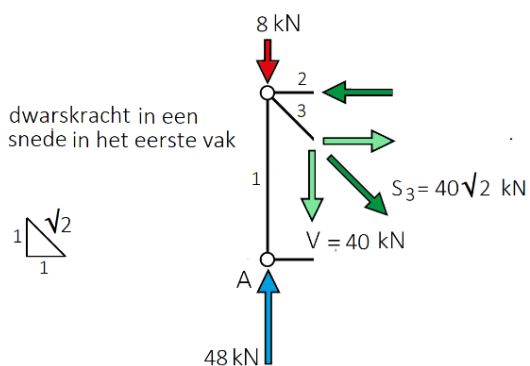
krachten in snede nét links van verticaal 13



krachten in snede nét rechts van verticaal 9

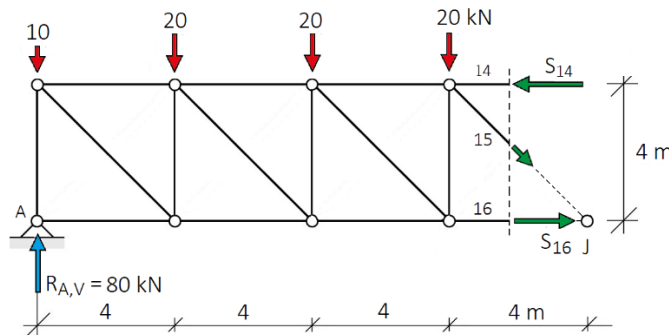


dwarskracht in een snede in het eerste vak

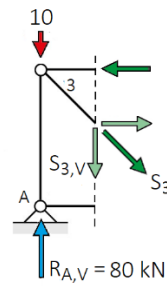


3 Wind- en stabiliteitsverbanden in een stalen hal

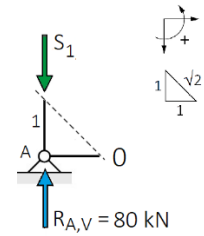
Wind- en stabiliteitsverband in het dak



a. Grootste staafkracht in de bovenrand



b. Grootste staafkracht in de diagonaal



c. Grootste staafkracht in de verticaal

Oplegreacties

$$\sum V = 0 \Rightarrow R_{A,V} = R_{B,V} = (7 \cdot 20 + 2 \cdot 10) / 2 = 80 \text{ kN} \uparrow$$

Grootste staafkracht in de bovenrand (afb. a)

$$\sum M_{\text{om } J} = 0 \Rightarrow -(80 - 10) \cdot 16 + 20 \cdot (12 + 8 + 4) + S_{14} \cdot 4 = 0 \Rightarrow S_{14} = +160 \text{ kN (druk)}$$

Grootste staafkracht in de onderrand (afb. a)

Staat 16 wordt op trek belast. Deze trekkracht is kleiner dan de drukkracht in staat 16 (die bovendien kan knikken). Omdat de windbelasting omkeerbaar is worden alle andere schoren op trek belast terwijl randstaaf 16 op druk wordt belast: $S_{16} = 160 \text{ kN}$. Het berekenen van de kleinere trekkracht S_{16} (zonder instabiliteit knik) in afbeelding a heeft geen praktisch nut.

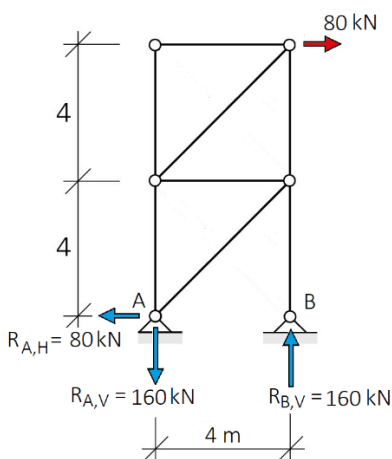
Grootste trekkracht in de diagonaal (afb. b)

$$\sum V = 0 \Rightarrow -80 + 10 + S_{3,V} = 0 \Rightarrow S_{3,V} = +70 \text{ kN} \Rightarrow S_3 = 70\sqrt{2} \text{ kN}$$

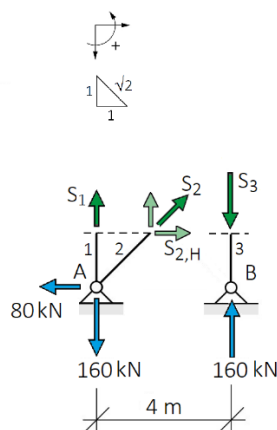
Grootste staafkracht in de verticaal (in een stalen dak is dit een dakrandligger) (afb. c)

$$\sum V = 0 \Rightarrow -80 + S_1 = 0 \Rightarrow S_1 = +80 \text{ kN (druk)}$$

Wind- en stabiliteitsverband in de gevel



a. Uitwendig evenwicht



b. maximale staafkrachten in kolom en schoor

Oplegreacties (afb. a)

$$\sum M_{\text{om } A} = 0 \Rightarrow -80 \cdot 8 + R_{B,V} = 0 \Rightarrow R_{B,V} = +160 \text{ kN} \uparrow$$

$$\sum V = 0 \Rightarrow R_{A,V} - R_{B,V} = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +160 \text{ kN} \downarrow \text{ (een grote trekkracht op de fundering!)}$$

$$\sum H = 0 \Rightarrow -80 + R_{A,H} = 0 \Rightarrow R_{A,H} = +80 \text{ kN} \leftarrow$$

Conclusie. Bij wind van links wordt de horizontale kracht van 80 kN geheel door oplegging A opgenomen.

Maximale staafkracht in de schoor en kolommen (afb. b)

$$\Sigma H = 0 \Rightarrow S_{2,H} = 80 \text{ kN} \Rightarrow S_2 = 80\sqrt{2} \text{ kN (trek)}$$

$$\Sigma V_{\text{staaf 3}} = 0 \Rightarrow S_3 = 160 \text{ kN (druk)}$$

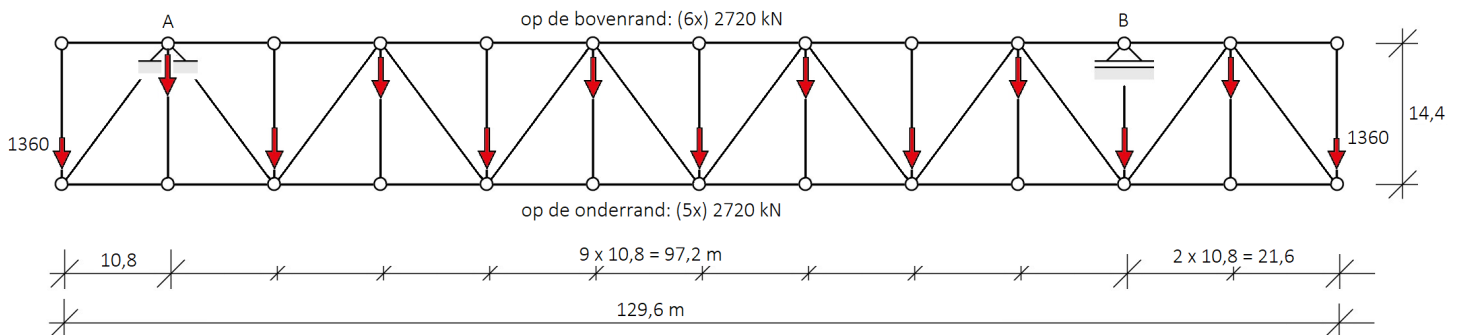
$$\Sigma V_{\text{staaf 1 en 2}} = 0 \Rightarrow 160 - S_1 - S_{2,V} = 0 \text{ met } S_{2,V} = S_{2,H} \Rightarrow 160 - S_1 - 80 = 0 \Rightarrow S_1 = 80 \text{ kN (trek)}$$

Opmerkingen.

- De drukkracht in staaf 3 (160 kN) is groter dan de trekkracht in staaf 1 (80 kN). Bovendien moet staaf 3 op knik worden getoetst. Omdat de windbelasting omkeerbaar is worden de andere schoren op trek belast en wordt kolom 1 op druk belast (160 kN). De (kleinere) trekkracht $S_1 = 80$ kN (zonder instabiliteit knik) in afbeelding b heeft daarom geen praktische betekenis, omdat de drukkracht maatgevend is.
- In elke horizontale snede van de bok is de dwarskracht even groot (V-lijn is constant). De schoor in het bovenste vak wordt even zwaar op trek belast ($80\sqrt{2}$ kN) als in het onderste vak.

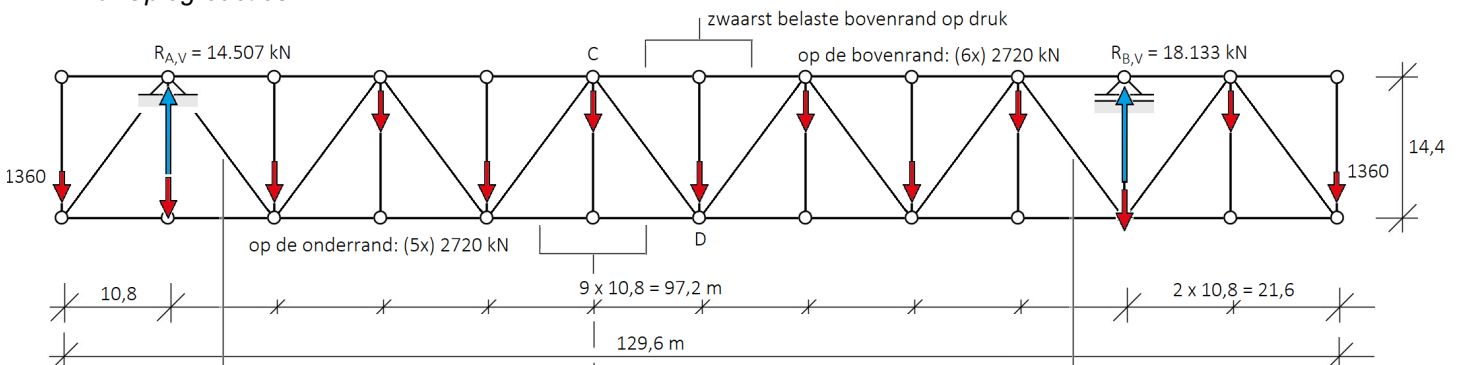
4 Vakwerkligger in gevel kantoorgebouw de Brug in Rotterdam

a. Constructie- en belastingschema



De puntlasten mogen ook bovenop de kolom (als een drukkracht) resp. onderaan de kolom (als een trekkracht) worden aangebracht. Voor de staafkrachten in de ligger maakt dat geen verschil.

b. Oplegreacties



$$\Sigma M_{\text{om A}} = 0 \Rightarrow +1360 \cdot 10,8 - 2720 \cdot (10,8 + 21,6 + 32,4 + 43,2 + 54,0 + 64,8 + 75,6 + 86,4 + 97,2 + 108) - 1360 \cdot 118,8 + R_{B,V} \cdot 97,2 = 0 \Rightarrow R_{B,V} = +18133 \text{ kN} \Rightarrow 18,1 \cdot 10^3 \text{ kN} \uparrow$$

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1360 + 11 \cdot 2720 - 18133 - R_{A,V} = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +14507 \text{ kN} \Rightarrow 14,5 \cdot 10^3 \text{ kN} \uparrow$$

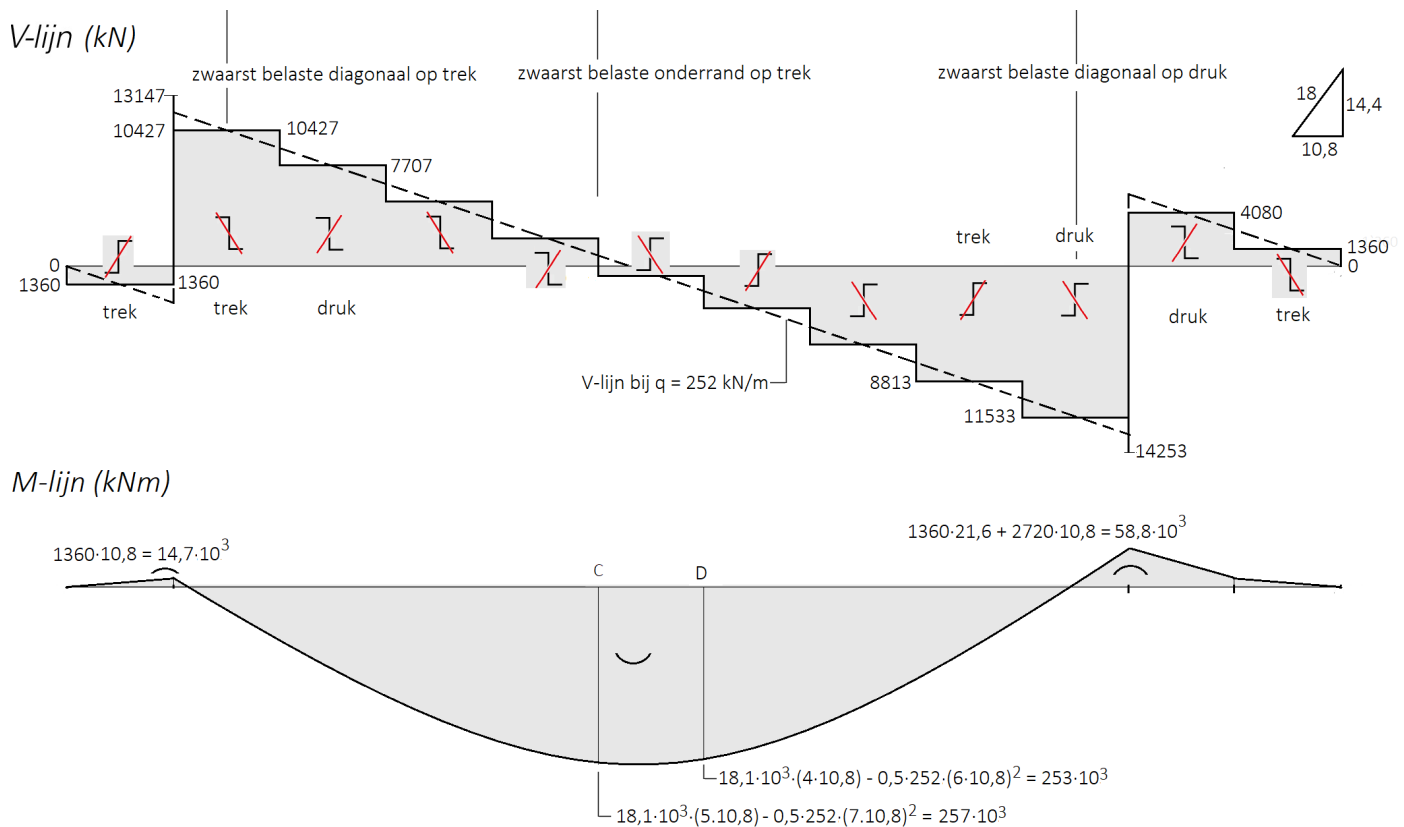
Variant, als q-last, met $q = 2720/10,8 = 252 \text{ kN/m}$

$$\Sigma M_{\text{om A}} = 0 \Rightarrow - (252 \cdot 129,6) (129,6/2 - 10,8) + R_{B,V} \cdot 97,2 = 0 \Rightarrow R_{B,V} = +18,1 \cdot 10^3 \text{ kN} \uparrow$$

$$\Sigma V = 0 \Rightarrow 252 \cdot 129,6 - 18,1 \cdot 10^3 - R_{A,V} = 0 \Rightarrow R_{A,V} = +14,5 \cdot 10^3 \text{ kN} \uparrow$$

c. V- en M-lijn

De steunpuntsmomenten in de opleggingen A en B zijn berekend met de puntlasten op het overstek. De veldmomenten in C en D zijn berekend met de q-last van 252 kN/m (gaat sneller en geeft nagenoeg dezelfde waarde).



d. Maximale staafkrachten

De staafkrachten worden berekend uit de V- en M-lijn. De staven die maximaal worden belast valt ook te beredeneren. Met dit gegeven is de snedemethode een zeer goed alternatief.

De zwaarst belaste staven:

- onderrand in snede C: $S_{\text{trek,max}} = 257 \cdot 10^3 / 14,4 = 17,8 \cdot 10^3 \text{ kN}$

- bovenrand in snede D: $S_{\text{druk,max}} = 253 \cdot 10^3 / 14,4 = 17,6 \cdot 10^3 \text{ kN}$

- diagonaal op trek: $S_{\text{trek,max}} = 10427(18/14,4) = 13,0 \cdot 10^3 \text{ kN}$

- diagonaal op druk: $S_{\text{druk,max}} = 11533(18/14,4) = 14,4 \cdot 10^3 \text{ kN}$

- de verticalen (kolommen) $S_{\text{max}} = 2720 \text{ kN}$. De vakwerkligger is eigenlijk een V-ligger. De verticale staven leveren geen bijdrage aan de vormvastheid en de krachtswerking van de vakwerkligger (zonder belasting zijn het immers nulstaven). De verticale staven (kolommen) hebben uitsluitend de functie de vloer- en dakbelasting in te leiden in de vakwerkligger. De kolommen worden om en om op trek (als hangstaaf) en op druk belast.

