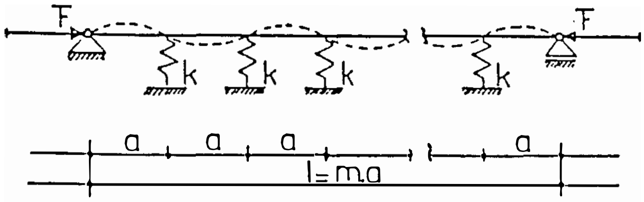
Rapportnr. BI-87-59

VEREND GESTEUNDE STAVEN



Deel II: Bijlagen

Nederlandse organisatie voor toegepast natuurwetenschappelijk onderzoek

IBBC

Instituut TNO voor Bouwmaterialen en Bouwconstructies

Postbus 49
2600 AA Delft
Lange Kleiweg 5
2288 GH Rijswijk

Telefoon 015 - 60 60 00
Telefax 015 - 62 03 04
Telex 38270 ibbc nl

TNO Rapport

Titel VERENDE GESTEUNDE STAVEN

Rapportnr. BI-87-59

Datum 06-05-1988

Projectnr. 63.4.3360

Auteur A. Koster

Trefwoord Stabiliteit, Knik

WP-onderwerp 214.1 Sterkte en Stabiliteit

Kader Staalbouwkundig Genootschap
Stimuleringssubsidie EZ

IBBC-TNO maakt deel uit van de Hoofdgroep Bouw en Metaal TNO

INHOUDSOPGAVE

Inhoudsopgave deel I: Hoofdrapport

Inhoudsopgave Deel II: Bijlagen

Woord Vooraf

Dit rapport is het resultaat van een onderzoek in het kader van de eindstudie aan de afdeling Civiele Techniek van de Technische Universiteit Delft, afstudeerrichting Mechanica en Constructies, sectie Staalconstructies. Het onderzoek is verricht in dienst van de afdeling Staalconstructies van het TNO-Instituut voor Bouwmaterialen en Bouwconstructies (TNO-IBBC) te Rijswijk.

Onderzoek is verricht naar de stabiliteit van op druk belaste verend gesteunde staven, met name naar de benodigde stijfheid en sterkte van de verende ondersteuningen in het elasto-plastisch gebied. Theoretische oplossingen zijn vergeleken met geometrisch en fysisch nietlineaire computerberekeningen, uitgevoerd met het eindige elementenpakket DIANA.

Het onderzoek stond onder leiding van:

Prof. dr. ir. J. Wardenier	(TU-DELFT)
Prof. ir. J. Witteveen	(TU-DELFT; TNO-IBBC)

met begeleiding van:

ir. F.S.K. Bijlaard	(TNO-IBBC)
ir. H.H. Snijder	(TNO-IBBC)
ir. H. de Jong	(TU-DELFT)

Met dank aan bovengenoemden voor hun waardevolle adviezen.

Delft, mei 1988 A. Koster

Symbolenlijst.

Symbool	Betekenis
A	Oppervlakte van de profieldoorsnede.
E	Elasticiteitsmodulus van staal.
E_T	Tangent-modulus.
F	Kracht.
F_D	Draagkracht volgens DIANA berekeningen.
F_E	Eulerse knikkracht.
F_k	De instabiliteitskracht.
F_0	Draagkracht ongesteunde kolom.
F_v	De kracht die een verende ondersteuning moet kunnen weerstaan.
F_p	De normaalkracht in een staaf, waarbij de grenstoestand van algehele instabiliteit van de staaf optreedt.
I	Traagheidsmoment.
M	Buigend moment.
N	Normaalkracht.
$\overline{N}$	Relatieve instabiliteitsspanning σ_k / σ_e volgens de ECCS.
Q	Dwarskracht.
L	Het aantal verend gesteunde kolommen, gekoppelde kolommen.
a	Onderlinge afstand van de verende ondersteuningen.
$a_{1,2}$	Coëfficiënt.
$b_{1,2}$	Coëfficiënt.
$c_{1,2}$	Coëfficiënt.
e	Excentriciteit.
k	Veerstijfheid.
k_{kr}	Kritieke veerstijfheid.
$k_{kr}(E)$	Eulerse kritieke veerstijfheid.
l	Lengte van de staaf, gemeten tussen de scharnierend opgelegde einden.
l_k	Kniklengte.
m	Het aantal velden, waarin de staaf door de verende ondersteuning wordt verdeeld.
n	Het veldnummer (eerste veld $\rightarrow n = 0$). Verhouding tussen de Eulerse knikkracht en de aanwezige normaalkracht.
p	De verhouding tussen de proportionaliteitsgrens en de vloeigrens.
w	Uitbuiging.
w_0	Initiële uitbuiging.

ε	Relatieve rek.
σ	Normaalspanning.
σ_E	Eulerse knikspanning.
σ_e	De rekenwaarde voor de vloeigrens.
σ_k	De instabiliteitsspanning.
σ_p	Proportionaliteitsspanning.
λ	Slankheid van de staaf.
$\bar{\lambda}$	De relatieve slankheid van de staaf.
λ_e	Een parameter die de invloed van de rekenwaarde vloeigrens weergeeft ($\lambda_e = \pi\sqrt{E/\sigma_e}$).
$\bar{\lambda}_s$	De relatieve systeemslankheid van de staaf.
π	Pi.
ξ	Een functie van m.

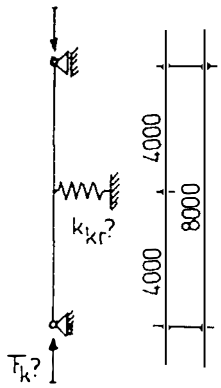
Bijlagen.

Bijlage 1

Rekenvoorbeeld 1.

Rekenvoorbeeld 1.

– Gegeven:



Profiel HE A-120:

$$I_v = 318.10^4 \quad mm^4$$
$$A = 3400 \quad mm^2$$
$$i_v = 30.6 \quad mm$$

–Opm.: Bepaal F_k en $k_{kr,el}$.
Berekening volgens de concept rekenregels voor de stabiliteitscontrole van staalconstructies, opgebouwd uit lijnvormige constructie-elementen.

– Berekening:

$$F_p = A\sigma_e = 3400.240 = 816000N$$

$$F_E = \frac{\pi^2 EI}{a^2} = \frac{\pi^2.2,1.10^5.318.10^4}{4000^2} = 411933N$$

$$\rightarrow \bar{\lambda} = \sqrt{\frac{816000}{411923}} = 1,407 \quad \rightarrow \frac{\sigma_k}{\sigma_e} = 0,901-0,555 = 0,347$$

$$\rightarrow F_k = A\sigma_k = 3400.0,347.240 = \underline{283,152KN} \quad (par.\ 2.1.)$$

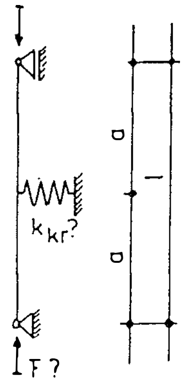
$$\rightarrow k_{kr} = \frac{mF_E}{\xi l} = \frac{2.411933}{0,5.4000} = \underline{412N/mm} \quad (par.\ 2.2.1.1.)$$

Bijlage 2

Rekenvoorbeeld 2.

Rekenvoorbeeld 2.

–Gegeven:



Constanten:	E	=	$2,1.10^5$	N/mm^2
	A	=	5000	mm^2
	a	=	2500	mm
Variabel:	I			

–Opm.: Door het traagheidsmoment te veranderen, kunnen we de slankheid van een staaf beïnvloeden.

– Berekening:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_e} = \frac{l_k\sqrt{A}}{\sqrt{I}\,\lambda_e}$$

$$\lambda_e = \pi.\sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} = \pi.\sqrt{\frac{2,1.10^5}{240}} = 92,93$$

$$\rightarrow\bar{\lambda} = \frac{l_k\sqrt{A}}{92,93\sqrt{I}} \rightarrow I = \frac{l_k{}^2.A}{92,93^2.\bar{\lambda}^2}$$

– Kies:

$$\bar{\lambda} = 0,2 \;\rightarrow I_{nodig} = \frac{(2500)^2.5000}{(92,93)^2.(0,2)^2} = 9046\ cm^4$$

$$\bar{\lambda} = 0,3 \;\rightarrow I_{nodig} = \frac{(2500)^2.5000}{(92,93)^2.(0,3)^2} = 4021\ cm^4$$

–Bepaling draagkracht en kritieke veerstijfheid:

$$\rightarrow\bar{\lambda} = 0,2 \rightarrow\sigma_k = 1.\sigma_e = 240N/mm^2 \rightarrow F_{k2} = 5000.240 = \underline{1200kN}$$

$$\rightarrow k_{kr1} = \frac{m.F_E}{\xi.l} = \frac{2\,\frac{\pi^2 2,1.10^5.9046.10^4}{2500^2}}{0,5.5000} = \underline{24000N/mm}$$

$\rightarrow \bar{\lambda} = 0{,}3 \rightarrow \sigma_k = 0{,}949.\sigma_e = 228 N/mm^2 \rightarrow F_{k2} = 5000.228 = \underline{1139 kN}$

$$\rightarrow k_{kr1} = \frac{m.F_E}{\xi.l} = \frac{2\,\frac{\pi^2.2{,}1.10^5.4021.10^4}{2500^2}}{0{,}5.5000} = \underline{10667 N/mm}$$

Resultaat: –Verlaging draagkracht: 5 %.

–Afname stijfheid met een factor 2,25.

Bijlage 3

Behandeling van publicaties betreffende verend gesteunde kolommen.

1. Publicatie O' Conner [1].

Imperfectly braced columns and beams
Civil Engineering Transactions, Institution of Engineerings
Australia, Vol. CE21, No. 2, September 1979, pp 69-74

1.1. Samenvatting.

Het artikel behandelt de invloed van verschillende imperfecties op een in het midden verend gesteunde staaf. Deze imperfecties zijn:

1.) Excentriciteit van de belasting.
2.) Variatie in de plaats van de ondersteuning.
3.) Speling in de verbinding: staaf-ondersteuning.
4.) Imperfectie van de kolom zelf.

De invloed van deze imperfecties is onderzocht m.b.v. een eindige elementen methode. Twee staven worden in het artikel beschouwd, met totale lengtes van 3 en 6 meter en respectievelijke slankheden van 48.4 en 97.

1.2. Inhoud.

1.2.1. Analyse

Een eindig elementen programma is ontworpen om de invloed van de imperfecties op de verend gesteunde staven te analyseren. Hierbij zijn de ondersteuningen geschematiseerd tot lineair elastische rotatie- (werkend om de staafas) en translatieveren.
Bij verhogen van de belasting wordt onderscheid gemaakt in drie fasen.

1.) De staaf is ongesteund.

2.) De translatie- of rotatieveer wordt effectief.

3.) Beide veren zijn effectief.

Voor deze drie fasen worden exacte elastische stijfheidsmatrices opgesteld. Oplossen van het eigenwaarde probleem levert nu de kritieke belastingen op, bij gegeven veerstijfheden.
Indien de initiële imperfecties ongelijk zijn aan nul dan kan het stelsel vergelijkingen direct worden opgelost.

1.2.2. Excentrisch geplaatste translatieveer.

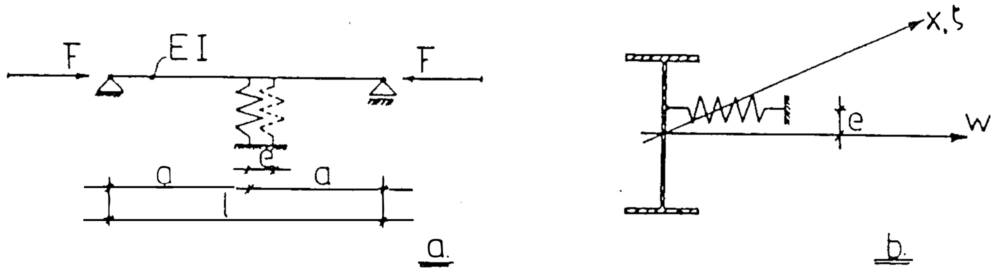


Fig. 1.1: Excentriciteit in de langsrichting (a) en in dwarsrichting (b) van de kolom.

Bij een excentriciteit van de verende ondersteuning in de langsrichting van de staaf (longitudinaal) blijkt er geen kritieke veerstijfheid meer te zijn. De draagkracht van de kolom wordt groter naarmate de veerstijfheid van de ondersteuning toeneemt en zal een waarde benaderen, die lager ligt dan de draagkracht van een exact in het midden gesteunde kolom.
Een excentriciteit van de ondersteuning in dwarsrichting van de kolom vertoont soortgelijk gedrag. Een centrisch geplaatste ondersteuning blijkt bij centrische belasting het meest effectief te zijn.
Excentrische belasting reduceert sterk de draagkracht van de kolom. Een excentrisch, aan de onbelaste flens bevestigde verende ondersteuning is totaal ineffectief. Een aan de drukflens bevestigde ondersteuning is daarentegen wel effectief.
Verbetering van de resultaten treedt op indien aan de verende ondersteuning rotatiestijfheid wordt toegevoegd.