Spanningen, elastisch

7.7 Oefenopgaven

1 Traagheidsmoment rechthoekige massieve doorsnede

a. Benadering van het traagheidsmoment

$$I_y = \sum (z^2 dA)$$

$$I_y = 2 \cdot [(0,05h)^2 + (0,15h)^2 + (0,25h)^2 + (0,35h)^2 + (0,45h)^2] \cdot b \cdot (1/10)h$$

$$I_y = 0,0825bh^3 = 1/12,1 bh^3$$

b. Afwijking t.o.v. de exacte waarde

De exacte waarde van het traagheidsmoment voor een massieve rechthoekige doorsnede is:

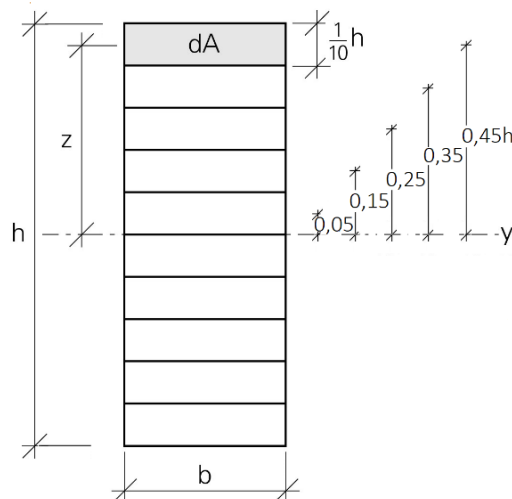
$$I_y = 0,0833bh^3 = 1/12 bh^3$$

De benaderde waarde is $(0,0825/0,0833) \cdot 100 = 99\%$ van de exacte waarde, een afwijking van (slechts) 1%.

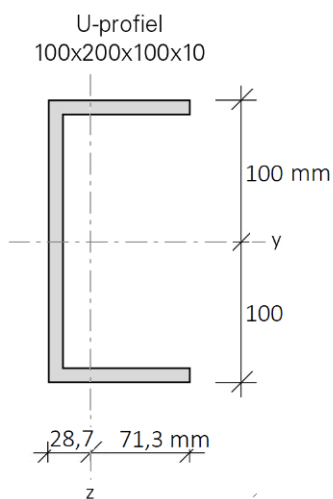
c. Grotere nauwkeurigheid

Een grotere nauwkeurigheid kan worden bereikt door oppervlak dA kleiner te kiezen (door een kleinere hoogte).

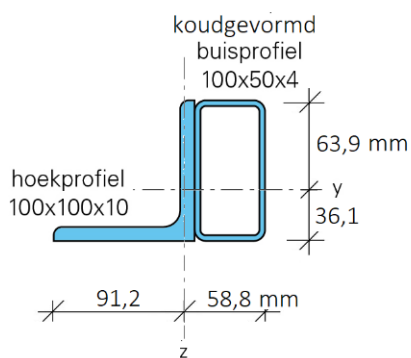
Als $dA \rightarrow 0$ wordt -door integreren- de exacte waarde bereikt.



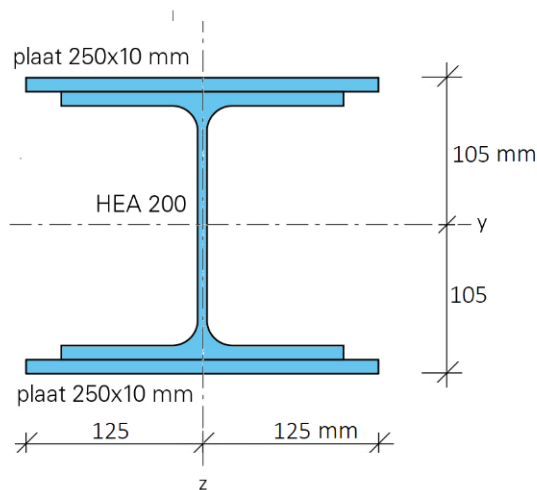
2 I en W van (samengestelde) doorsneden



a. aluminum



b. staal



c. staal

Geëxtrudeerd aluminium profiel (afb. a)

a. Zwaartepunt

Algemeen
$$z = \frac{\sum (A_i z_i)}{\sum A_i}$$

y-as
$$Z_{t.o.v. \text{ onderrand}} = 100 \text{ mm (vanwege symmetrie)}$$

z-as
$$Z_{t.o.v. \text{ linker rand}} = \frac{2 \cdot (10 \cdot 100) \cdot 50 + (180 \cdot 10) \cdot 5}{2 \cdot (10 \cdot 100) + (180 \cdot 10)} = 28,7 \text{ mm}$$

b. Traagheidsmomenten

Algemeen	$I_y = \sum I_y + \sum (Aa^2)$
y-as	$2[1/12 \cdot 100 \cdot 10^3 + (100 \cdot 10) \cdot (100 - 5)^2] = 1807 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ $1/12 \cdot 10 \cdot 180^3 = 486 \cdot 10^4$ $I_y = 2293 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
z-as	$2[1/12 \cdot 10 \cdot 100^3 + (10 \cdot 100) \cdot (50 - 28,7)^2] = 257 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ $1/12 \cdot 180 \cdot 10^3 + (180 \cdot 10) \cdot (28,7 - 5)^2 = 103 \cdot 10^4$ $I_z = 360 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

c. Elastische weerstandsmomenten

Algemeen	$W_b = \frac{I}{z_b}$ en $W_o = \frac{I}{z_o}$
y-as	$W_{el,y} = \frac{2293 \cdot 10^4}{100} = 229 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$
z-as	$W_{el,z,b} = \frac{360 \cdot 10^4}{71,3} = 50,5 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$ (geeft de grootste spanning) $W_{el,z,o} = \frac{360 \cdot 10^4}{28,7} = 125 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$

Samengesteld buis- met hoekprofiel (afb. b)

De doorsnede grootheden kunnen per tabellenboek enigszins verschillen.

a. Zwaartepunt $A_{\text{buisprofiel}} = 1095 \text{ mm}^2$ met: z t.o.v. onderrand 50 mm en t.o.v. rechterrand 25 mm
 $A_{\text{hoekprofiel}} = 1915 \text{ mm}^2$ met: z t.o.v. onderrand 28,2 mm en t.o.v. rechterrand 28,2 mm

Algemeen	$z = \frac{\sum (A_i z_i)}{\sum A_i}$
y-as	$z_{\text{t.o.v. onderrand}} = \frac{1095 \cdot 50 + 1915 \cdot 28,2}{1095 + 1915} = 36,1 \text{ m}$
z-as	$z_{\text{t.o.v. rechterrand}} = \frac{1095 \cdot 25 + 1915 \cdot (28,2 + 50)}{1095 + 1915} = 58,8 \text{ mm}$

b. Traagheidsmomenten

$$I_{y,\text{buisprofiel}} = 134 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \text{ en } I_{z,\text{buisprofiel}} = 44,8 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$I_{y,\text{hoekprofiel}} = I_{z,\text{hoekprofiel}} = 177 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Algemeen	$I_y = \sum I_y + \sum (Aa^2)$
y-as	$\text{buisprofiel } 134 \cdot 10^4 + 1095 \cdot (50 - 36,1)^2 = 155 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ $\text{hoekprofiel } 177 \cdot 10^4 + 1915 \cdot (36,1 - 28,2)^2 = 189 \cdot 10^4$ $I_y = 344 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
z-as	$\text{buisprofiel } 44,8 \cdot 10^4 + 1095 \cdot (58,8 - 25)^2 = 170 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$ $\text{hoekprofiel } 177 \cdot 10^4 + 1915 \cdot (78,2 - 58,8)^2 = 249 \cdot 10^4$ $I_z = 419 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

c. Elastische weerstandsmomenten

Algemeen	$W_b = \frac{I}{z_b}$ en $W_o = \frac{I}{z_o}$
y-as	$W_{el,y,b} = \frac{344 \cdot 10^4}{63,9} = 53,8 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$ (geeft de grootste spanning) $W_{el,y,o} = \frac{344 \cdot 10^4}{36,1} = 95,3 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$

z-as

$$W_{el,z,b} = \frac{419 \cdot 10^4}{91,2} = 45,9 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \quad (\text{geeft de grootste spanning})$$

$$W_{el,z,o} = \frac{419 \cdot 10^4}{58,8} = 71,3 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

Samengesteld HEA-profiel met stalen platen op de flensen (afb. c)

De doorsnedegrootheden kunnen per tabellenboek enigszins verschillen.

a. **Zwaartepunt** Het zwaartepunt van de samengestelde doorsnede valt samen met het zwaartepunt van de HE200 A.

b. **Traagheidsmomenten**

$$h_{HE200A} = 190 \text{ mm}$$

$$I_{y,HEA 200} = 3692 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \text{ en } I_{z,HEA 200} = 1336 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

Algemeen

$$I_y = \sum I_y + \sum (Aa^2)$$

y-as

$$\begin{aligned} \text{platen} \quad 2[1/12 \cdot 250 \cdot 10^3 + (250 \cdot 10) \cdot (95 + 5)^2] &= 5004 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \\ \text{HE200 A} \quad &= 3692 \cdot 10^4 \\ I_y &= 8696 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

z-as

$$\begin{aligned} \text{platen} \quad 2(1/12 \cdot 10 \cdot 250^3) &= 2604 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \\ \text{HE200 A} \quad &= 1336 \cdot 10^4 \\ I_z &= 3940 \cdot 10^4 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

c. **Elastische weerstandsmomenten**

Algemeen $W_b = \frac{I}{z_b}$ en $W_o = \frac{I}{z_o}$

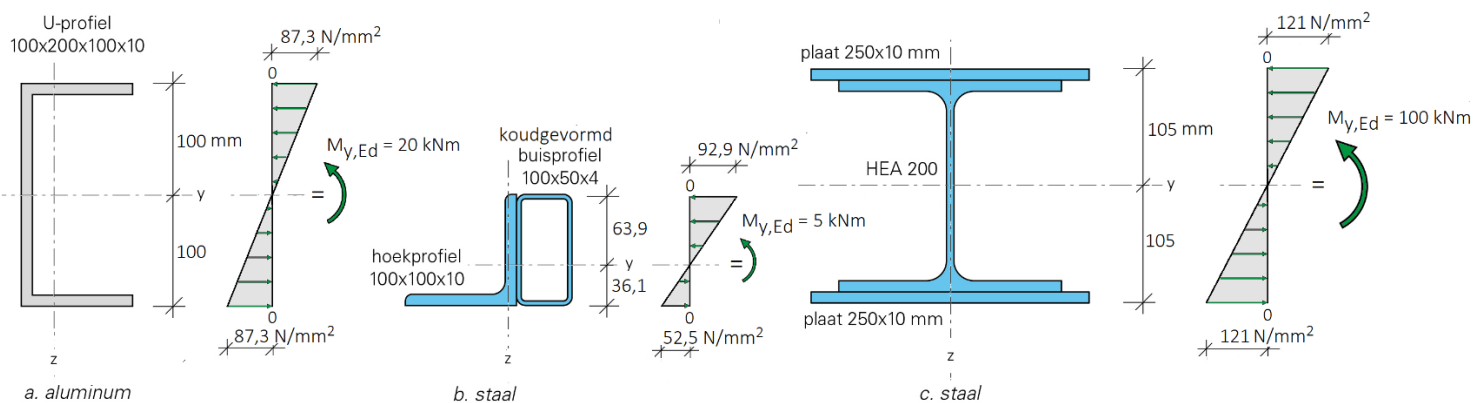
y-as

$$W_{el,y} = \frac{8696 \cdot 10^4}{105} = 828 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

z-as

$$W_{el,z} = \frac{3940 \cdot 10^4}{125} = 315 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

3 Verloop buigspanningen in de doorsneden van opgave 2



De 'snelste' formule voor het berekenen van buigspanningen: $\sigma_b = \frac{M}{W_b}$ resp. $\sigma_o = \frac{M}{W_o}$

a. Doorsnede a

$$\sigma_y = \frac{M_{y,Ed}}{W_{el,y}} = \frac{20 \cdot 10^6}{229 \cdot 10^3} = 87,3 \text{ N/mm}^2$$

b. Doorsnede b

$$\sigma_{y,b} = \frac{M_{y,Ed}}{W_{el,y,b}} = \frac{5 \cdot 10^6}{53,8 \cdot 10^3} = 92,9 \text{ N/mm}^2$$

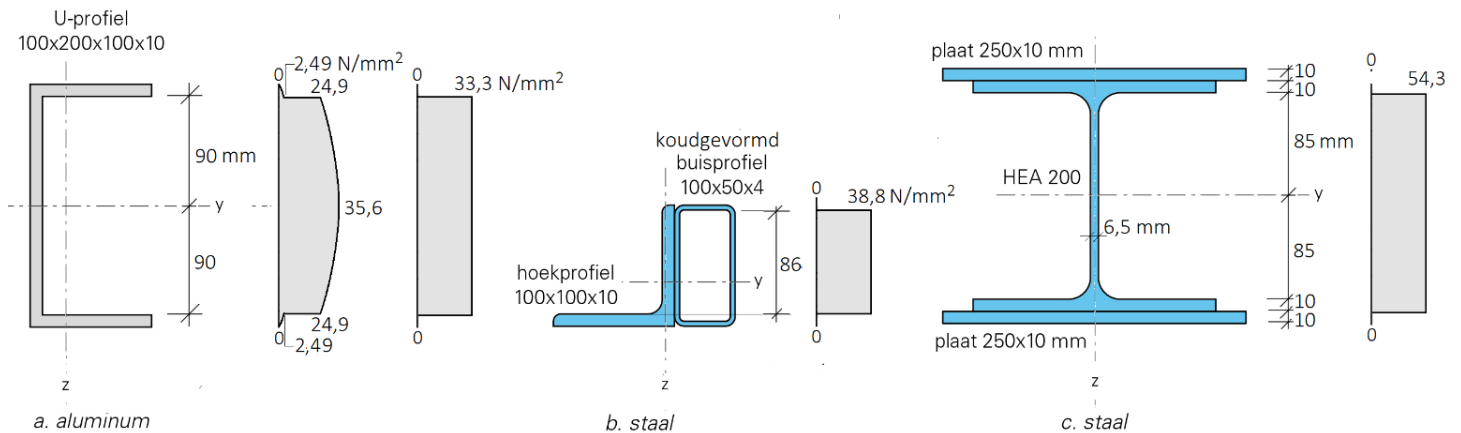
$$\sigma_{y,b} = \frac{M_{y,Ed}}{W_{el,y,o}} = \frac{5 \cdot 10^6}{95,3 \cdot 10^3} = 52,5 \text{ N/mm}^2$$

c. Doorsnede c

$$\sigma_y = \frac{M_{y,Ed}}{W_{el,y}} = \frac{100 \cdot 10^6}{828 \cdot 10^3} = 121 \text{ N/mm}^2$$

4

Verloop schuifspanningen in de doorsneden van opgave 2



a. Exacte spanningsverloop in doorsnede a ten gevolge van $V_{z,Ed} = 60 \text{ kN}$ (afb. a)

De algemene schuifspanningsformule luidt: $\tau = \frac{VS}{bl}$

T.p.v. de neutrale lijn (maximale schuifspanning)

$$S_{n.l.} = 100 \cdot 10 \cdot 95 + 10 \cdot 90 \cdot 45 = 136 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{n.l.} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 136 \cdot 10^3}{10 \cdot 2293 \cdot 10^4} = 35,6 \text{ N/mm}^2$$

T.p.v. de overgang van lijf met flens, in het lijf ($b = 10 \text{ mm}$)

$$S_{lijf/flens} = 100 \cdot 10 \cdot 95 = 95,0 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{lijf/flens} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 95,0 \cdot 10^3}{10 \cdot 2293 \cdot 10^4} = 24,9 \text{ N/mm}^2$$

T.p.v. de overgang van lijf met flens, in de flens ($b = 100 \text{ mm}$)

$$S_{flens/lijf} = 95,0 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{\text{flens/lijf}} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 95,0 \cdot 10^3}{100 \cdot 2293 \cdot 10^4} = 2,49 \text{ N/mm}^2$$

Aan de oppervlakken van de doorsnede (boven en onder): $\tau_{\text{oppervlak}} = 0$

b. Geschematiseerd schuifspanningsverloop in doorsnede a, b en c ten gevolge van $V_{z,Ed} = 60 \text{ kN}$ (afb. a, b en c)