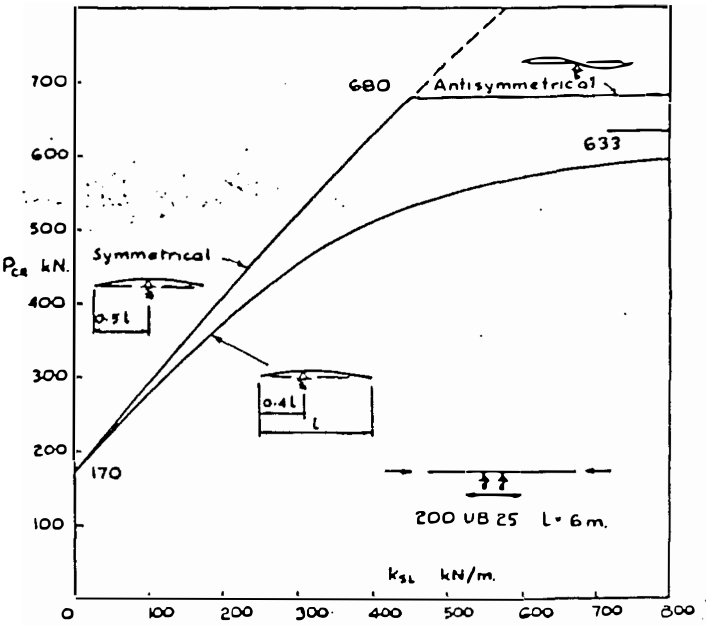


Fig. 1.2: Invloed van excentriciteit van de verende ondersteuning in langsrichting van de kolom.

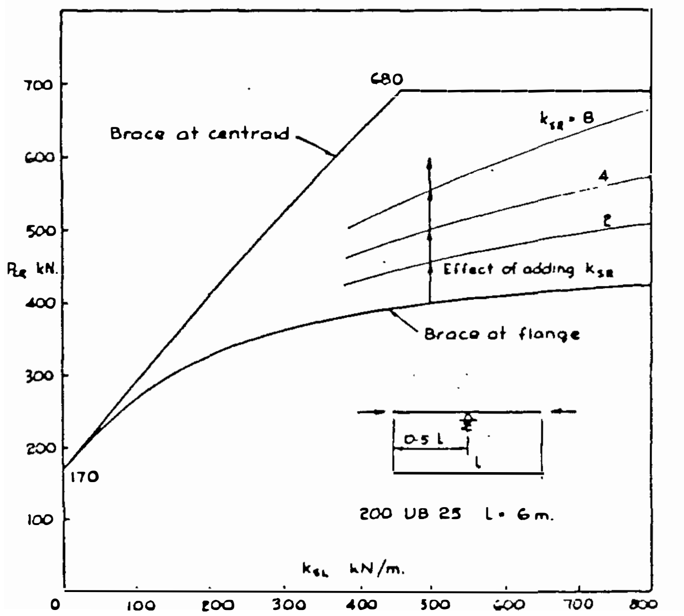


Fig. 1.3: Invloed van excentriciteit van de verende ondersteuning in dwarsrichting van de kolom.

1.2.3. Een simpel model.

Een simpel model (fig. 1.4) wordt verkregen door de staaf scharnierend t.p.v. de verende ondersteuning te veronderstellen. Door nu evenwichtsvergelijkingen voor de staven in uitgebogen stand op te stellen, kan een uitdrukking worden gevonden voor de kritieke combinaties tussen de translatie- en rotatiestijfheid van de verende ondersteuning, bij kritieke belasting (P_{cr}).

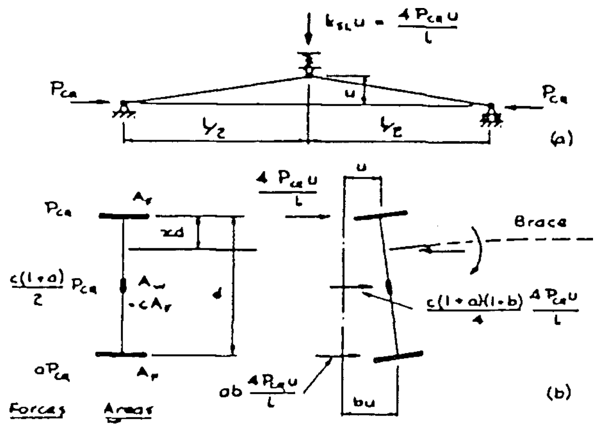


Fig. 1.4: Een simpel model.

1.2.4. Speling in de verbinding: kolom - verende ondersteuning.

In grafieken, bijvoorbeeld figuur 1.5, wordt de verplaatsing van de flenzen en de grootte en excentriciteit van de kracht in de verende ondersteuning t.o.v. de kolombelasting beschouwd. Hieruit blijkt dat bij verhogen van de belasting drie fasen worden doorlopen (par. 1.2.1.), hetgeen wordt veroorzaakt door de speling in de verbinding. De kracht in de verende ondersteuning bij de lange kolom blijkt van dezelfde orde grootte te zijn als die van de korte kolom.

1.2.5. Initiële uitbuiging.

Primair wordt verondersteld dat de staaf een sinusvormige initiële uitbuiging bezit. Doordat de flens van de kolom wordt verbonden aan de verende ondersteuning zal de imperfectie t.p.v. de verende ondersteuning kleiner zijn en wel van dezelfde orde grootte als de speling van de verbinding.

Uit grafieken die de relatie geven tussen de axiale belasting en de verplaatsingen van de flenzen worden twee conclusies getrokken:

1.) De kracht in de verende ondersteuning is groter dan bij een initieel rechte staaf, ongeveer 1 à 2% van de in de kolom bijbehorende normaalkracht.

2.) De excentriciteit (e_s) van de kracht in de verende ondersteuning benadert de profielhoogte.

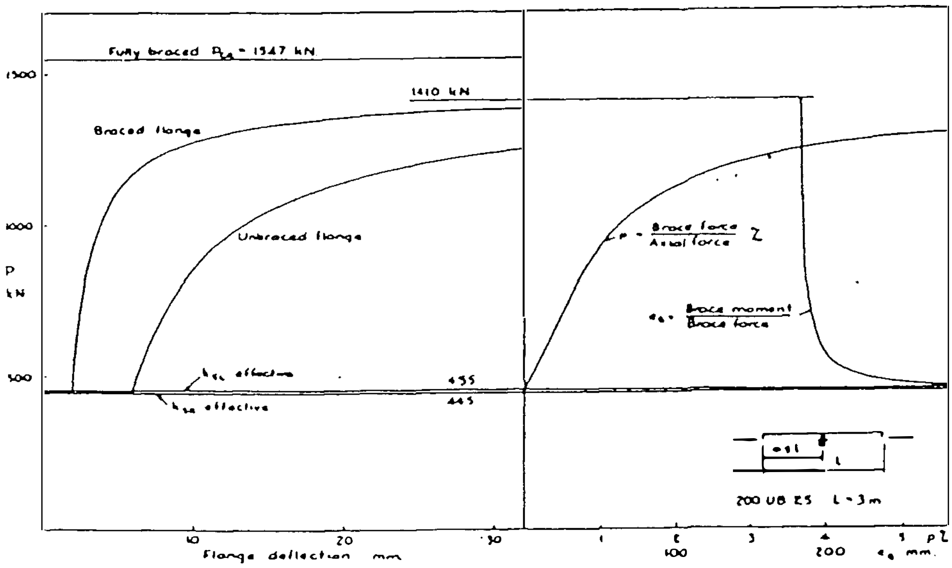


Fig. 1.5: Het effect van speling in de verbinding: kolom-ondersteuning (korte kolom).