De schuifspanningsformule voor flensprofielen en rechthoekige/vierkante buisprofielen luidt: $\tau_z = \frac{V_z}{A_{\text{lijf}}}$

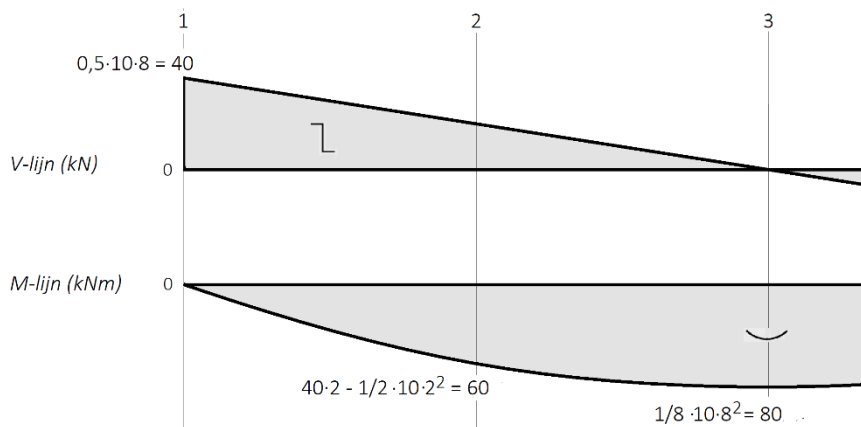
Doorsnede a $\tau_z = \frac{60 \cdot 10^6}{10 \cdot 180} = 33,3 \text{ N/mm}^2$

Doorsnede b $\tau_z = \frac{60 \cdot 10^6}{(10 + 4 + 4) \cdot 86} = 38,8 \text{ N/mm}^2$

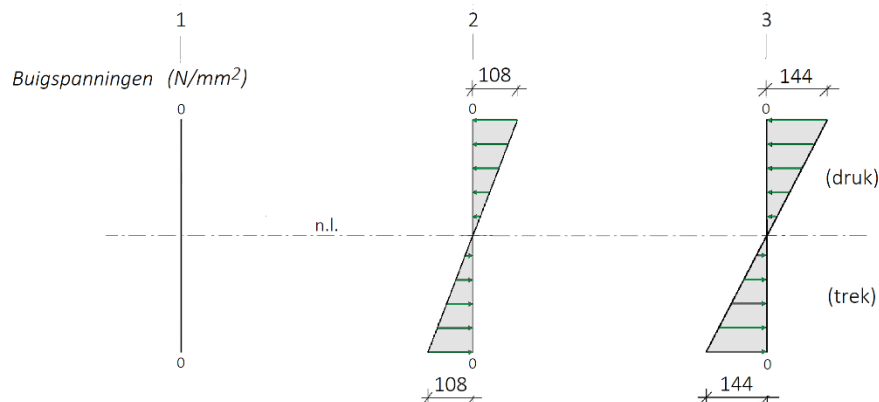
Doorsnede c $\tau_z = \frac{60 \cdot 10^6}{6,5 \cdot 170} = 54,3 \text{ N/mm}^2$

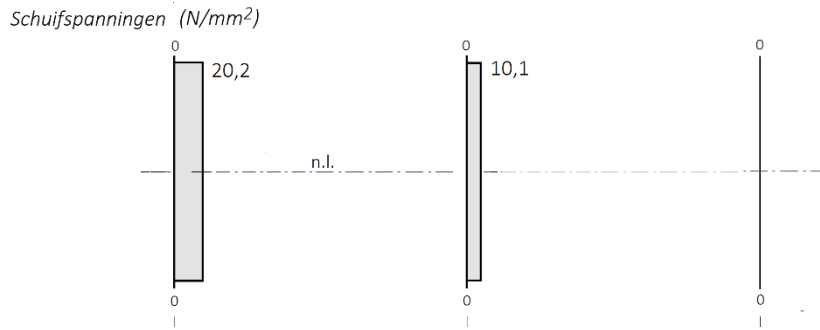
5 Buig- en schuifspanningen in een ligger IPE 300

a. V- en M-lijn



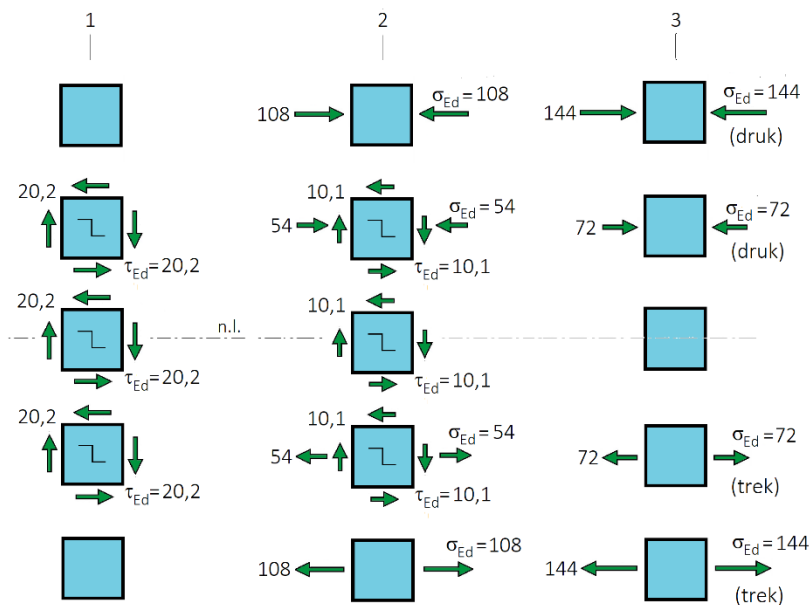
b. Verloop van de buig- en schuifspanningen





c. Spanningen op deeltjes (N/mm²)

De verticale schuifspanningen in een punt werken ook horizontaal.



6 Houten dakligger b x h = 59x156 mm overkapping tankstation

a. Voorkomen van kip

De underlayment dakplaten voorkomen kip van de dakliggers (bij druk bovenin de ligger). Bij het steunpunt (druk onderin de ligger) is zowel het moment als de lengte waarover de ligger kan kippen veel kleiner. De ligger zelf en/of de verbinding van de dakligger met de gelamineerde ligger en/of de verbinding van de dakligger met de dakplaten (waardoor rotatie van de ligger wordt voorkomen) voorkomt de kip.

b. Toets van de sterkte dakligger b x h = 59x156 mm

k_{mod} 0,9 (buiten overdekt, kortdurend)

C18 $f_{m,y,k} = 18 \text{ N/mm}^2$; $f_{v,k} = 3,4 \text{ N/mm}^2$; $\gamma_M = 1,3$

Bij hout is het gebruikelijk dat de spanningstoets wordt uitgevoerd.

buiging

$$\sigma_{m,y,d} \leq f_{m,y,d} \Rightarrow \frac{M_{Ed}}{W_y} \leq k_{mod} \cdot \frac{f_{m,y,k}}{\gamma_M} \Rightarrow \frac{1,7 \cdot 10^6}{\frac{1}{6} \cdot 59 \cdot 156^2} \leq 0,9 \cdot \frac{18}{1,3} \Rightarrow 7,1 \leq 12,5 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{voldoet})$$

afschuiving

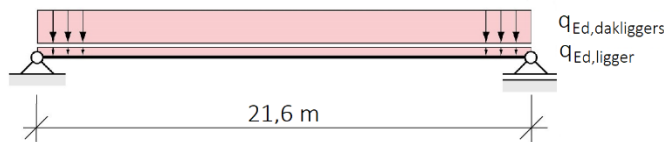
$$\tau_d \leq f_{v,d} \Rightarrow 1,5 \frac{V_{Ed}}{A} \leq k_{mod} \cdot \frac{f_{v,k}}{\gamma_M} \Rightarrow 1,5 \frac{2,10 \cdot 10^3}{59 \cdot 156} \leq 0,9 \cdot \frac{3,4}{1,3} \Rightarrow 0,34 \leq 2,35 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{voldoet})$$

7 Gelamineerde ligger b x h = 205x1200 mm overkapping tankstation

Gevolgklasse CC1 $\gamma_G = 1,1$

De puntlasten worden als een lijnlast geschematiseerd.

Schematisering ligger



Belastingen

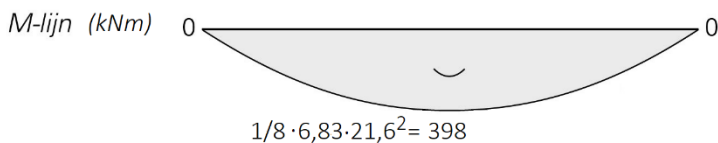
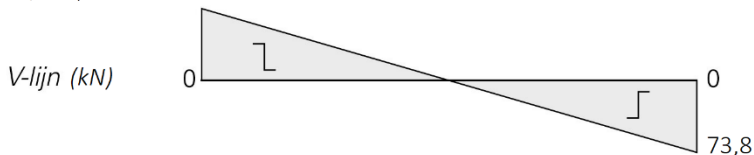
e.g. gelam. ligger $1,1(0,205 \cdot 1,20 \cdot 5) = 1,35 \text{ kN/m}$

door dakliggers $3,34/0,61 = 5,48$

$$q_{Ed} = 6,83 \text{ kN/m}$$

a. V- en M-lijn

$$1/2 \cdot 6,83 \cdot 21,6 = 73,8$$



b. Voorkomen van kip

De dakliggers vormen samen met de underlayment dakplaten een vormvaste schijf. Door de bevestiging van de dakliggers aan de gelamineerde ligger wordt kip voorkomen.

c. Toets van de sterkte gelamineerde ligger b x h = 205x1200 mm

GL28h $f_{m,y,k} = 28 \text{ N/mm}^2$; $f_{v,k} = 3,2 \text{ N/mm}^2$; $\gamma_M = 1,25$

$k_{mod} = 0,9$ (buiten overdekt, kortdurend)

Bij hout is het gebruikelijk dat de spanningstoets wordt uitgevoerd.

buiging

$$\sigma_{m,y,d} \leq f_{m,y,d} \Rightarrow \frac{M_{Ed}}{W_y} \leq k_{mod} \cdot \frac{f_{m,y,k}}{\gamma_M} \Rightarrow \frac{399 \cdot 10^6}{\frac{1}{6} \cdot 205 \cdot 1200^2} \leq 0,9 \cdot \frac{28}{1,25} \Rightarrow 8,11 \leq 20,2 \text{ N/mm}^2 \text{ (voldoet)}$$

afschuiving

$$\tau_d \leq f_{v,d} \Rightarrow 1,5 \frac{V_{Ed}}{A} \leq k_{mod} \cdot \frac{f_{v,k}}{\gamma_M} \Rightarrow 1,5 \frac{73,8 \cdot 10^3}{205 \cdot 1200} \leq 0,9 \cdot \frac{3,2}{1,25} \Rightarrow 0,45 \leq 2,30 \text{ N/mm}^2 \text{ (voldoet)}$$

8 Scharnierligger IPE 360

S355 $f_y = 355 \text{ N/mm}^2$; $\gamma_{M0} = 1,00$

Bij staal is het gebruikelijk dat de krachttoets wordt uitgevoerd.

Liggerdeel AS (niet kipgevoelig)

buiging

$$M_{Ed} \leq M_{Rd} \Rightarrow M_{Ed} \leq \frac{W_{el,y} f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 200 \leq \frac{904 \cdot 10^3 \cdot 355 \cdot 10^{-6}}{1,00} \Rightarrow 200 \leq 321 \text{ kNm (voldoet)}$$

afschuiving

$$V_{Ed} \leq V_{Rd} \Rightarrow V_{Ed} \leq \frac{A_w 0,58 f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 169 \leq \frac{(360 - 2 \cdot 12,7) 8,0 \cdot 0,58 \cdot 355 \cdot 10^{-3}}{1,00} \Rightarrow 169 \leq 551 \text{ kN (voldoet)}$$

Liggerdeel CS (kipgevoelig)

buiging

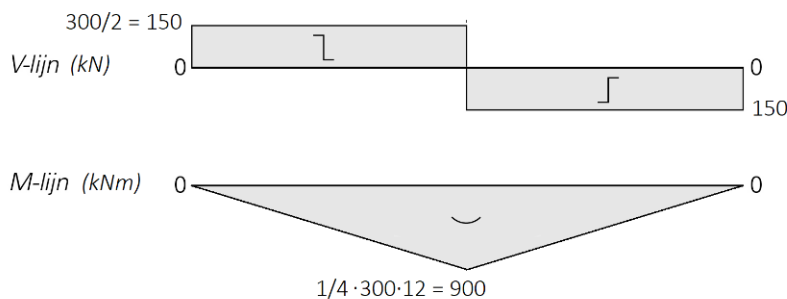
$$M_{Ed} \leq \chi_{LT} M_{Rd} \Rightarrow M_{Ed} \leq \chi_{LT} \frac{W_{el,y} f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 90 \leq 0,55 \cdot \frac{904 \cdot 10^3 \cdot 355 \cdot 10^{-6}}{1,00} \Rightarrow 90 \leq 177 \text{ kNm (voldoet)}$$

afschuiving

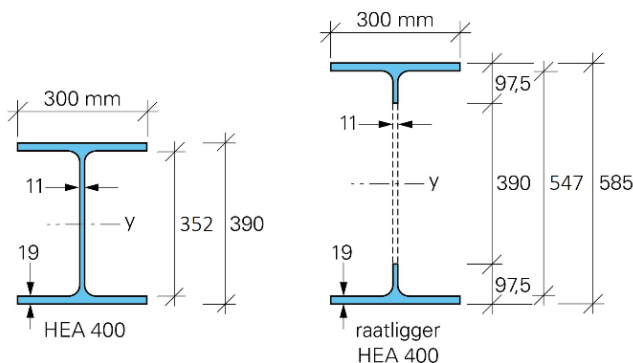
$$V_{Ed} \leq V_{Rd} \Rightarrow V_{Ed} \leq \frac{A_w 0,58 f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 60 \leq \frac{(360 - 2 \cdot 12,7) 8,0 \cdot 0,58 \cdot 355 \cdot 10^{-3}}{1,00} \Rightarrow 60 \leq 551 \text{ kN (voldoet)}$$

9 Buig- en schuifspanningen in een raatligger HEA 400

a. V- en M-lijn



b. en c. Traagheidsmoment HEA 400 en raatligger HEA 400



Voor beide doorsneden kan het traagheidsmoment worden berekend volgens: $I_y = I_{y,\text{massief}} - I_{y,\text{hol}}$

met: $I = \frac{1}{12} b h^3$

$$I_{y,\text{HEA 400}} = \frac{1}{12} \cdot 300 \cdot 390^3 - \frac{1}{12} \cdot (300 - 11) \cdot 352^3 = 4,33 \cdot 10^8 \text{ mm}^4 \text{ (tabellenboek } 4,51 \cdot 10^8 \text{ mm}^4; 4\% \text{ groter)}$$

$$I_{y,\text{raatligger HEA 400}} = \frac{1}{12} \cdot 300 \cdot 585^3 - \frac{1}{12} \cdot (300 - 11) \cdot 547^3 - \frac{1}{12} \cdot 11 \cdot 390^3 = 10,1 \cdot 10^8 \text{ mm}^4$$

d. Verschil in grootte van de traagheidsmomenten

Het traagheidsmoment van de raatligger HEA 400 is $(10,1 \cdot 10^8) / (4,33 \cdot 10^8) = 2,33 \times$ groter dan van een HEA 400.

e. Verschil in grootte van de buigspanningen

De buigspanning wordt berekend met: $\sigma = \frac{Mz_{uiterst}}{I} = \frac{M}{W}$

$$W_{y,HEA\ 400} = \frac{4,33 \cdot 10^8}{390/2} = 2221 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

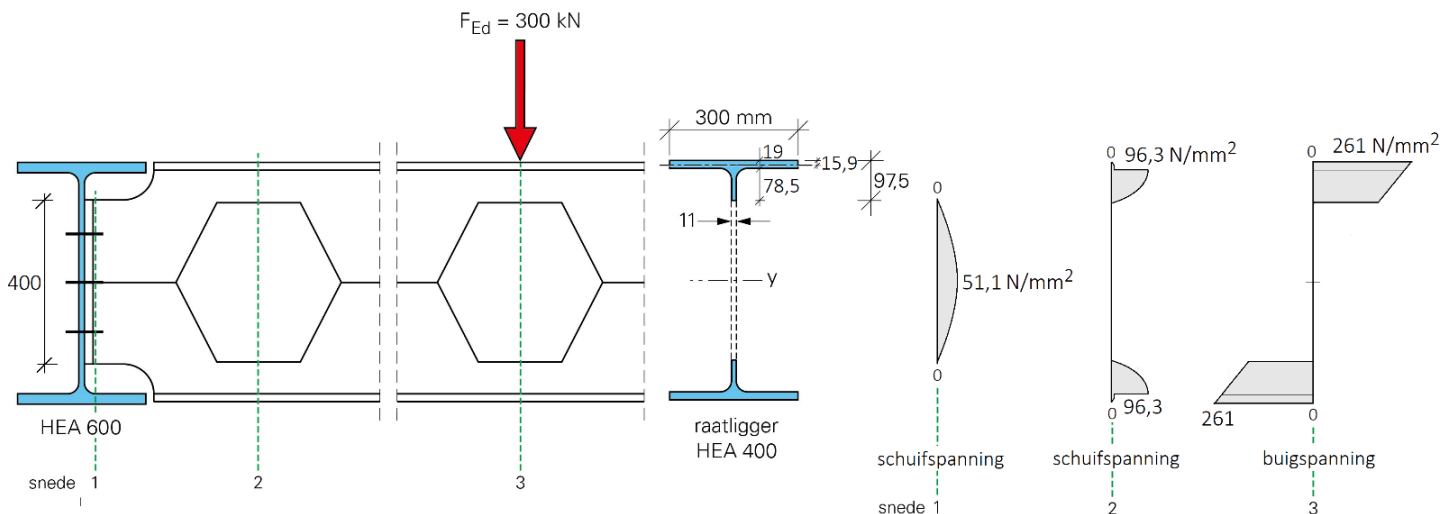
$$W_{y,raatligger\ HEA\ 400} = \frac{10,1 \cdot 10^8}{585/2} = 3453 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

De buigspanning in de raatligger HEA 400 is $(3453 \cdot 10^3) / (2221 \cdot 10^3) = 1,55 \times$ kleiner dan in een HEA 400.

f. Toets van de dwarskracht in doorsnede 1

S355 $f_y = 355 \text{ N/mm}^2$; $\gamma_{M0} = 1,00$

Omdat in doorsnede 2 een spanningstoets voor de hand liggend is wordt ook in doorsnede 1 de spanningstoets uitgevoerd.



De maximale schuifspanning in een rechthoekige massieve doorsnede wordt berekend met: $\tau_{max} = 1,5 \frac{V}{A}$

Toets $\tau_{Ed} \leq \frac{0,58f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 1,5 \frac{V_{Ed}}{A} \leq \frac{0,58f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 1,5 \cdot \frac{150 \cdot 10^3}{11 \cdot 400} \leq \frac{0,58 \cdot 355}{1,00} \Rightarrow 51,1 \leq 206 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{voldoet})$

g. Toets van de dwarskracht in doorsnede 2 (zie snede 2, vraag f)

De maximale schuifspanning in een T-vormige doorsnede wordt berekend met: $\tau = \frac{VS}{bl}$

Ligging van het zwaartepunt (neutrale lijn) van de T-vormige doorsnede

Algemeen $z = \frac{\sum(A_i z_i)}{\sum A_i}$

y-as $z_{T \text{ t.o.v. bovenrand}} = \frac{(300 - 11) \cdot 19 \cdot 19/2 + 11 \cdot 97,5 \cdot 97,5/2}{(300 - 11) \cdot 19 + 11 \cdot 97,5} = 15,9 \text{ mm}$

Traagheidsmoment van de T-vormige doorsnede

Algemeen $I_y = \sum I_y + \sum(Aa^2)$

y-as

flens	$1/12 \cdot (300 - 11) \cdot 19^3 + (300 - 11) \cdot 19 \cdot (15,9 - 19/2)^2$	$= 39 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$
lijf	$1/12 \cdot 11 \cdot 97,5^3 + 11 \cdot 97,5 \cdot (97,5/2 - 15,9)^2$	$= 201 \cdot 10^4$
		$I_{y,T} = 240 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

Schuifspanningen in de T-vormige doorsnede ten gevolge van $V_{Ed} = 150/2 = 75 \text{ kN}$
T.p.v. de neutrale lijn (geeft hier *niet* de maximale schuifspanning vanwege $b = 300 \text{ mm}$)

$$S_{n.l.} = 300 \cdot 15,9 \cdot 15,9/2 = 37,9 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{n.l.} = \frac{75 \cdot 10^3 \cdot 37,9 \cdot 10^3}{300 \cdot 240 \cdot 10^4} = 3,95 \text{ N/mm}^2$$

T.p.v. de overgang van lijf met flens, in het lijf ($b = 11 \text{ mm}$)

$$S_{lijf/flens} = 11 \cdot 78,5 \cdot 78,5/2 = 33,9 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

$$\tau_{lijf/flens} = \frac{75 \cdot 10^3 \cdot 33,9 \cdot 10^3}{11 \cdot 240 \cdot 10^4} = 96,3 \text{ N/mm}^2$$

Toets $\tau_{Ed} \leq \frac{0,58 f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 96,3 \leq \frac{0,58 \cdot 355}{1,00} \Rightarrow 96,3 \leq 206 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{voldoet})$

h. Toets van het buigend moment in doorsnede 3 (zie vraag f)

Bij staal is het gebruikelijk dat de krachttoets wordt uitgevoerd.

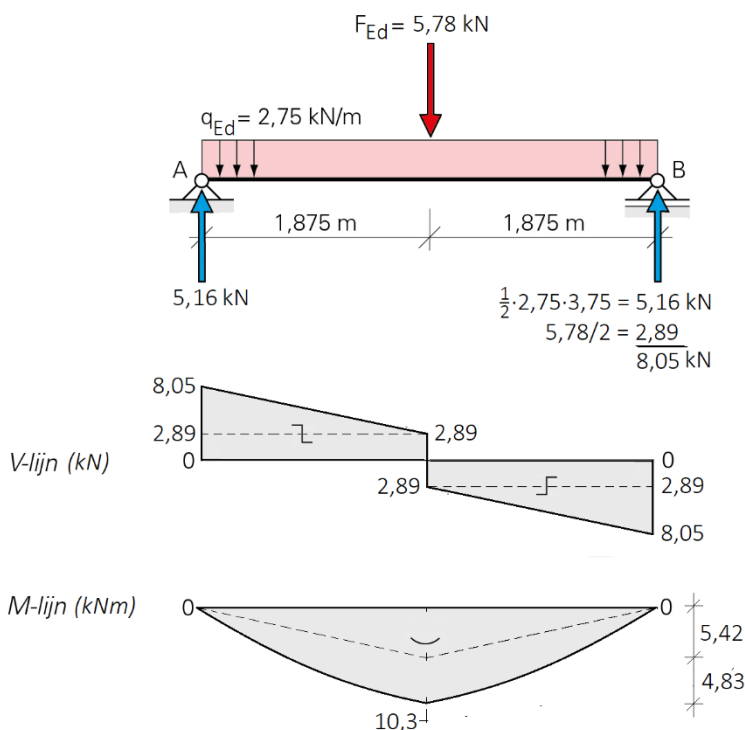
$W_{el,y} = 3453 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$ (zie vraag e)

$$M_{Ed} \leq M_{Rd} \Rightarrow M_{Ed} \leq \frac{W_{el,y} f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 900 \leq \frac{3453 \cdot 10^3 \cdot 355 \cdot 10^{-6}}{1,00} \Rightarrow 900 \leq 1226 \text{ kNm} \quad (\text{voldoet})$$

10 Latei HEA 140 en stalen buis $\phi 76,1 \times 4 \text{ mm}$ boven de entree van twee woningen

S235 $f_y = 235 \text{ N/mm}^2$; $\gamma_{M0} = \gamma_{M1} = 1,00$

a. V- en M-lijn (zie hoofdstuk 4, opgave 4) en toets van de sterkte latei HEA 140



Bij staal is het gebruikelijk dat de krachttoets wordt uitgevoerd.

buiging

$$M_{Ed} \leq M_{Rd} \Rightarrow M_{Ed} \leq \frac{W_{el,y} f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 10,3 \leq \frac{155 \cdot 10^3 \cdot 235 \cdot 10^{-6}}{1,00} \Rightarrow 10,3 \leq 36,4 \text{ kNm} \quad (\text{voldoet})$$

afschuiving

$$V_{Ed} \leq V_{Rd} \Rightarrow V_{Ed} \leq \frac{A_w 0,58 f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 8,05 \leq \frac{(133 - 2 \cdot 8,5) 5,5 \cdot 0,58 \cdot 235 \cdot 10^{-3}}{1,00} \Rightarrow 8,05 \leq 87,0 \text{ kN} \quad (\text{voldoet})$$

Hier sprake van een buigingsprobleem (zoals het bijna altijd bij liggers het geval is): de dwarskrachttoets voldoet namelijk veel 'ruimer' dan de momenttoets.

b. Toets van de gemiddelde oplegdruk op metselwerk

De oplegdruk van metselwerk wordt doorgaans als een spanningstoets uitgevoerd.

Afmeting oplegoppervlak: 140x150 mm.

$$\sigma_{Ed} \leq f_d \Rightarrow \frac{F_{Ed}}{A} \leq f_d \Rightarrow \frac{8,05 \cdot 10^3}{140 \cdot 150} \leq 2,8 \Rightarrow 0,38 \leq 2,8 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{voldoet})$$

c. Toets van de stalen ondersteuningsstaaf $\phi 76,1 \times 4 \text{ mm}$

De normaaldrukkracht in de staaf: $N_{Ed} = 5,78 / \cos 15 = 5,98 \text{ kN}$

Bij staal is het gebruikelijk dat de kniktoets als een krachttoets wordt uitgevoerd.

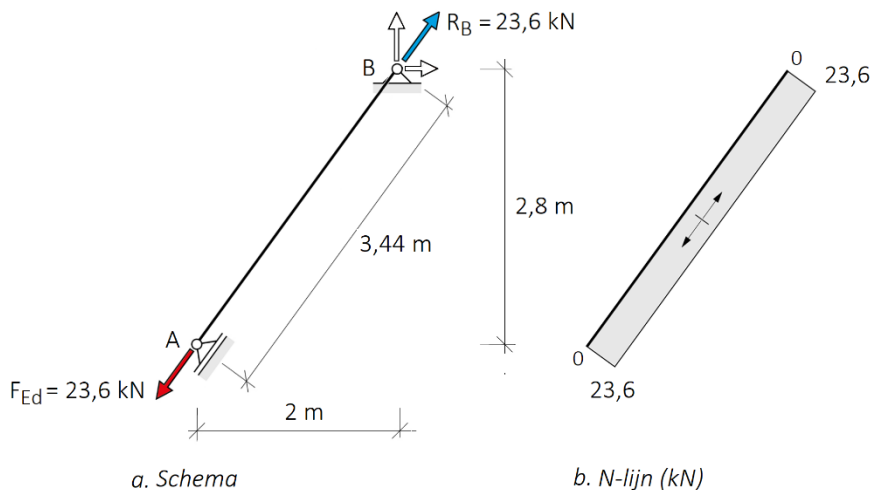
$$N_{Ed} \leq \chi N_{Rd} \Rightarrow N_{Ed} \leq \chi \frac{A f_y}{\gamma_{M1}} \Rightarrow 5,98 \leq 0,11 \cdot \frac{906 \cdot 235 \cdot 10^{-3}}{1,00} \Rightarrow 5,98 \leq 23,4 \text{ kN} \quad (\text{voldoet})$$

11 Stalen trekstang, kolom en liggers in prefab serre De Stadsheer in Tilburg

Bij staal is het gebruikelijk dat de krachttoets wordt uitgevoerd.

a. Schema, krachtsverdeling en toets trekstang $\phi 16 \text{ mm}$

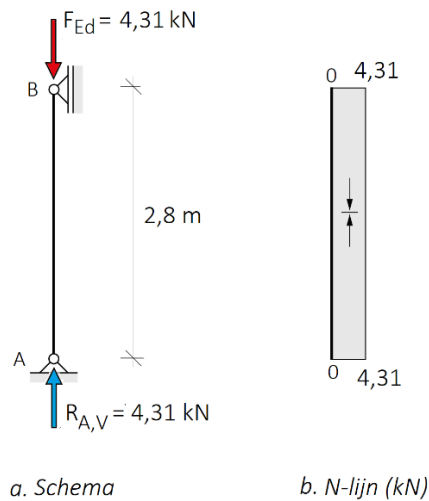
S355 $f_y = 355 \text{ N/mm}^2$; $\gamma_{M0} = 1,00$



$$\text{Toets } N_{Ed} \leq N_{Rd} \Rightarrow N_{Ed} \leq \frac{A f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 23,6 \leq \frac{(1/4 \pi 16^2) \cdot 355 \cdot 10^{-3}}{1,00} \Rightarrow 23,6 \leq 71,4 \text{ kN} \quad (\text{voldoet})$$

b. Schema, krachtsverdeling en toets hoekkolom buis 50x50x4 mm

S275 $f_y = 275 \text{ N/mm}^2$; $\gamma_{M1} = 1,00$



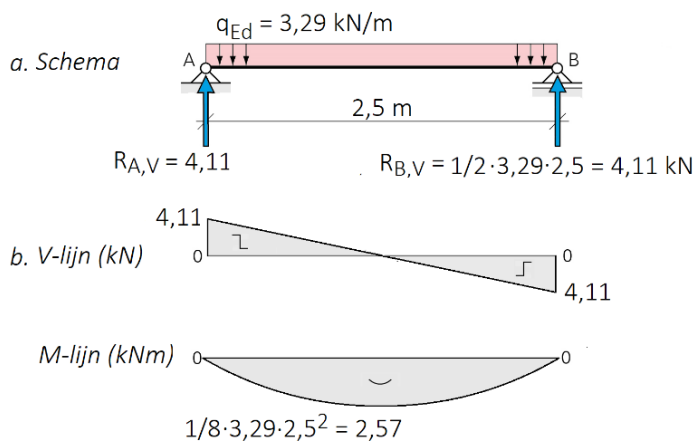
Toets $N_{Ed} \leq \chi N_{Rd} \Rightarrow N_{Ed} \leq \chi \frac{A f_y}{\gamma_{M1}} \Rightarrow 4,31 \leq 0,26 \cdot \frac{695 \cdot 275 \cdot 10^{-3}}{1,00} \Rightarrow 4,31 \leq 49,7 \text{ kN} \quad (\text{voldoet})$

c. Schema, krachtsverdeling en toets samengesteld dakrandprofiel buis 100x50x4 + L100x100x10 mm

S275 $f_y = 275 \text{ N/mm}^2$; $\gamma_{M0} = 1,00$ (buisprofiel) $\leftarrow$ maatgevend voor toetsing van de sterkte

S355 $f_y = 355 \text{ N/mm}^2$; $\gamma_{M0} = 1,00$ (hoekprofiel)

Samengesteld profiel $W_{el,y,b} = 53,8 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$ (zie opgave 2c, kleinste W is maatgevend)
 $A_w = (10 + 4 + 4) \cdot 86 = 1548 \text{ mm}^2$ (zie opgave 4b)



buiging

$M_{Ed} \leq M_{Rd} \Rightarrow M_{Ed} \leq \frac{W_{el,y} f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 2,57 \leq \frac{53,8 \cdot 10^3 \cdot 275 \cdot 10^{-6}}{1,00} \Rightarrow 2,57 \leq 14,8 \text{ kNm} \quad (\text{voldoet})$

afschuiving

$V_{Ed} \leq V_{Rd} \Rightarrow V_{Ed} \leq \frac{A_w 0,58 f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 4,11 \leq \frac{1548 \cdot 0,58 \cdot 275 \cdot 10^{-3}}{1,00} \Rightarrow 4,11 \leq 247 \text{ kN} \quad (\text{voldoet})$

d. Schema, krachtsverdeling en toets samengesteld vloerrandprofiel buis 100x50x4 + L100x100x10 mm

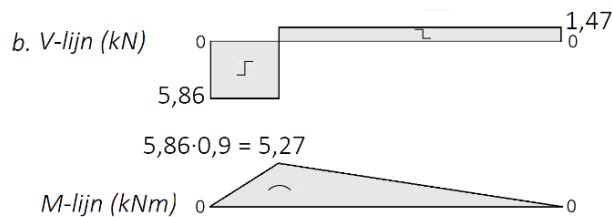
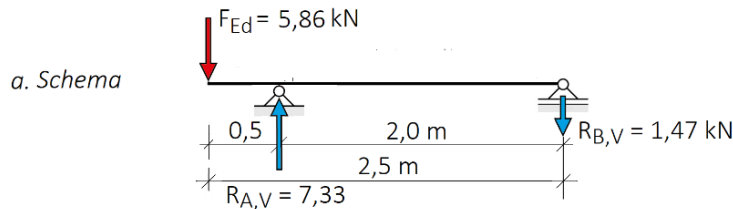
Materiaaleigenschappen en doorsnedegegevens, als opgave c.