1.2.6. Conclusies van O' Conner.

1.) Een relatief kleine verplaatsing van de ondersteuningen heeft grote invloed op het gedrag van de verend gesteunde kolom.

2.) De 2,5 % regel is voldoende voor de in dit artikel beschouwde gevallen.

3.) De excentriciteit van de kolombelasting kan worden gebruikt als ontwerpmoment voor de verend ondersteunde staaf.

4.) De effecten t.g.v. speling in de verbinding kolom - ondersteuning zijn relatief klein t.o.v. de effecten t.g.v. de initiële uitbuigingen.

1.3. Commentaar.

In het artikel wordt het gedrag van twee in het midden verend gesteunde kolommen, met lengten van 3 en 6 meter onderzocht. Overeenkomsten in het gedrag van de kolommen worden duidelijk aangegeven. Verschillen echter niet, terwijl die er toch wel zijn, zoals bij de relatie tussen de normaalkracht in de kolom en de kracht in de verende ondersteuning
De slankheid van de korte staaf is 48,4. Het gedrag van deze kolom zal waarschijnlijk elasto-plastisch zijn. Ook hierop wordt in het artikel niet ingegaan.
Inzicht in het gedrag van de verend gesteunde kolommen moet worden verkregen door zelf de resultaten die in het artikel staan vermeld te bestuderen, waarbij de kanttekening moet worden gemaakt dat slechts twee verend gesteunde staven zijn onderzocht, hetgeen weinig is om algemene conclusies te kunnen trekken.
Met conclusie 2 ben ik het niet helemaal eens. Uit figuur 1.3 blijkt dat voor een volledig gesteunde kolom een oneindig grote veersterkte nodig is. Het kan echter zo zijn dat de stijfheid van de ondersteuning kleiner is dan de kritieke, zodat de draagkracht van de kolom minder is dan die van een volledig gesteunde kolom. Een veerkracht kleiner dan 2,5 % van de in de kolom aanwezige normaalkracht zou dan toch voldoende kunnen zijn.
Verder is de invloed van imperfecties die in de praktijk zouden kunnen voorkomen goed onderzocht. Door het vergelijken van effecten die de verschillende imperfecties tot gevolg hebben, blijkt duidelijk welke imperfecties de grootste invloed hebben en welke imperfecties kunnen worden verwaarloosd.

2. Publicatie Dubas [2].

Ultimate strength of compression members with intermittent
rigid or flexible lateral supports.
Stability of steel structures, Liege 13-15 April,
Priliminary report, pp 469-474

2.1. Samenvatting.

In deze publicatie worden de volgende twee methoden voor het berekenen van de draagkracht van een op druk belaste staaf met elkaar vergeleken:

1.) Berekening van de draagkracht, gebaseerd op de elastische kniklengte.
2.) Een elasto-plastische tweede orde analyse, gebaseerd op dezelfde aannamen als bij de ECCS knikcurven. Hierbij wordt gebruik gemaakt van een z.g.n. fictieve buigstijfheid.

Een tweetal constructies worden doorgerekend. Een ligger over 4 steunpunten (fig. 2.1) en een "pony truss bridge" (fig. 2.2). De resultaten worden getoetst aan fysisch- en geometrisch niet lineaire computer berekeningen.
Nu blijkt dat de tweede methode betere resultaten geeft dan de eerste.

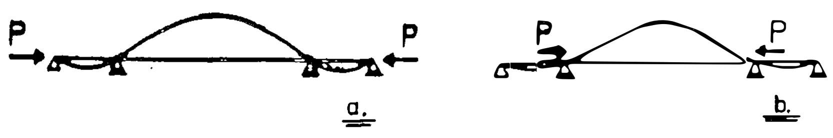


Fig. 2.1: Gedrukte staaf over vier vaste steunpunten.

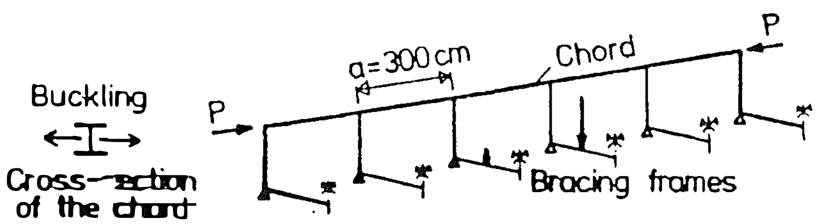


Fig. 2.2: "pony truss bridge"

2.1.1. Basisgegevens voor de berekening.

Voor alle berekeningen wordt gekozen voor een "geidealiseerd" (zonder afrondingsstralen) profiel HEA-200. Beschouwd wordt zijdelingse knik om de zwakke as. Van toepassing en gebruikt is de knikcurve ECCS (c).
De verdeling van de restspanningen wordt aangenomen, zoals in de EURONORM is vermeld. Voor de geometrische imperfectie van de constructie in figuur 2.1 wordt 1/1000 l aangenomen.
Gebruikt worden de materiaalconstanten:

$$\sigma_e = 255 \quad N/mm^2$$
$$E = 210 \; kN/mm^2$$

2.1.2. Gedrukte staaf over 4 vaste steunpunten.

De draagkracht F_k van de staven a en b in figuur 2.1 is m.b.v. een drietal methoden bepaald,

1.) Een fysisch- en geometrische niet lineaire computerberekening.
2.) M.b.v. de kniklengte en de ECCS knikcurven.
3.) Een elasto-plastische tweede orde berekening, gebaseerd op dezelfde aannamen als bij de ECCS knikcurven.

ad 1.) Als toetsing van de methoden 2 en 3 zijn fysisch- en geometrisch niet lineaire computerberekeningen gemaakt m.b.v. de eindige elementen methode. Deze eindige elementenmethode zelf is getest door een pin-ended kolom door te rekenen en het resultaat te vergelijken met de draagkracht van dezelfde pin-ended kolom, gegeven door de ECCS knikcurven. Het blijkt nu dat de elementenmethode ongeveer een 5% te hoge waarde geeft voor de draagkracht van de pin-ended kolom.

ad 2.) Een elastische knikberekening leidt tot de Eulerse knikkracht van de constructie. M.b.v. de Eulerformule kan nu de kniklengte worden berekend. Via de slankheid, kan m.b.v. de ECCS knikcurven een draagkracht worden bepaald.

ad 3.) Deze methode berust op een vermindering van de buigstijfheid EI van de staaf. Een fictieve buigstijfheid wordt als volgt gedefinieerd:

$$\beta = \frac{EI_{fict.}}{EI} = \frac{F_k}{F_E} = \bar{N}\bar{\lambda}^2 \qquad (1)$$

Waarin: β = buigstijfheids reductiefactor
$\overline{N}$ = bijbehorende draagkracht volgens de ECCS knikcurven.

De werkwijze is nu als volgt:

1.) Schat een waarde voor β ($=\beta_1$).
2.) Bepaal de Eulerse knikkracht (F_k), behorende bij een buigstijfheid $\beta.EI$ van de kolom. Deze waarde is een eerste benadering voor de uiteindelijke instabiliteitsspanning F_k.
3.) Bepaal $\overline{N}$
4.) Bepaal m.b.v. de ECCS knikcurven de bijbehorende slankheid $\overline{\lambda}$.
5.) Bepaal nu een nieuwe waarde voor β, m.b.v. formule 1.1. Indien deze nieuwe waarde voor β overeenkomt met β_1, dan is de juiste oplossing gevonden.

Resultaten in tabelvorm:

Bel. Gev.	F_E [kN]	l_k [cm]	F_{k1} [kN]	F_{k2} [kN]	F_{k3} [kN]
a	880.24	559.69	660.	561.	-
b	943.56	540.59	700.	586.	632.

Geconcludeerd wordt dat methode 3 een veilige waarde geeft voor de instabiliteitsspanning van de staven in figuur 2.1. Tevens geeft het een betere benadering voor de instabiliteitsspanning dan methode 3.

2.1.3. Gedrukte staaf in een "pony truss bridge".

De bovenrandstaaf wordt door 5 frames gesteund. De stijfheid van de eindframes wordt 5x stijver dan de tussenliggende verondersteld. De frame flexibiliteit wordt in de volgende dimensilose vorm weergegeven:

$$\gamma = \frac{4a^3C}{\pi^2EI} \tag{2}$$

Waarin: EI = buigstijfheid van de randstaaf.
C = elastische translatiestijfheid van de frames, een belasting C zorgt voor een verplaatsing van 1.

De drie methoden, behandelt in par. 1.2.2., zijn ook toegepast op de "pony truss bridge" voor verschillende veerstijfheden γ.

De resultaten hiervan in tabel vorm:

γ	0.0926	0.1389	0.1852	0.3704	0.7408	>
F_{k1}	730.	840.	890.	950.	1000.	1000.
F_{k2}	568.	640.	699.	819.	920.	976.
F_{k3}	677.	793.	840.	962.	976.	976.

Uit de tabel blijkt nu dat de vereiste veerstijfheid, behorende bij $F_{a,kr}$, veel lager is dan dat uit een Eulerse knikberekening volgt (methode 2). Dit feit is het gevolg van het afnemen van de buigstijfheid.
Tevens blijkt dat met methode 3 een goede benadering van de draagkracht wordt gevonden. Methode 2 geeft echter erg conservatieve waarden voor de draagkracht.

2.1.4. Oplegreacties bij instabiliteitsbelasting.

De reactiekrachten in de frames zijn meestal kleiner dan 1% van de axiale belasting van de bovenrandstaaf. In extreme gevallen worden oplegreacties van 1.5% van de axiale belasting bereikt. Hierbij is dan meestal de oplegreactie maatgevend en niet de stijfheid van frames.

2.1.5. Conclusies van Dubas.

Uitgaande van de resultaten blijkt dat methode 2 conservatieve waarden geeft voor de draagkracht van constructies. Een betere benadering van de draagkracht wordt bereikt door reductie van de buigstijfheid mee te nemen in de berekeningen.

2.2. Commentaar.

Methode 3 geeft volgens de publicatie een betere benadering van de draagkracht van een constructie dan methode 2. Nadeel is echter dat deze methode vrij omslachtig is. Bij toepassing van deze methode voor het bepalen van de kritieke veerstijfheid van verend gesteunde kolommen verdwijnt dit nadeel. De kniklengte (l_k) en dus de slankheid is dan immers bekend. M.b.v. de ECCS knikcurven kan dan direct de factor β worden bepaald.

De formule voor de kritieke veerstijfheid luidt nu (hoofdstuk 1, formule (1.1,2)):

$$k_{kr} = \frac{m^3\pi^2 EI}{\alpha\xi} = \left\{\frac{A\sigma_e}{\alpha\xi}\right\}.\frac{1}{\bar{\lambda}^2_s}.\beta \tag{3a}$$

Met $\beta = N\bar{\lambda}^2$ luidt de formule voor de kritieke veerstijfheid als volgt:

$$k_{kr} = \left\{\frac{A\sigma_e}{\alpha\xi}\right\}.\bar{N} \tag{3b}$$

Nu blijkt dat k_{kr} direct met formule (3b) te bepalen is. Tevens blijkt dat van onrealistische hoge veerstijfheden bij gedrongen staven geen sprake meer is. De formule (3b) is immers gelijkvormig aan de ECCS knikcurven.

Geometrische imperfecties hebben tot gevolg dat de buigstijfheid wordt gereduceerd en dus de benodigde veerstijfheid. Dit is in tegenstelling tot de publicaties van Winter e.a. ([28]). Zij stellen juist dat indien een kolom een initiële vooruitbuiging bezit, een grotere veerstijfheid nodig is.

Een verklaring voor dit verschil kan zijn dat t.g.v. initiële imperfecties bij belasten buigspanningen in de kolom worden opgewekt. Zodra nu de buigspanningen de vloeigrens bereiken zal de buigstijfheid van de staaf afnemen.

3. Publicatie Horne, Ajmani [5].

Stability of columns supported laterally by side-rails
Int. J. mech. Sci. Pergamon Press, 1969, Vol. 11, pp 159-174

3.1. Samenvatting.

Torsieknik van een I-profiel wordt onderzocht. Het I-profiel wordt op onderling gelijke afstanden verend gesteund. De verende ondersteuningen bezitten een rotatiestijfheid (stijfheid van de verende ondersteuningen om de staafas van de kolom) en een translatiestijfheid (stijfheid van de verende ondersteuning loodrecht op de staafas van de kolom). De translatie stijfheid wordt echter zo groot verondersteld dat de ondersteuningen als starre opleggingen mogen worden geschematiseerd.
De kolom wordt belast door een axiale kracht en/of momenten aan de uiteinden van de kolom. Kriteria voor de rotatiestijfheid worden ontwikkeld, zodat knik optreedt tussen de ondersteuningen en de kolom dus niet in een "overall" knikvorm uitknikt.

3.2. Inhoud.

3.2.1. Inleiding.

In veel daken van industrie hallen worden de dakplaten ondersteund door gordingen, die verbonden zijn met de flenzen van I-profielen. In dit artikel wordt torsieknik van deze op druk belaste I-profielen (voortaan kolommen genoemd) onderzocht.
In de schematisering worden de ondersteuningen verondersteld aan de trekzijde van de kolom, indien deze alleen door het grootste eindmoment zou worden belast, te zijn bevestigd (fig. 3.1,2).
De kolom mag t.p.v. de ondersteuningen als "star" opgelegd worden beschouwd. De rotatiestijfheid van de ondersteuningen is echter afhankelijk van de volgende factoren:

1.) De stijfheid van de gording.

2.) De stijfheid van de verbinding gording-kolom.