S275 $f_y = 275 \text{ N/mm}^2$; $\gamma_{M0} = 1,00$ (buisprofiel) $\Leftarrow$ maatgevend voor toetsing van de sterkte

S355 $f_y = 355 \text{ N/mm}^2$; $\gamma_{M0} = 1,00$ (hoekprofiel)

Samengesteld profiel $W_{el,y,b} = 53,8 \cdot 10^3 \text{ mm}^3$ (zie opgave 2c, kleinste W is maatgevend)

$A_w = (10 + 4 + 4) \cdot 86 = 1548 \text{ mm}^2$ (zie opgave 4b)



buiging

$$M_{Ed} \leq M_{Rd} \Rightarrow M_{Ed} \leq \frac{W_{el,y} f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 5,27 \leq \frac{53,8 \cdot 10^3 \cdot 275 \cdot 10^{-6}}{1,00} \Rightarrow 5,27 \leq 14,8 \text{ kNm} \quad (\text{voldoet})$$

afschuiving

$$V_{Ed} \leq V_{Rd} \Rightarrow V_{Ed} \leq \frac{A_w 0,58 f_y}{\gamma_{M0}} \Rightarrow 5,86 \leq \frac{1548 \cdot 0,58 \cdot 275 \cdot 10^{-3}}{1,00} \Rightarrow 5,86 \leq 247 \text{ kN} \quad (\text{voldoet})$$

12 Betonnen transformatorhuisje

C50/60 $f_{ctd} = 1,90 \text{ N/mm}^2$ (rekenwaarde treksterkte)

$f_{cd} = 33,3 \text{ N/mm}^2$ (rekenwaarde druksterkte)

a. Controle overschrijding van de treksterkte van beton

Plaat BC

In B is het moment het grootst en dus is deze snede maatgevend.

Er wordt een krachtoets uitgevoerd, maar een spanningstoets is ook mogelijk (met W dan links in de toetsingsformule).

$$M_{Ed} \leq M_{cr} \Rightarrow M_{Ed} \leq W f_{ctd} \Rightarrow 330 \leq \left(\frac{1}{6} \cdot 1700 \cdot 220^2 \right) \cdot 1,90 \cdot 10^{-6} \Rightarrow 330 \leq 26,1 \text{ kNm} \quad (\text{ruime overschrijding, scheurvorming van beton is onvermijdelijk})$$

De buigtrekwapening in de plaat moet het evenwicht garanderen (zie vraag b).

Wand AB

In de wand is het moment over de gehele lengte constant (330 kNm). De drukkracht is bovenin het kleinst (120 kN). Als er trekspanningen ontstaan, dan zijn die bovenin de wand het grootst. De combinatie van buigend moment én normaal-drukkracht kan uitsluitend met een spanningscontrole worden gecontroleerd.

Trek- en drukspanning door buigend moment (incl. 2^e-orde):

$$\sigma_{M_{Ed}} = \frac{M_{Ed}}{W} = \frac{1,05 \cdot 330 \cdot 10^6}{\frac{1}{6} \cdot 1700 \cdot 300^2} = 13,6 \text{ N/mm}^2$$

Drukspanning door normaalrukkracht:

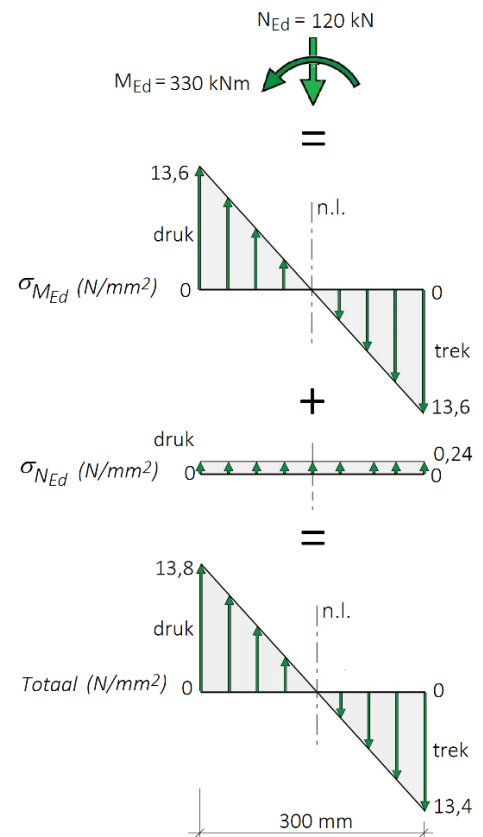
$$\sigma_{N_{Ed}} = \frac{N_{Ed}}{A} = \frac{120 \cdot 10^3}{1700 \cdot 300} = 0,24 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{erg laag})$$

Samen geeft dit een maximale trekspanning:

$$\sigma_{Ed} = 13,6 - 0,24 = 13,4 \text{ N/mm}^2$$

Controle $\sigma_{Ed} \leq f_{ctd} \Rightarrow 13,4 \leq 1,90 \text{ N/mm}^2$ (ruime overschrijding, scheurvorming van beton is onvermijdelijk)

De buigtrekwapening in de wand moet het evenwicht garanderen (zie vraag d).



b. Buigtrekwapening in plaat BC

In B is het moment het grootst en dus is deze snede voor berekening van de wapening maatgevend. De dekking en afstand tot hart wapening wordt geschat op 40 mm. De nuttige hoogte is dan: $d = 220 - 40 = 180$ mm. Met de ontwerpformule voor de globale hoeveelheid buigtrekwapening geeft dit:

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{f_{yd} 0,9d} = \frac{330 \cdot 10^6}{435 \cdot 0,9 \cdot 180} = 4682 \text{ mm}^2 \quad \text{toegepast } 15\phi 20 \quad (15 \cdot \frac{1}{4} \pi 20^2 = 4710 \text{ mm}^2)$$

c. Controle overschrijding van de druksterkte van beton in de wand

Onderin de wand in A is de drukspanning ten gevolge van buigend moment en drukkracht het grootst. Als deze drukspanning groter is dan de druksterkte van beton is drukwapening vereist. Uit vraag a volgt dat het moment van 330 kNm een drukspanning geeft van $13,6 \text{ N/mm}^2$. De normaalrukkracht van 161 kN geeft een drukspanning:

$$\sigma_{N_{Ed}} = \frac{N_{Ed}}{A} = \frac{161 \cdot 10^3}{1700 \cdot 300} = 0,32 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{erg laag})$$

Samen geeft dit een maximale drukspanning:

$$\sigma_{Ed} = 13,6 + 0,32 = 13,9 \text{ N/mm}^2$$

Controle $\sigma_{Ed} \leq f_{cd} \Rightarrow 13,9 \leq 33,3 \text{ N/mm}^2$ (voldoet, waardoor drukwapening achterwege kan blijven)

d. Buigtrekwapening in de wand

In de wand is over de gehele lengte een moment aanwezig van 330 kNm. De dekking en afstand tot hart wapening wordt geschat op 40 mm. De nuttige hoogte is dan: $d = 300 - 40 = 260$ mm. Met de ontwerpformule voor de globale hoeveelheid buigtrekwapening geeft dit:

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{f_{yd} 0,9d} = \frac{330 \cdot 10^6}{435 \cdot 0,9 \cdot 260} = 3242 \text{ mm}^2 \quad \text{benodigd } 11\phi 20 \quad (11 \cdot \frac{1}{4} \pi 20^2 = 3454 \text{ mm}^2)$$

Om praktische reden wordt geadviseerd dezelfde hoeveelheid wapening in de wand aan te houden als in het dak. Alle staven vanuit het dak kunnen dan worden omgezet in de wand.

e. Schematische weergave van de ligging van de buigtrekwapening (met verdeelwapening)

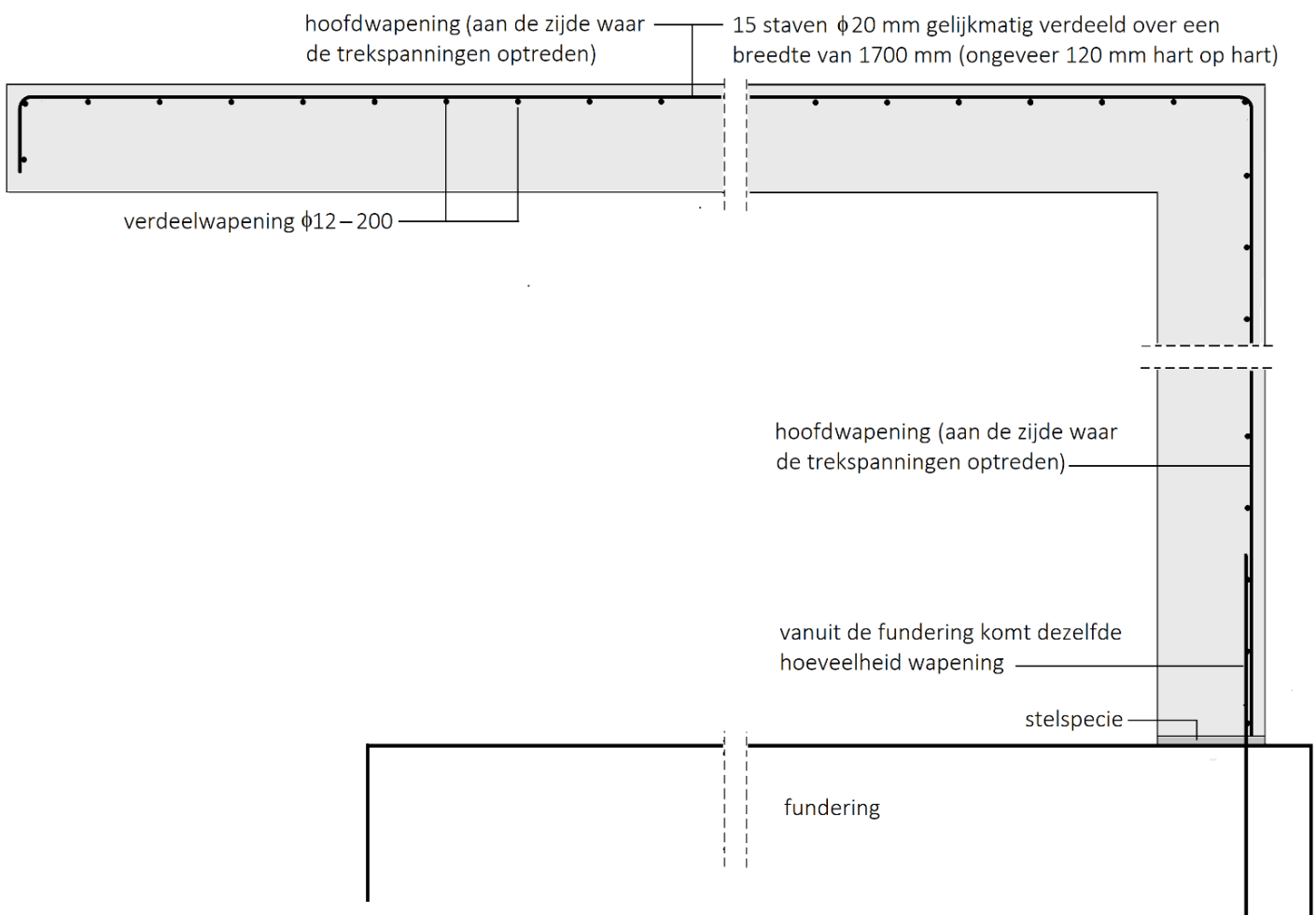
De buigtrekwapening ($\phi 20-120$) neemt de trekkrachten in de doorsnede op die ontstaan door uitwendige belasting (zie wapeningsberekening vragen b en d) en wordt hoofdwapening genoemd.

Aanvullende informatie.

In dwarsrichting wordt verdeelwapening aangebracht, minimaal 20% van de hoofdwapening:

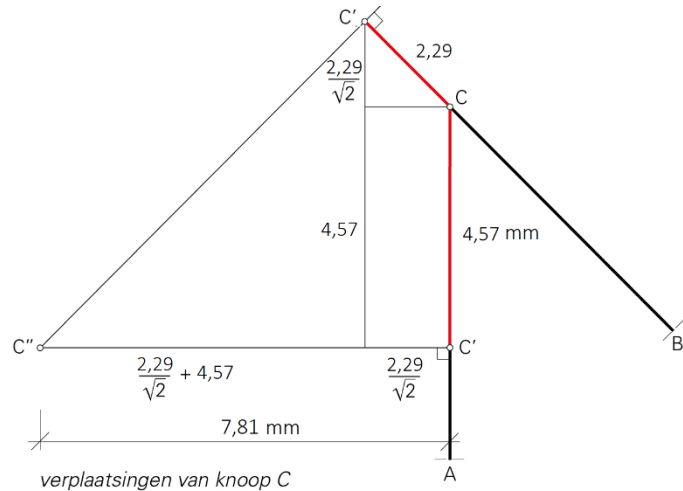
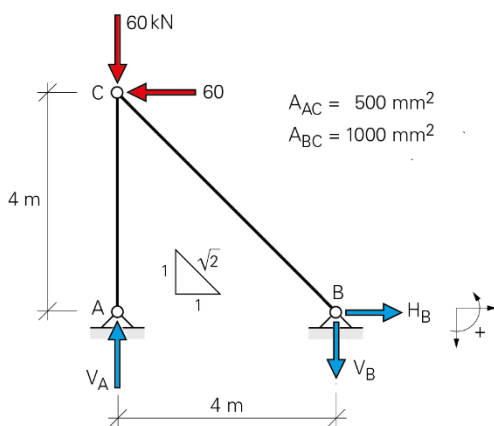
$20\% \cdot 314 \cdot (1000/120) = 523 \text{ mm}^2$ per m plaat. Een wapeningskeus $\phi 12-200$ ($\frac{1}{4}\pi 12^2 \cdot 1000/200 = 565 \text{ mm}^2/\text{m}$) volstaat. Deze wapening verdeelt de belasting, zoals van een puntlast, over de plaatbreedte. Door het kruislings wapenen ontstaat een wapeningsnet. Wapening heeft daarnaast altijd de functie als krimpwapening (verdeling van krimpscheuren in heel veel kleine scheurtjes) en in geval van prefab beton ook als transportwapening.

Bij deze dikte van 300 mm is het gebruikelijk ook aan de andere zijde (de drukzijde) een wapeningsnet aan te brengen (krimp- en transportwapening). Deze wapening is niet getekend.



1 Staafvormige constructies opgebouwd uit twee pendelstaven

Constructie 1



Reactiekrachten

$$\begin{aligned}\sum M_{\text{om A}} = 0 &\Rightarrow 60 \cdot 4 - V_B \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_B = +60 \text{ kN} \downarrow \\ \sum V = 0 &\Rightarrow 60 - V_A + 60 = 0 \Rightarrow V_A = +120 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

Met deze twee reacties kunnen -uit het evenwicht van de staven- de staafkrachten berekend worden.

Staafkrachten

$$\begin{aligned}N_{A-C} &= 120 \text{ kN (druk)} \\ N_{B-C} &= 60\sqrt{2} \text{ kN (trek)}\end{aligned}$$

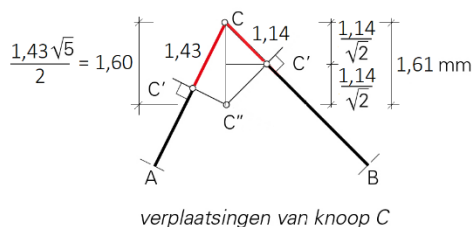
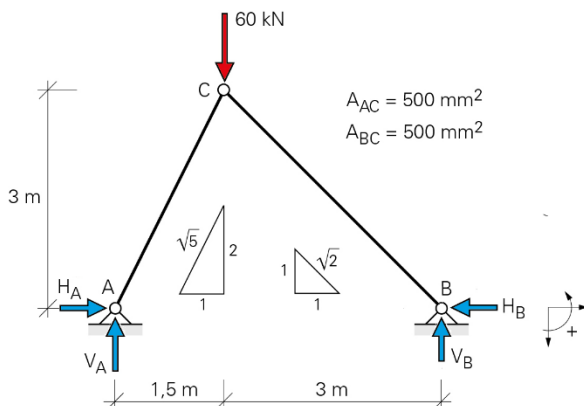
Staafvervormingen

$$\begin{aligned}\Delta L_{AC} &= \frac{N_{A-C} L_{AC}}{EA} = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 4000}{210 \cdot 10^3 \cdot 500} = 4,57 \text{ mm (verkorting)} \\ \Delta L_{BC} &= \frac{N_{B-C} L_{BC}}{EA} = \frac{60\sqrt{2} \cdot 10^3 \cdot 4000\sqrt{2}}{210 \cdot 10^3 \cdot 1000} = 2,29 \text{ mm (verlenging)}\end{aligned}$$

Verplaatsing knoop C

$$\begin{aligned}\text{verticale verplaatsing} &= 4,6 \text{ mm} \downarrow \\ \text{horizontale verplaatsing} &= 7,8 \text{ mm} \leftarrow\end{aligned}$$

Constructie 2



Reactiekrachten

$$\begin{aligned}\sum M_{\text{om A}} = 0 &\Rightarrow -60 \cdot 1,5 + V_B \cdot 4,5 = 0 \Rightarrow V_B = +20 \text{ kN} \uparrow \\ \sum V = 0 &\Rightarrow 60 - V_A - 20 = 0 \Rightarrow V_A = +40 \text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

Met deze twee reacties kunnen -uit het evenwicht van de staven- de staafkrachten berekend worden.