3.) Locale deformatie van de kolom, omdat de ondersteuningen aan 1 flens worden bevestigd.

3.2.2. Kolom, belast door een axiale kracht en/of een uniform moment.

De kolom wordt geschematiseerd als figuur 3.1. Verondersteld wordt dat de kolom bezwijkt t.g.v. Eulerse knik, waarbij de kniklengte gelijk is aan de onderlinge afstand van de ondersteuningen, of t.g.v. torsieknik om de longitudinale as van de kolom.
De knikvorm wordt sinusvormig verondersteld, zowel de zijdelingse verplaating (u), als de rotatie (φ) om de longitudinale as. In formulevorm is de totale zijdelingse verplaatsing (u):

$$u = u_1 sin(\frac{\pi z}{s}) + a\varphi_n sin(\frac{n\pi z}{l}) \qquad (1)$$

Hierin stelt n het aantal halve sinusgolven voor, waarin de kolom tordeert.

Fig. 3.1: Schematisering kolom, belast door een axiale kracht en/of een uniform moment.

Energie vergelijkingen kunnen nu worden opgesteld. Knik treedt op indien de eerste variatie van de energie vergelijkingen naar u en φ gelijk zijn aan nul. De oplossingen van de volgende drie gevallen worden besproken.

1.) P ≠ 0 ; M = 0

2.) P = 0 ; M ≠ 0

3.) P ≠ 0 ; M ≠ 0

ad 1.) Hierbij wordt onderscheid gemaakt in het geval waarbij de rotatie van de kolom nul is t.p.v. de ondersteuningen ($n = l/s$), en het geval waarbij de rotatie van de kolom niet gelijk is aan nul t.p.v. de ondersteuning ($n \neq l/s$).
Voor beide gevallen kan een formule worden opgesteld voor de draagkracht van de kolom. Indien $n = l/s$ dan knikt de kolom Eulers (P_E), met een kniklengte gelijk aan de onderlinge afstand van de ondersteuningen (s). In dien $n \neq l/s$ dan treedt torsieknik (P_T) op.
Maatgevend is de laagste waarde van P.

ad 2.) Hier wordt op dezelfde wijze onderscheid gemaakt en kunnen formules worden opgesteld voor het kritieke moment behorend bij torsieknik om de gesteunde longitudinale as (M_T) en voor het kritieke moment behorend bij zijdelingse knik tussen de ondersteuningen (M_E), waarbij de laagste maatgevend is.

ad 3.) Ook hier wordt op dezelfde wijze onderscheid gemaakt. Formules worden opgesteld die de kritieke combinaties van M en P en de rotatiestijfheid van de verende ondersteuning geven.

3.2.3. Kolom, belast door een axiale kracht en ongelijke eindmomenten.

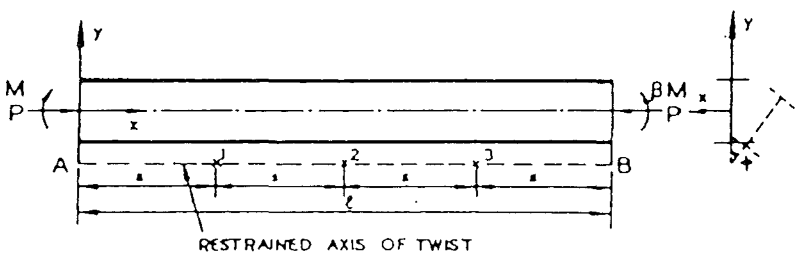


Fig. 3.2: Schematisering kolom, belast door een axiale kracht en/of een niet uniform moment.

Een expliciete uitdrukking voor het kritieke, niet uniforme moment kan niet worden gegeven. De "energie" methode is daarom gebruikt voor het numeriek berekenen van de kniklasten. Alleen torsieknik om de as A-B (fig. 3.2) wordt beschouwd.
De uitdrukking voor de knikvorm is een eindige sommatie van sinusgolven. In formule:

$$\varphi = \Sigma \varphi_n \sin \frac{n \varphi z}{l} \tag{2}$$

Iedere term in deze formule vertegenwoordigt een knikconditie van de kolom.
Door nu de energiebalans voor het systeem op te stellen en te variëren naar φ_n wordt een eindig aantal (n) homogene lineaire vergelijkingen in φ_1, φ_2 etc. gevonden. Een niet triviale oplossing van dit stelsel vergelijkingen kan worden gevonden door de determinant gelijk te stellen aan nul.

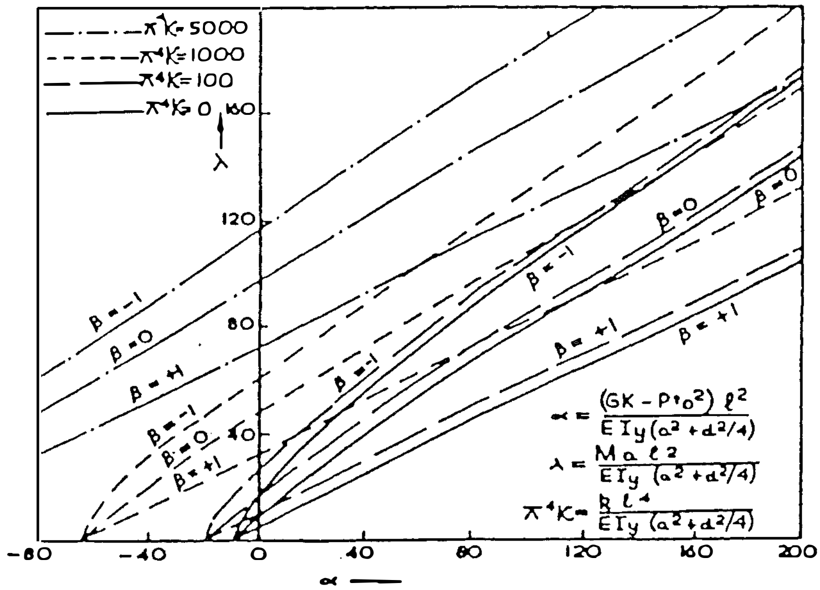


Fig. 3.3: Draagkracht kolom, belast door een axiale kracht en een niet uniform moment.

Deze berekening is uitgevoerd m.b.v. een computer. Om enige conclusies te kunnen trekken omtrent de juistheid van de resultaten is de berekening gemaakt voor de eerste 5, 10, 15 termen van de Fourier reeks (formule 2). Het bleek dat in de meeste gevallen de "fout" niet groter was dan 1%.
De relatie tussen de kritieke combinatie van P en M en de rotatiestijfheid van de verende ondersteuning is nu dus in principe bekend (fig: 3.3).