Staafkrachten

$$N_{A-C} = (40/2)\sqrt{5} = 20\sqrt{5} \text{ kN (druk)}$$

$$N_{B-C} = 20\sqrt{2} \text{ kN (druk)}$$

Staafvervormingen

$$\Delta L_{AC} = \frac{N_{A-C} L_{AC}}{EA} = \frac{20\sqrt{5} \cdot 10^3 \cdot 1500\sqrt{5}}{210 \cdot 10^3 \cdot 500} = 1,43 \text{ mm (verkorting)}$$

$$\Delta L_{BC} = \frac{N_{B-C} L_{BC}}{EA} = \frac{20\sqrt{2} \cdot 10^3 \cdot 3000\sqrt{2}}{210 \cdot 10^3 \cdot 500} = 1,14 \text{ mm (verkorting)}$$

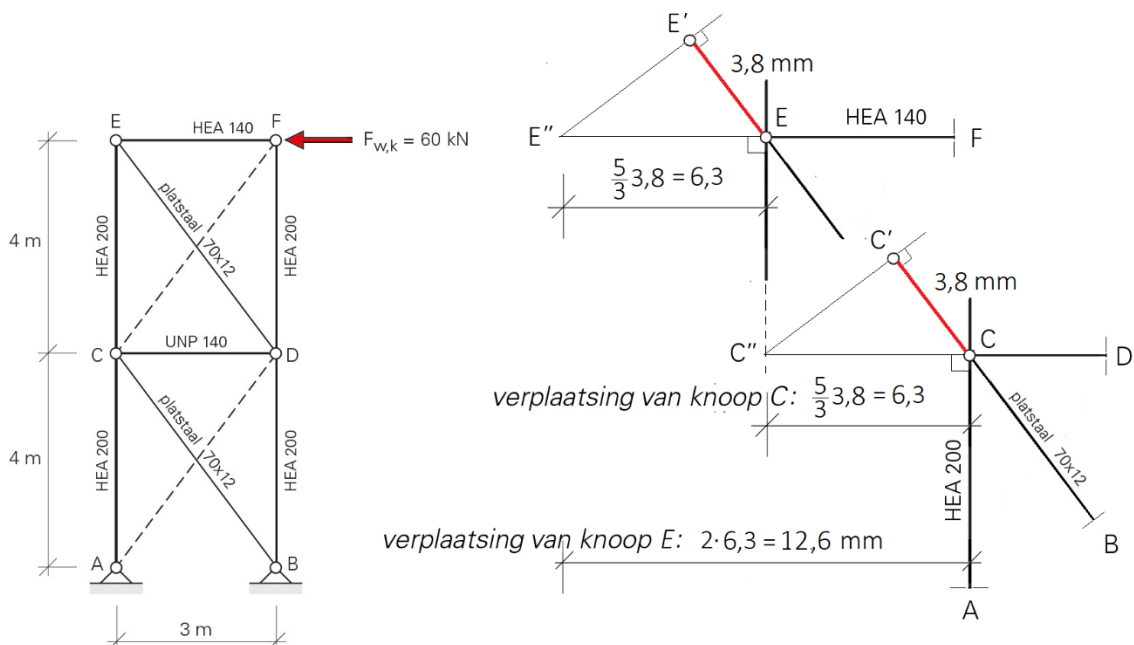
Verplaatsing knoop C verticale verplaatsing = 1,6 mm ↓
horizontale verplaatsing = 0 (nihil)

2 Stabiliteitsverband stalen hal

- De normaalkrachten overheersen (momenten en dwarskrachten zijn verwaarloosbaar klein). Voor de krachtsverdeling maakt het dan geen/nauwelijks verschil of knopen als scharnieren of momentvast worden geschematiseerd. Een constructie met scharnieren is eenvoudig met de hand te berekenen.
- Bij de belasting van rechts worden de gestippelde schoren op druk belast. Het platstaal is zéér knikgevoelig waardoor nauwelijks drukkracht kan worden opgenomen. De gestippelde schoren zijn bij een belasting van rechts niet relevant.
- Het stabiliteitsverband wordt in *elke* horizontale snede (vanaf de bovenrand tot aan de fundering) belast door een horizontale dwarskracht van 60 kN. Deze kracht wordt door de schoor opgenomen, de kolommen kunnen immers uitsluitend verticale krachten opnemen. De schoor in zowel het bovenste als in het onderste vak wordt even zwaar belast. Uit het evenwicht van de schoor in een 3,4,5-driehoek volgt dat deze wordt belast op een normaaltrekkraft van $5/3 \cdot 60 = 100$ kN. De schoorkracht kan natuurlijk ook met de knooppuntmethode of met de snedemethode worden berekend.

Verlenging van elke schoor door wind en 2^e orde (met 20% extra vervorming):

$$\Delta L_{CF} = \Delta L_{BE} = 1,2 \frac{FL}{EA} = 1,2 \cdot \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 4000\sqrt{2}}{210 \cdot 10^3 \cdot (70 \cdot 12)} = 1,2 \cdot 3,21 = 3,8 \text{ mm}$$



Horizontale verplaatsing knoop C = 6,3 mm ←

Horizontale verplaatsing knoop E = 12,6 mm ←

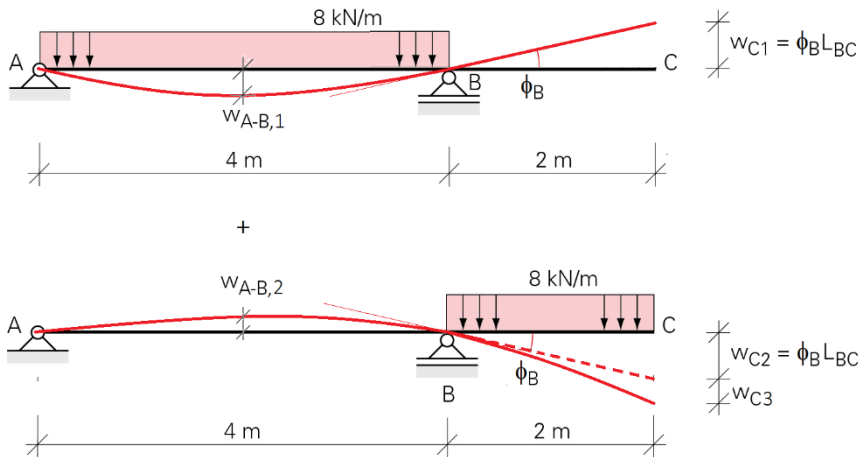
- Voor een industrieel gebouw met één bouwlaag kan voor de horizontale verplaatsing worden aangehouden:

$$u \leq h/150 \Rightarrow 12,6 \leq 8000/150 = 53,3 \text{ mm (voldoet)}$$

3 Ligger IPE 220 op twee steunpunten met overstek

a. Doorbuigingen en opbuigingen w_{A-B} en w_C

Twee deelsommen:



$$EI = 210 \cdot 10^3 \cdot 2772 \cdot 10^4 = 5,82 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$$

$$M_B = \frac{1}{2} q L_{BC}^2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2^2 = 16 \text{ kNm}$$

$$w_{A-B,1} = \frac{5qL_{AB}^4}{384EI} = \frac{5 \cdot 8 \cdot 4000^3}{384 \cdot 5,82 \cdot 10^{12}} = 4,58 \text{ mm} \downarrow$$

$$w_{A-B,2} = \frac{M_B L_{AB}^2}{16EI} = \frac{16 \cdot 10^6 \cdot 4000^2}{16 \cdot 5,82 \cdot 10^{12}} = 2,75 \uparrow$$

$$w_{A-B} = 1,8 \text{ mm} \downarrow$$

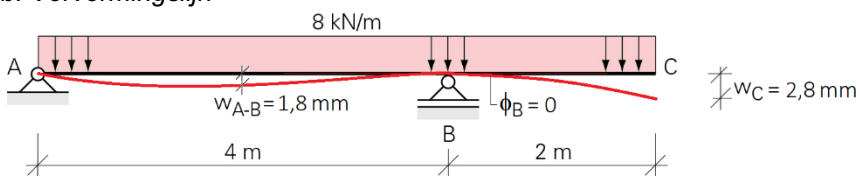
$$w_{C1} = \phi_B \cdot L_{BC} = \frac{q L_{BC}^3}{24EI} \cdot L_{BC} = \frac{8 \cdot 4000^3}{24 \cdot 5,82 \cdot 10^{12}} \cdot 2000 = 7,33 \text{ mm} \uparrow$$

$$w_{C2} = \phi_B \cdot L_{BC} = \frac{M_B L_{AB}}{3EI} \cdot L_{BC} = \frac{16 \cdot 10^6 \cdot 4000}{3 \cdot 5,82 \cdot 10^{12}} \cdot 2000 = 7,33 \downarrow$$

$$w_{C3} = \frac{q L_{BC}^4}{8EI} = \frac{8 \cdot 2000^4}{8 \cdot 5,82 \cdot 10^{12}} = 2,75 \downarrow$$

$$w_C = 2,8 \text{ mm} \downarrow$$

b. Vervormingslijn



Opmerking.

Bij deze belastingsituatie is de hoekverdraaiing in B gelijk aan 0 (immers $w_{C1} = w_{C2}$). Dat betekent dat een overstek met een lengte gelijk aan de helft van de overspanning van het achterliggende liggedeelte AB hetzelfde effect heeft als een tweeveldsligger op drie steunpunten met gelijke overspanningen. Immers zo'n symmetrische ligger heeft in B ook een hoekverdraaiing die gelijk is aan nul.

4 Gelamineerde vloerligger b x h = 160x1000 mm in een kantoorgebouw

Uitgangspunten

Sterkteklasse GL24h: $E_{0,mean} = 11600 \text{ N/mm}^2$

Vervormingsfactor klimaatklasse 1 (binnen): $k_{def} = 0,6$

Quasi-blijvende factor vloer in kantoorgebouw: $\psi_2 = 0,3$

Berekening en toetsing van de doorbuiging

Doorbuigingsformule: $w = \frac{5qL^4}{384EI} \downarrow$

$$w_{on} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 12000^4}{384 \cdot 11600 \cdot \frac{1}{12} \cdot 160 \cdot 1000^3} = 3,5 \text{ mm}$$

$$w_{g,kr} = 0,6 \cdot 3,5 = 2,1$$

$$w_{v,dir} = \frac{5 \cdot 10 \cdot 12000^4}{384 \cdot 11600 \cdot \frac{1}{12} \cdot 160 \cdot 1000^3} = 17,5$$

$$w_{v,kr} = 0,3 \cdot 0,6 \cdot 17,5 = 3,2$$

$$w_{tot} = 26,3 \text{ mm} \downarrow$$

$$\text{toets } w_{bij} \leq L/333 \Rightarrow w_{bij} = w_{tot} - w_{on} \leq 12000/333 \Rightarrow 26,3 - 3,5 = 22,8 \leq 36,0 \text{ mm (voldoet)}$$

$$\text{toets } w_{eind} \leq L/250 \Rightarrow w_{eind} = w_{tot} - w_{ze} \leq 12000/250 \Rightarrow 26,3 - 0 \leq 48,0 \text{ mm (voldoet)}$$

5 Dakligger b x h = 59x156 mm overkapping tankstation

Uitgangspunten

Sterkteklasse C18: $E_{0,mean} = 9.000 \text{ N/mm}^2$

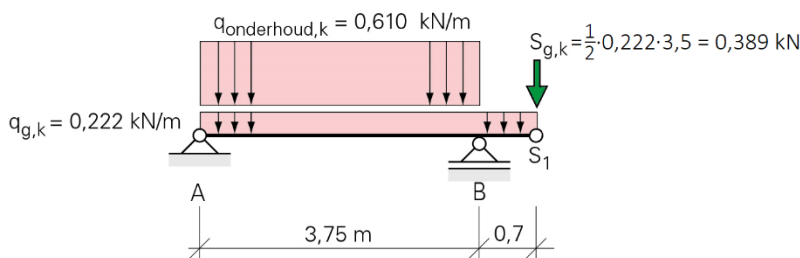
Vervormingsfactor klimaatklasse 2 (buiten overdekt): $k_{def} = 0,8$

Quasi-blijvende factor voor dakbelasting: $\psi_2 = 0$

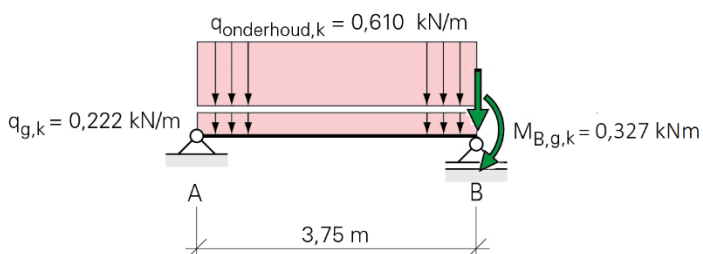
$EI = 9000 \cdot 1/12 \cdot 59 \cdot 156^3 = 16,8 \cdot 10^{10} \text{ Nmm}^2$

Liggerdeel A-B

Schematisering



$$M_{Bg,k} = \frac{1}{2} \cdot 0,222 \cdot 0,7^2 + 0,389 \cdot 0,7 = 0,327 \text{ kNm}$$



Berekening en toetsing van de doorbuiging

Doorbuigingsformules: $w = \frac{5qL^4}{384EI}$ en $w = \frac{ML^2}{16EI}$

$$w_{on} = \frac{5 \cdot 0,222 \cdot 3750^4}{384 \cdot 16,8 \cdot 10^{10}} - \frac{0,327 \cdot 10^6 \cdot 3750^2}{16 \cdot 16,8 \cdot 10^{10}} = 1,7 \text{ mm} \downarrow$$

$$w_{g,kr} = 0,8 \cdot 1,7 = 1,4 \downarrow$$

$$w_{onderh.,dir} = \frac{5 \cdot 0,61 \cdot 3750^4}{384 \cdot 16,8 \cdot 10^{10}} = 9,3 \downarrow$$

$$w_{onderh.,kr} = 0 \cdot 0,8 \cdot 9,3 = 0$$

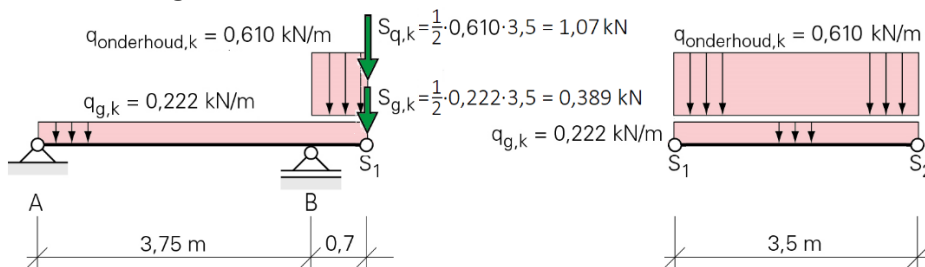
$$w_{tot} = 12,4 \text{ mm} \downarrow$$

toets $w_{bij} \leq L/250 \Rightarrow w_{bij} = w_{tot} - w_{on} \leq 3750/250 \Rightarrow 12,4 - 1,7 = 10,7 \leq 15 \text{ mm} \text{ (voldoet)}$

toets $w_{eind} \leq L/250 \Rightarrow w_{eind} = w_{tot} - w_{ze} \leq 3750/250 \Rightarrow 12,4 - 0 \leq 15 \text{ mm} \text{ (voldoet)}$

Liggerdeel B-C

Schematisering



$$M_{Bg,k} = \frac{1}{2} \cdot 0,222 \cdot 0,7^2 + 0,389 \cdot 0,7 = 0,327 \text{ kNm}$$

$$M_{Bq,k} = \frac{1}{2} \cdot 0,610 \cdot 0,7^2 + 1,07 \cdot 0,7 = 0,899 \text{ kNm}$$

Berekening en toetsing van de doorbuiging

Door buiging liggerdeel AB: $\phi_B = \frac{q_{AB} L_{AB}^3}{24EI}$ en $\phi_B = \frac{M_B L_{AB}}{3EI}$