3.2.4. Equivalent uniform moment.

Alhoewel nu met figuur 3.3 de relatie tussen de draagkracht van de kolom en de stijfheid van de ondersteuningen bekend is, wordt het gemakkelijk gevonden indien men het niet uniforme moment kan vervangen door een equivalent uniform moment en dus de hier bijbehorende relatief eenvoudige formules mag gebruiken.
Hiertoe wordt een factor μ bepaald waarmee het grootste moment moet worden vermenigvuldigd om een uniform moment te krijgen die dezelfde knikvorm (en dus dezelfde draagkracht) tot gevolg heeft als het niet uniforme moment.
Deze factor μ wordt bepaald door λ te berekenen voor de gegeven waarden α,β en κ (zie formules fig. 3.3) en λ_1 te berekenen voor de gegeven waarden van α,κ en voor $\beta = 1$. De factor μ is nu gedefinieerd als λ_1/λ.

3.2.5. De kritieke veerstijfheid van de ondersteuning.

Voor een verend gesteunde kolom met gegeven lengte en doorsnede is de draagkracht afhankelijk van:

1.) De excentriciteit van de ondersteuning (a).

2.) Rotatiestijfheid van de ondersteuning.

3.) Onderlinge afstand van de ondersteuningen.

Afhankelijk van deze drie factoren zal de kolom torderen om de longitudinale as (kritieke belasting is dan P_T of M_T), of de kolom zal uitknikken tussen de ondersteuningen in (kritieke belasting is dan P_E of M_E (Eulers)).
De ondersteuningen worden als "compleet" beschouwd, als de kolom uitknikt tussen de ondersteuningen in en de verplaatsing bij de ondersteuningen dus nul is (vergelijk de kritieke veerstijfheid).
Voor het geval van alleen axiale belasting of alleen momenten aan de uiteinden, kunnen analytische uitdrukkingen worden afgeleid voor de relatie tussen de kritieke rotatiestijfheid van de ondersteuningen en de knikvorm van de staaf. Figuur 3.4 geeft deze relatie, voor alleen axiale belasting, grafisch weer.
Indien de staaf wordt belast door een axiale kracht en een uniform moment dan kan ook een analytische uitdrukking worden gevonden voor de kritieke torsiestijfheid. Deze is echter ook nog afhankelijk van de verhouding axiale kracht - moment, hetgeen tot uitdrukking komt in een factor P/P_E. Voor een staaf die door een axiale drukkracht en

een niet uniform moment wordt belast zijn geen analytische uitdrukkingen voor de kritieke rotatiestijfheid te geven. M.b.v. numerieke berekeningen kunnen wel grafieken die de relatie tussen de kritieke rotatiestijfheid en de draagkracht van de kolom weergeven, worden gemaakt.

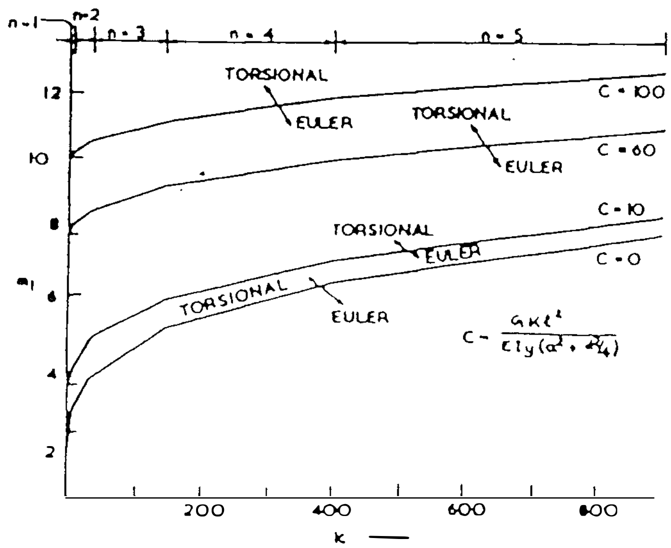


Fig. 3.4: Relatie kritieke rotatie veerstijfheid-knikvorm.

3.2.6. Conclusies van Horne en Ajmani.

Energie methoden kunnen goed worden gebruikt om het stabiliteitsprobleem van een zijdelings star, maar tegen torderen verend gesteunde staaf op te lossen.

Een punt in grafieken voor de kritieke rotatiestijfheid (zoals fig. 3.4) wordt gekarakteriseerd door de plaats en onderlinge afstand van de ondersteuningen. Indien het punt beneden de lijn in de grafiek ligt, dan is de draagkracht van de kolom gelijk aan die van een pin-ended kolom, met een lengte die gelijk is aan de onderlinge afstand van de ondersteuningen.

Het kritieke moment van een tegen torderen verend gesteunde kolom is sterk afhankelijk van de verhouding tussen de rotatie- en zijdelingse stijfheid (α).

Indien $\alpha=-\pi^2$, dan wordt knik veroorzaakt door axiale belasting alleen, en de knikvorm is gelijk aan een halve sinusgolf. Is α zeer groot en de axiale belasting erg klein dan knikt de kolom scherp, nabij het uiteinde met het grootste moment. Het kritieke moment is dan onafhankelijk van het verhoudingsgetal β.

3.3. Commentaar.

Er is weer een deel van het gebied van de verend gesteunde staven onderzocht. Ditmaal is juist niet de zijdelingse stijfheid, maar de rotatiestijfheid van de verende ondersteuningen onderzocht. Eisen voor de rotatiestijfheid van verend gesteunde staven zijn door dit artikel nu bekend. Echter wel weer met de restrictie dat de gevonden formules en grafieken alleen geldig zijn in het elastische gebied. Nieuwe gezichtspunten in het elasto-plastisch gebied levert dit artikel dus helaas niet op.
In het artikel wordt verder niets vermeld over de toepasbaarheid van de formules en grafieken voor de praktijk. Niets wordt bijvoorbeeld vermeld over de invloed van imperfecties op de kritieke rotatie stijfheid. In de afleiding van de formules zijn de imperfecties niet verwerkt. De resultaten van dit artikel kunnen dan ook niet zonder meer worden toegepast in de praktijk.

4. Rapport de Jong [6].

Buckling of an elastically supported chord
Stevin rapport 6-83-5, Delft University of Technology,
Department of Civel Engineering, 1983

4.1. Samenvatting.

In dit rapport wordt de invloed onderzocht van het roteren van de dwarsdoorsnede van een op druk belaste, verend gesteunde staaf.

4.2. Inhoud.

4.2.1. Inleiding.

De Nederlandse normen voor het ontwerpen van bruggen bieden slechts een oplossing voor verend gesteunde staven indien een eenvoudig model wordt beschouwd. De invloed van bijvoorbeeld verandering in axiale kracht, doorsnede, etc. is dan ook nog onbekend.
De oplossing van het probleem kan worden gevonden door de staaf te schematiseren als een door elastische veren gesteunde staaf, in- of exclusief de invloed van rotatie van de doorsnede. Uit vergelijking van de resultaten van deze schematiseringen blijkt of het zinvol is om rotatie van de doorsnede in de berekening mee te nemen.

4.2.2. Randvoorwaarden.

De Eulerse knikcurve wordt vergeleken met de knikcurve van de Nederlandse normen en de ECCS knikcurve. Het blijkt dat de Eulerse knikcurve een bovengrens vormt en de volgende conclusies worden getrokken:

1.) De berekening van veerstijfheden in het elastische gebied mogen worden uitgevoerd met het Eulerse concept.