Door belasting op overstek BS1: $w = \frac{qL^4}{8EI}$ en $w = \frac{FL^3}{3EI}$

Door lijnlast op liggerdeel S1S2: $w = \frac{5qL^4}{384EI}$

Doorbuigingen halverwege overspanning liggerdeel S1S2

w_{on} door: $q_{g,k} = 0,222 \text{ kN/m}$ op AB:	$\phi_B \cdot L_{BC} = \frac{0,222 \cdot 3750^3}{24 \cdot 16,8 \cdot 10^{10}} \cdot 700 = -2,03 \text{ mm} \uparrow$
$M_{B,gk}$ op AB t.g.v. $q_{g,k} = 0,222 \text{ kN/m}$ op BS1:	$\phi_B \cdot L_{BC} = \frac{0,327 \cdot 10^6 \cdot 3750}{3 \cdot 16,8 \cdot 10^{10}} \cdot 700 = 1,70 \downarrow$
$q_{g,k} = 0,222 \text{ kN/m}$ op BS1:	$\frac{qL^4}{8EI} = \frac{0,222 \cdot 700^4}{8 \cdot 16,8 \cdot 10^{10}} = 0,04 \downarrow$
$S_{gk} = 0,389 \text{ kN}$ op BS1:	$\frac{FL^3}{3EI} = \frac{0,389 \cdot 10^3 \cdot 700^3}{3 \cdot 16,8 \cdot 10^{10}} = 0,26 \downarrow$
	Verplaatsing $S_1 = -0,03 \text{ mm} \uparrow$
$q_{g,k} = 0,222 \text{ kN/m}$ op liggerdeel S1S2:	$\frac{5qL^4}{384EI} = \frac{5 \cdot 0,222 \cdot 3500^4}{384 \cdot 16,8 \cdot 10^{10}} = 2,58 \downarrow$
	$w_{on} = 2,55 \text{ mm} \downarrow$

$$w_{g,kr} = 0,8 \cdot 2,55 = 2,04 \text{ mm} \downarrow$$

$W_{onderh,dir}$ door: $M_{B,qk}$ op AB t.g.v. $q_{q,k} = 0,610$ kN/m op BS1: $\phi_B \cdot L_{BC} = \frac{0,610 \cdot 10^6 \cdot 3750}{3 \cdot 16,8 \cdot 10^{10}} \cdot 700 = 3,18 \text{ mm} \downarrow$
 $q_{q,k} = 0,610$ kN/m op BS1: $\frac{qL^4}{8EI} = \frac{0,610 \cdot 700^4}{8 \cdot 16,8 \cdot 10^{10}} = 0,11 \downarrow$
 $S_{qk} = 1,07$ kN op B-S1: $\frac{FL^3}{3EI} = \frac{1,07 \cdot 10^3 \cdot 700^3}{3 \cdot 16,8 \cdot 10^{10}} = 0,73 \downarrow$
 Verplaatsing $S_1 = 4,02 \text{ mm} \downarrow$
 $q_{g,k} = 0,610$ kN/m op liggerdeel S_1S_2 : $\frac{5qL^4}{384EI} = \frac{5 \cdot 0,610 \cdot 3500^4}{384 \cdot 16,8 \cdot 10^{10}} = 7,09 \downarrow$
 $W_{onderh,dir} = 11,1 \text{ mm} \downarrow$
 $W_{onderh,kr} = 0 \cdot 0,8 \cdot 11,1 = 0$

$w_{tot} = 2,55 + 2,04 + 11,1 + 0 = 15,7 \text{ mm}$

toets $w_{bij} \leq L/250 \Rightarrow w_{bij} = w_{tot} - w_{on} \leq (2 \cdot 700 + 3500)/250 \Rightarrow 15,7 - 2,55 = 13,2 \leq 19,6 \text{ mm} \text{ (voldoet)}$
 toets $w_{eind} \leq L/250 \Rightarrow w_{eind} = w_{tot} - w_{ze} \leq (2 \cdot 700 + 3500)/250 \Rightarrow 15,7 - 0 \leq 19,6 \text{ mm} \text{ (voldoet)}$

6 Gelamineerde ligger b x h = 205x1200 mm overkapping tankstation

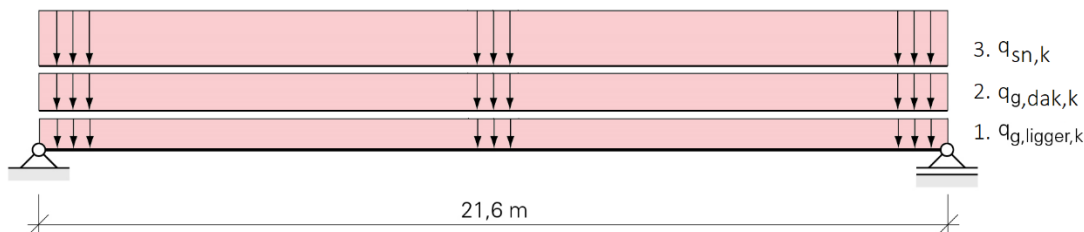
Blijvende belasting dak (excl. e.g. gelamineerde ligger) $F_{g,k} = 1,04$ kN
 Veranderlijke belasting sneeuw $F_{sn,k} = 1,61$
 $F_{(g+sn),k} = 2,65$ kN

Uitgangspunten

Sterkteklasse GL28h: $E_{0,mean} = 12.600 \text{ N/mm}^2$
 Volumieke massa vurenhout: $\rho_m = 500 \text{ kg/m}^3$
 Vervormingsfactor klimaatklasse 2 (buiten overdekt): $k_{def} = 0,8$
 Quasi-blijvende factor voor dakbelasting: $\psi_2 = 0$

Schematisering

De 35 puntlasten van de dakliggers, h.o.h. 0,61 m, worden (natuurlijk) tot een lijnlast geschematiseerd.



1. Eigen gewicht gelamineerde ligger $q_{g,ligger,k} = 0,205 \cdot 1,20 \cdot 5 = 1,23 \text{ kN/m}$
 2. Eigen gewicht dak $q_{g,dak,k} = 1,04/0,61 = 1,71$
 $q_{g,tot} = 2,94 \text{ kN/m}$

3. Veranderlijke belasting sneeuw $q_{sn,k} = 1,61/0,61 = 2,64 \text{ kN/m}$

Berekening en toetsing van de doorbuiging

Doorbuigingsformule: $w = \frac{5qL^4}{384EI}$

$w_{on} = \frac{5 \cdot 2,94 \cdot 21600^4}{384 \cdot 12600 \cdot \frac{1}{12} \cdot 205 \cdot 1200^3} = 22,4 \text{ mm}$

$w_{g,kr} = 0,8 \cdot 22,4 = 17,9$

$w_{sn,dir} = \frac{5 \cdot 2,64 \cdot 21600^4}{384 \cdot 12600 \cdot \frac{1}{12} \cdot 205 \cdot 1200^3} = 20,1$

$w_{sn,kr} = 0 \cdot 0,8 \cdot 20,1 = 0$

$w_{tot} = 60,4 \text{ mm} \downarrow$

$$\begin{aligned} \text{toets } w_{\text{bij}} \leq L/250 &\Rightarrow w_{\text{bij}} = w_{\text{tot}} - w_{\text{on}} \leq 21600/250 \Rightarrow 60,4 - 22,4 = 38,0 \leq 86,4 \text{ mm} \quad (\text{voldoet}) \\ \text{toets } w_{\text{eind}} \leq L/250 &\Rightarrow w_{\text{eind}} = w_{\text{tot}} - w_{\text{ze}} \leq 21600/250 \Rightarrow 60,4 - 0 \leq 86,4 \text{ mm} \quad (\text{voldoet}) \end{aligned}$$

Afvoer van regenwater kan op verschillende manieren gebeuren. Voor afschot is het advies: 15 mm/m. Met een afvoer t.p.v. de kolommen is een zeeg nodig ter grootte van: $12,6/2 \times 15 \text{ mm/m} + 60 \text{ mm} = 155 \text{ mm}$.

7 Latei HEA 140 boven de entree van twee woningen

a. Acceptabele doorbuigingseisen

De volgende eisen lijken acceptabel: $w_{\text{bij}} \leq L/1200 = 3750/1500 = 2,5 \text{ mm}$ en $w_{\text{eind}} \leq L/1000 = 3750/700 = 5,4 \text{ mm}$. De doorbuiging w_{on} (door eigen gewicht van het metselwerk) treedt op in bouwphase. Het metselwerk verkeerd dan in plastische fase en zal mee vervormen, waardoor scheurvorming uit zal blijven. Belangrijker is dat de doorbuiging niet zichtbaar is (doorhangende latei). Een doorbuiging (incl. vervorming door wind) van 5,4 mm lijkt acceptabel. Daarnaast geeft de windbelasting een doorbuiging die beperkt moet blijven omdat doorbuiging van de latei tot scheurvorming van het metselwerk kan leiden (bovenin de borstwering t.p.v. de oplegging). Een doorbuiging van 2,5 mm lijkt acceptabel.

b. Berekening en toetsing van de doorbuiging

Uitgangspunten

Staalsoort S235: $E = 210.000 \text{ N/mm}^2$

Doorbuigingsformules: $w = \frac{5qL^4}{384EI}$ en $w = \frac{FL^3}{48EI}$

$$w_{\text{on}} = \frac{5 \cdot 2,50 \cdot 3750^4}{384 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 1033 \cdot 10^4} + \frac{2,24 \cdot 10^3 \cdot 3750^3}{48 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 1033 \cdot 10^4} = 4,1 \text{ mm}$$

$$w_{\text{w,dir}} = \frac{2,60 \cdot 10^3 \cdot 3750^3}{48 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 1033 \cdot 10^4} = 1,3$$

$w_{\text{tot}} = 5,4 \text{ mm} \downarrow$

$$\begin{aligned} \text{toets } w_{\text{bij}} \leq L/250 &\Rightarrow w_{\text{bij}} = w_{\text{tot}} - w_{\text{on}} \leq 3750/1500 \Rightarrow 1,3 \leq 2,5 \text{ mm} \quad (\text{voldoet}) \\ \text{toets } w_{\text{eind}} \leq L/250 &\Rightarrow w_{\text{eind}} = w_{\text{tot}} - w_{\text{ze}} \leq 21600/700 \Rightarrow 5,4 - 0 \leq 5,4 \text{ mm} \quad (\text{voldoet}) \end{aligned}$$

c. Verkorting van de schuine staaf

De doorbuiging van 4,1 mm van de latei is niet relevant. Deze doorbuiging is al opgetreden en de luifel kan precies op hoogte worden gesteld. Alleen de vervorming door wind (doorbuiging latei en verkorting staaf) moet worden beoordeeld. Door windbelasting verkort de staaf:

$$\Delta L_{\text{wind}} = \frac{FL}{EA} = \frac{[(2,6 \cdot 10^3)/\cos 15] \cdot 3200}{210 \cdot 10^3 \cdot 906} = 0,05 \text{ mm}$$

De verticale verplaatsing van de luifel t.g.v. windbelasting = $1,3 + 0,05 = 1,4 \text{ mm} \downarrow$ is minimaal en dus acceptabel.

8 Stalen liggers in serre De StadsHeer Tilburg

Uitgangspunten

Staalsoort S355 en S275: $E = 210.000 \text{ N/mm}^2$

I.v.m. 'vrij strak' kunnen plaatsen van een kozijn onder de dakrandligger wordt de volgende doorbuigingseisen gehanteerd: $w_{\text{bij}} = w_{\text{eind}} \leq L/800 = 2500/800 = 3 \text{ mm}$.

Berekening en toetsing doorbuiging van de dakrandligger

Doorbuigingsformule: $w = \frac{5qL^4}{384EI}$

$$w_{on} = \frac{5 \cdot 0,63 \cdot 2500^4}{384 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 344 \cdot 10^4} = 0,44 \text{ mm}$$

$$w_{w,dir} = \frac{5 \cdot 1,50 \cdot 2500^4}{384 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 344 \cdot 10^4} = 1,06$$

$$w_{tot} = 1,5 \text{ mm} \downarrow$$

toets $w_{bij} \leq L/800 \Rightarrow w_{bij} = w_{tot} - w_{on} \leq 2500/800 \Rightarrow 1,0 \leq 3 \text{ mm} \quad (\text{voldoet})$

toets $w_{eind} \leq L/800 \Rightarrow w_{eind} = w_{tot} - w_{ze} \leq 2500/800 \Rightarrow 1,5 - 0 \leq 3 \text{ mm} \quad (\text{voldoet})$

Doorbuiging punt D van de vloerrandligger

In deze berekening wordt de totale doorbuiging w_{tot} beoordeeld.

De verticale verplaatsing van punt D ontstaat om twee redenen:

1. w_D door buiging van ligger AD t.g.v. kolombelasting $F_{g,k}$

$$\begin{aligned} w_D &= \phi_c L_{CD} + \frac{FL_{CD}^3}{48EI} \\ &= \frac{M_C L_{AC}}{3EI} L_{CD} + \frac{FL_{CD}^3}{48EI} \\ &= \frac{(2,13 \cdot 0,5 \cdot 10^6) \cdot 2000}{3 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 344 \cdot 10^4} \cdot 500 + \frac{2,13 \cdot 10^3 \cdot 500^3}{48 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 344 \cdot 10^4} \\ &= 0,49 + 0,008 = 0,49 \text{ mm} \downarrow \end{aligned}$$

2. w_D door verlenging van de schoor t.g.v. $F_{g,k}$, $q_{g,k}$ en $q_{q,k}$

Verticale oplegreactie in oplegging C (= verticale kracht in de schoor):

$$\sum M_{om A} = 0 \Rightarrow 2,13 \cdot 2,5 - R_{C,v} \cdot 2 + (3,80 + 3,13) \cdot 2,5/2 = 0 \Rightarrow R_{C,v} = 6,99 \text{ kN} \uparrow$$

$$\text{Normaaltrekkracht in de schoor } N_{E,k} = (3,44/2,8) \cdot 6,99 = 8,59 \text{ kN}$$

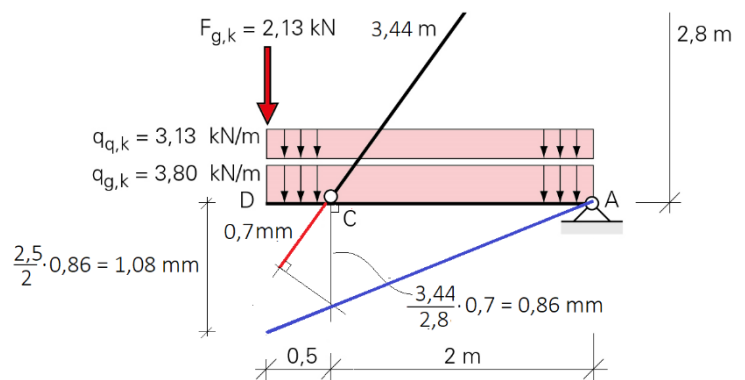
$$\text{Hierin is: } L_{schoor} = \sqrt{(2^2 + 2,8^2)} = 3,44 \text{ m}$$

$$\Delta L_{schoor} = \frac{FL}{EA} = \frac{8,59 \cdot 10^3 \cdot 3440}{210 \cdot 10^3 \cdot (\frac{1}{4} \pi 16^2)} = 0,7 \text{ mm}$$

$$w_D = 1,08 \text{ mm} \downarrow \text{ (zie afbeelding)}$$

Totale verticale verplaatsing in D:

$$w_{tot} = 0,49 + 1,08 = 1,6 \text{ mm} \downarrow$$



Deze verplaatsing van 1,6 mm valt geheel binnen bouwtoelanties. Bovendien worden de schoren -als de betonvloer en het dak zijn geplaatst- op lengte gedraaid zodat het randprofiel precies waterpas kan worden gesteld, waardoor plaats- en maatafwijkingen (die bovendien veel groter zijn dan 1,6 mm!) worden geelimineerd. Door de nastelmogelijkheid kunnen in bovenstaande berekening de vervormingen door de blijvende belastingen F_{Gk} en $q_{g,k}$ dus achterwege blijven. Tijdens gebruik zal dan alleen de vervorming t.g.v. de veranderlijke belasting optreden. De verplaatsing van punt D is door deze belasting slechts: $1,6 - 0,49 - [3,80/(3,13 + 3,80)]1,08 = 0,5 \text{ mm}$. De architect zal gerustgesteld zijn.

9 Betonnen transformatorhuisje

Uitgangspunten

Betonsterkteklasse C50/60: $E_{cm} = 37.300 \text{ N/mm}^2$

Kruipcoëfficiënt: $\varphi = 1,4$

Quasi-blijvende factor voor dakbelasting: $\psi_2 = 0$

a. Berekening en toetsing van de verkorting schijf AB

Normaaldrukkracht in schijf AB

$$\begin{aligned} \text{Blijvend} \quad \text{e.g. schijf} \quad 12,8 \cdot 2,9 &= 37,1 \text{ kN} \\ \text{e.g. dak} \quad 9,35 \cdot 5,5 &= \underline{41,4} \\ F_{g,k} &= 78,5 \text{ kN} \end{aligned}$$

Veranderlijke belasting $F_{q,k} = 8,5 \cdot 5,5 = 46,8 \text{ kN}$

Verkorting

$$\Delta L_{on} = \frac{78,5 \cdot 10^3 \cdot 2900}{37300 \cdot (1700 \cdot 300)} = 0,012 \text{ mm}$$

$$\Delta L_{g,kr} = 1,4 \cdot 0,012 = 0,017$$

$$\Delta L_{q,dir} = \frac{46,5 \cdot 10^3 \cdot 2900}{37300 \cdot (1700 \cdot 300)} = 0,007$$

$$\begin{aligned} \Delta L_{g,kr} &= 0 \cdot 1,4 \cdot 0,012 = \underline{0} \\ \Delta L_{tot} &= 0,04 \text{ mm} \end{aligned}$$

Conclusie: deze vervorming is te verwaarlozen. Dat is (bijna) altijd het geval. In de praktijk wordt het korter worden van kolommen en wanden daarom normaliter niet getoetst.

b. Berekening en toetsing van de verticale en horizontale verplaatsing van punt C

Verticale verplaatsing van punt C

De verticale lijnlast van de schijf $q_{g,k} = 12,8 \text{ kN/m}$ heeft geen invloed op deze verplaatsing

$$M_{Bg,k} = \frac{1}{2} \cdot 9,35 \cdot 5,5^2 = 141 \text{ kNm}$$

$$M_{Bq,k} = \frac{1}{2} \cdot 8,50 \cdot 5,5^2 = 129 \text{ kNm}$$

$$\begin{aligned} \text{Buiging schijf AB: blijvend} \quad \text{door } M_{Bg,k} &\Rightarrow \phi_B = \frac{M_{LAB}}{EI} \Rightarrow w_C = \phi_B \cdot L_{BC} \\ \text{veranderlijk} \quad \text{door } M_{Bq,k} &\Rightarrow \phi_B = \frac{M_{LAB}}{EI} \Rightarrow w_C = \phi_B \cdot L_{BC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Buiging plaat BC: blijvend} \quad \text{door } q_{g,k} &\Rightarrow w_C = \frac{q L_{BC}^4}{8EI} \\ \text{veranderlijk} \quad \text{door } q_{q,k} &\Rightarrow w_C = \frac{q L_{BC}^4}{8EI} \end{aligned}$$

$$w_{on} = \frac{141 \cdot 10^6 \cdot 2900}{37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 300^3} \cdot 5500 + \frac{9,35 \cdot 5500^4}{8 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 220^3} = 34,7 \text{ mm} \downarrow$$

$$w_{g,kr} = 1,4 \cdot 34,8 = 48,7 \downarrow$$

$$w_{q,dir} = \frac{129 \cdot 10^6 \cdot 2900}{37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 300^3} \cdot 5500 + \frac{8,50 \cdot 5500^4}{8 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 220^3} = 31,7 \downarrow$$

$$\begin{aligned} w_{q,kr} &= 0 \cdot 1,4 \cdot 21,1 = \underline{0} \\ w_{C,tot} &= 115 \text{ mm} \downarrow \end{aligned}$$

$$\text{toets} \quad w_{bij} \leq 2L/250 \Rightarrow w_{bij} = w_{tot} - w_{on} \leq 2 \cdot 5500/250 \Rightarrow 115 - 34,8 = 80 \leq 44 \text{ mm (voldoet niet)}$$

$$\text{toets} \quad w_{eind} \leq 2L/250 \Rightarrow w_{eind} = w_{tot} - w_{ze} \leq 21600/250 \Rightarrow 115 - w_{ze} \leq 44 \text{ mm} \Rightarrow w_{ze} \geq 71 \text{ mm}$$

In bijlage A, paragraaf A.3.3, afb. A.14, is voor de blijvende belasting $q_{g,k} = 9,35 \text{ kN/m}$ de doorbuiging $w_{on} = 34,7 \text{ mm}$ uitgerekend met de methode van het gereduceerde momentenvlak.

Horizontale verplaatsing punt C

$$M_{Bg,k} = 141 \text{ kNm}$$

$$M_{Bq,k} = 129 \text{ kNm}$$

$$\begin{aligned} \text{Buiging schijf AB: blijvend} \quad \text{door } M_{Bg,k} &\Rightarrow u_B = u_C = \frac{ML_{AB}^2}{2EI} \\ \text{veranderlijk} \quad \text{door } M_{Bq,k} &\Rightarrow u_B = u_C = \frac{ML_{AB}^2}{2EI} \end{aligned}$$

$$u_{on} = \frac{141 \cdot 10^6 \cdot 2900^2}{2 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 300^3} = 4,2 \text{ mm} \leftarrow$$

$$u_{g,kr} = 1,4 \cdot 4,2 = 5,9 \leftarrow$$

$$u_{q,dir} = \frac{129 \cdot 10^6 \cdot 2900^2}{2 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 300^3} = 3,8 \leftarrow$$

$$u_{q,kr} = 0 \cdot 1,4 \cdot 3,8 = 0$$

$$u_{C,tot} = 13,9 \text{ mm} \leftarrow$$

Door deze scheefstand zal door het gewicht van de constructie een extra uitbuiging ontstaan. In dit geval is de 2^e-orde uitbuiging 5%. Dit geeft $u_{C,tot} = 1,05 \cdot 13,9 = 14,6 \text{ mm}$.

$$\text{toets } u \leq h/300 \Rightarrow 14,6 \leq 2900/300 = 9,7 \text{ mm (voldoet niet)}$$

Eventueel een lichtere eis accepteren van: $14,6/2900 h \Rightarrow 1/200 h$?

In bijlage A, paragraaf A.3.3, afb. A.14 is voor de blijvende belasting $q_{g,k} = 9,35 \text{ kN/m}$ de uitbuiging $u_{on} = 4,2 \text{ mm}$ uitgerekend met de methode van het gereduceerde momentenvlak.

c. Niet acceptabele verplaatsingen

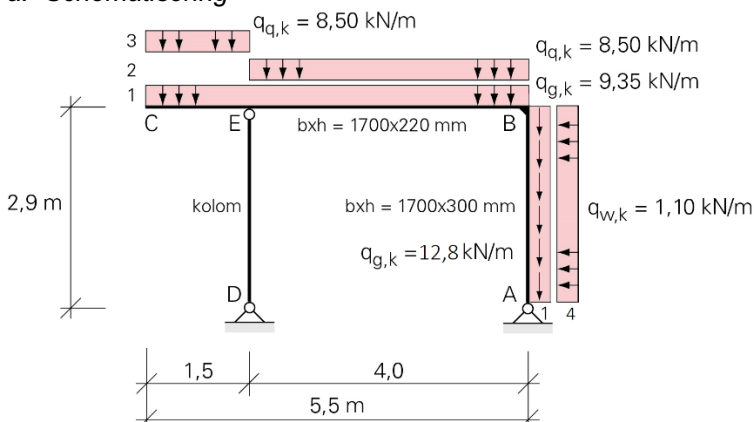
De verticale verplaatsing van punt C is onacceptabel: de bijkomende doorbuiging is maar liefst 80 mm. Ook zou in bouwphase een zeeg moeten worden aangebracht van 71 mm. Deze zeeg wijkt veel af van een horizontale lijn en is daardoor te zichtbaar. Daarnaast moet onder het dak een te grote stelruimte worden aangehouden voor het plaatsen van de houten wand. De horizontale verplaatsing van punt C is eigenlijk ook te groot.

10 Transformatorhuisje aangepast ontwerp

Uitgangspunten

Zie opgave 9

a. Schematisering



b. Berekening en toetsing van de doorbuiging en uitbuiging

De verticale lijnlast van de schijf $q_{g,k} = 12,8 \text{ kN/m}$ heeft geen invloed op deze verplaatsingen.

Belastingscombinatie 1 + 2 $\Rightarrow$ doorbuiging w_{B-E}

$R_{AH} = 0 \Rightarrow M_B = 0$ (schijf AB blijft recht, punt B verplaatst naar links)

$$M_{Eg,k} = \frac{1}{2} \cdot 9,35 \cdot 1,5^2 = 10,5 \text{ kNm}$$

$$\begin{aligned} \text{Buiging plaat BE:} & \text{blijvend} & \text{door } M_{Eg,k} & \Rightarrow w_{B-E} = \frac{ML^2}{16EI} \uparrow \\ & & q_{g,k} & \Rightarrow w_{B-E} = \frac{5qL^4}{384EI} \downarrow \\ & \text{veranderlijk} & \text{door } q_{q,k} & \Rightarrow w_{B-E} = \frac{5qL^4}{384EI} \downarrow \end{aligned}$$

$$w_{on} = \frac{5 \cdot 9,35 \cdot 4000^4}{384 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 220^3} - \frac{10,5 \cdot 10^6 \cdot 4000^2}{16 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 220^3} = 0,367 \text{ mm} \downarrow$$

$$w_{g,kr} = 1,4 \cdot 0,367 = 0,514 \downarrow$$

$$w_{q,dir} = \frac{5 \cdot 8,50 \cdot 4000^4}{384 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 220^3} = 0,344 \downarrow$$

$$w_{q,kr} = 0 \cdot 1,4 \cdot 3,44 = 0$$

$$w_{B-E,tot} = 1,2 \text{ mm} \downarrow$$

$$\text{toets } w_{bij} \leq L/250 \Rightarrow w_{bij} = w_{tot} - w_{on} \leq 4000/250 \Rightarrow 1,2 - 0,4 = 0,8 \leq 16 \text{ mm (voldoet)}$$

$$\text{toets } w_{eind} \leq L/250 \Rightarrow w_{eind} = w_{tot} - w_{ze} \leq 4000/250 \Rightarrow 1,2 - 0 \leq 16 \text{ mm (voldoet)}$$

Belastingscombinatie 1 + 3 $\Rightarrow$ doorbuiging w_C

$R_{AH} = 0 \Rightarrow M_B = 0$ (schijf AB blijft recht, punt B verplaatst naar links)

$$M_{Eg,k} = 10,5 \text{ kNm}$$

$$M_{Eq,k} = \frac{1}{2} \cdot 8,50 \cdot 1,5^2 = 9,56 \text{ kNm}$$

$$\begin{aligned} \text{Buiging plaat BE:} & \text{blijvend} & \text{door } M_{Eg,k} & \Rightarrow \phi_E = \frac{ML_{BE}}{3EI} \Rightarrow w_C = \phi_E \cdot L_{CE} \downarrow \\ & & q_{g,k} & \Rightarrow \phi_E = \frac{qL_{BE}^3}{24EI} \Rightarrow w_C = \phi_E \cdot L_{CE} \uparrow \\ & \text{veranderlijk} & \text{door } M_{Eq,k} & \Rightarrow \phi_E = \frac{ML_{BE}}{3EI} \Rightarrow w_C = \phi_E \cdot L_{CE} \downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Buiging plaat CE:} & \text{blijvend} & \text{door } q_{g,k} & \Rightarrow w_C = \frac{qL_{CE}^4}{8EI} \downarrow \\ & \text{veranderlijk} & \text{door } q_{q,k} & \Rightarrow w_C = \frac{qL_{CE}^4}{8EI} \downarrow \end{aligned}$$

$$w_{on} = \left(\frac{10,5 \cdot 10^6 \cdot 4000}{3 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 220^3} - \frac{9,35 \cdot 4000^3}{24 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 220^3} \right) \cdot 1500 + \frac{9,35 \cdot 1500^4}{8 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 220^3} = -0,19 \text{ mm} \uparrow$$

$$w_{g,kr} = 1,4 \cdot 0,19 = -0,26 \uparrow$$

$$w_{q,dir} = \frac{9,56 \cdot 10^6 \cdot 4000}{3 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 220^3} \cdot 1500 + \frac{8,50 \cdot 1500^4}{8 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 220^3} = 0,44 \downarrow$$

$$w_{q,kr} = 0 \cdot 1,4 \cdot 0,44 = 0$$

$$w_{C,tot} = 0 \text{ mm}$$

$$\text{toets } w_{bij} \leq 2L/250 \Rightarrow w_{bij} = w_{tot} - w_{on} \leq 2 \cdot 1500/250 \Rightarrow 0 - -0,19 = -0,2 \leq 12 \text{ mm (voldoet)}$$

$$\text{toets } w_{eind} \leq 2L/250 \Rightarrow w_{eind} = w_{tot} - w_{ze} \leq 2 \cdot 1500/250 \Rightarrow 0 - 0 = 0 \leq 12 \text{ mm (voldoet)}$$

Belastingscombinatie 1 + 4 ⇒ maximale horizontale verplaatsing/uitbuiging u_c

$$R_{AH} = q_{w,k} \cdot L_{AB} = 1,1 \cdot 2,9 = 3,19 \text{ kN}$$

$$M_{Bw,k} = 3,19 \cdot 2,9 - \frac{1}{2} \cdot 1,10 \cdot 2,9^2 = 4,63 \text{ kNm} \quad \cup \text{ (dak)}$$

$$M_{Eg,k} = 10,5 \text{ kNm} \quad \cap$$

Buiging plaat BE: blijvend door $q_{g,k}$ $\Rightarrow \phi_B = \frac{q_{g,k} L_{BE}^3}{24EI}$ en $\phi_B = \frac{M_{BE}}{6EI} \Rightarrow u_B = \phi_B \cdot L_{AB} \leftarrow$
 blijvend door $M_{Eg,k}$ $\Rightarrow \phi_B = \frac{M_{BE}}{6EI} \Rightarrow u_B = \phi_B \cdot L_{AB} \rightarrow$
 veranderlijk door $M_{Bw,k}$ $\Rightarrow \phi_B = \frac{M_{BE}}{3EI} \Rightarrow u_B = \phi_B \cdot L_{AB} \leftarrow$

Buiging schijf AB: veranderlijk door $q_{w,k}$ $\Rightarrow u_B = \frac{q_{w,k} L_{AB}^4}{8EI} \rightarrow$
 door R_{AH} $\Rightarrow u_B = \frac{R_{AH} L_{AB}^3}{3EI} \leftarrow$

$$u_{on} = \left(\frac{9,35 \cdot 4000^3}{24 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 220^3} - \frac{10,5 \cdot 10^6 \cdot 4000}{6 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 220^3} \right) \cdot 2900 = 0,92 \text{ mm} \leftarrow$$

$$u_{g,kr} = 1,4 \cdot 0,92 = 1,29 \leftarrow$$

$$u_{q,dir} = \frac{4,63 \cdot 10^6 \cdot 4000}{3 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 220^3} \cdot 2900 - \frac{1,1 \cdot 2900^4}{8 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 300^3} + \frac{3,19 \cdot 10^3 \cdot 2900^3}{3 \cdot 37300 \cdot \frac{1}{12} \cdot 1700 \cdot 300^3} = 0,43 \leftarrow$$

$$u_{q,kr} = 0 \cdot 1,4 \cdot 0,43 = 0$$

$$u_{B,tot} = 2,6 \text{ mm} \leftarrow$$

De horizontale verplaatsing u_c is gelijk aan u_B .

$$\text{toets} \quad u \leq h/300 \Rightarrow 2,6 \leq 2900/300 = 9,7 \text{ mm} \quad (\text{voldoet})$$

c. Voor- en nadelen van het aangepaste ontwerp

Het aangepaste ontwerp heeft (eigenlijk) geen nadelen. Het is dé manier om de vervormingen te beperken. Daarnaast zijn de extra kosten t.g.v. fabricage en montage van 2 stalen kolommen (indicatie: een buisprofiel 100x100) met een lichte kop- en voetplaat met twee ankers per verbinding gering t.o.v. de kosten die gemaakt moeten worden voor het oorspronkelijk ontwerp (opgave 9). Het aangepaste ontwerp vraagt immers nauwelijks wapening omdat de bij dezelfde plaat- en schijfdikte (die visueel vereist is door de architect) de constructie is 'overgedimensioneerd' omdat de buigende momenten klein zijn t.o.v. het oorspronkelijke ontwerp. Bovendien kan een zware fundering achterwege blijven. Een (prefab) funderingsplaat 1700x4000 mm met een dikte van hooguit 120 mm voorzien van een vorstrand volstaat. Door het relatief grote gewicht van het transformatorhuisje kan een gewapende verbinding tussen de schijf en de fundering zelfs achterwege blijven. Waterdichtheid van de verbinding is de belangrijkste eis. Als voegmateriaal tussen schijf en funderingsplaat kan oplegrubber worden gebruikt.