2.) In het elasto plastische gebied mag voor de veerstijfheid de waarde bij λ_e (slankheid waarbij het gedrag van de staaf overgaat van elasto plastisch naar elastisch) worden gekozen.

Initiële imperfecties mogen worden genegeerd, omdat deze al zijn verwerkt in de ECCS knikcurve en de knikcurve van de Nederlandse normen.

4.2.3. Berekening.

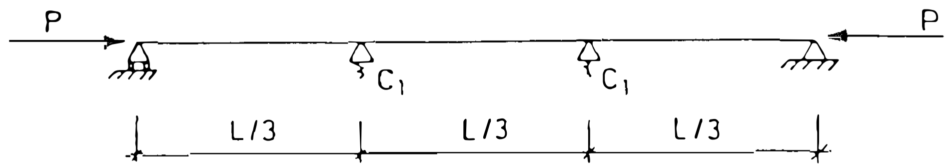


Fig. 4.1: Eerste schematisering (excl. het effect van rotatie).

Als eerste wordt de staaf geschematiseerd als in figuur 4.1. Het effect van roteren van de doorsnede wordt niet verwerkt. Het probleem wordt nu opgelost door de energie vergelijking op te stellen en te eisen dat de potentiële energie een minimum moet zijn.

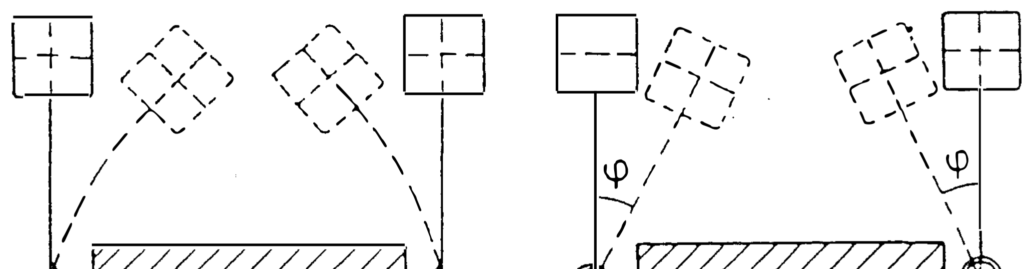


Fig. 4.2: Tweede schematisering (incl. het effect van rotatie).

Figuur 4.2 geeft een tweede manier om de bovenstaaf te schematiseren, waarbij het effect van roteren van de doorsnede wel is verwerkt. De diagonalen en staanders van het vakwerk worden oneindig stijf verondersteld. De buigstijfheid van de doorsnede van de constructie wordt geschematiseerd m.b.v. rotatieveren.
Ook hier kan het probleem worden opgelost door de energie vergelij-

king op te stellen en te eisen dat de potentiële energie een minimum moet zijn.

4.2.4. Discussie.

De energie vergelijkingen staan in nauw verband met elkaar. Voor vergelijking moeten de variabelen op de juiste wijze worden geinterpreteerd.
Een relatie tussen de translatiestijfheid C1 en de rotatiestijfheid C2 kan worden vastgesteld. De axiale belasting van de twee schematiseringen moet dan wel gelijk zijn. De volgende relatie tussen C1 en C2 wordt gevonden.

$$C1 = \frac{C2}{h^2} \tag{1}$$

Als de energie vergelijking voor de verend gesteunde staaf, inclusief rotatie, enigszins wordt herschreven (met $\varphi = w/h$), dan blijkt dat als h toeneemt de invloed van de torsiestijfheid van de staaf afneemt. Indien men de limiet $h \to \infty$ neemt, dan vindt men opnieuw de formule van een verend gesteunde staaf, waarbij het effect van rotatie niet is meegenomen.

4.2.5. Resultaten.

Beide berekeningsmethoden zijn uitgevoerd voor verschillende doorsneden van een door twee "veren" gesteunde staaf. De volgende conclusies worden getrokken.

1.) Voor een HE-profiel mag de invloed van een verbeterde berekening (incl. rotatie) worden verwaarloosd.
2.) Voor buisprofielen, welke een grote torsiestijfheid bezitten, verbeteren de resultaten echter sterk.
3.) Indien het vakwerk, geschematiseerd door rotatieveren, vervorming vertoont dan betekent dit dat de rotatie van de bovenstaaf niet geheel is voltooid. Met een aanvulling op de theorie verdwijnt dit gunstige effect.
4.) Als het aantal ondersteuningen toeneemt, benadert de $P_{cr}-C$ curve de waarde van P_{max}. Dit betekent dat een verandering in de veerconstante nauwelijks een verandering in de draagkracht van de kolom tot gevolg heeft. Voldoende compensatie wordt echter

verkregen doordat de echte belasting lager ligt dan de Eulerse belasting, waar de berekening op is gebaseerd.

4.3. Commentaar.

De conclusie dat voor het elasto plastische en het plastische gebied de veerstijfheid, behorend bij $\bar{\lambda}_e$, mag worden gebruikt is interessant. Voor gedrongen staven ($\bar{\lambda} \leq 0.2$) is de toelaatbare belasting volgens de knikcurve van de ECCS immers constant en onafhankelijk van de slankheid van de staaf.
Indien nu om één of andere reden de slankheid van de staaf kleiner is dan 0.2 dan is het de vraag of de veerstijfheid hieraan moet worden aangepast, aangezien de toelaatbare belasting gelijk is aan die bij $\bar{\lambda}$=0.2 . Er zou dus kunnen worden overwegen om de benodigde veerstijfheid voor staven met $\bar{\lambda} \leq 0.2$ gelijk te houden aan de benodigde veerstijfheid voor een staaf met $\bar{\lambda}$=0.2 .
Voorzichtigheid is echter geboden, omdat de benodigde veerstijfheid afhankelijk is van de slankheid van de kolom en niet van de belasting. De knikvorm van een staaf met slankheid $\bar{\lambda}$ = 0.1 , met een kritieke veerstijfheid die bij $\bar{\lambda}$ = 0.2 behoort is namelijk anders dan de knikvorm van een staaf met de slankheid $\bar{\lambda}$ = 0.1 met bijbehorende kritieke veerstijfheid. En t.g.v. deze andere knikvorm zal de draagkracht van de kolom wel eens kleiner kunnen zijn.
In het rapport wordt gesteld dat de invloed van initiële imperfecties mag worden genegeerd. Echter imperfecties hebben ten eerste tot gevolg hebben dat de draagkracht van de kolom minder is, zoals bij een normale pin-ended kolom. Tevens hebben imperfecties volgens Leroy en Fisher [7], en Winter [28] tot gevolg dat voor een imperfecte kolom een grotere stijfheid nodig is van de verende ondersteuningen dan voor een ideaal rechte kolom. Zou men de veerstijfheid gelijk houden dan zou dus de knikvorm veranderen en dus ook, indirect, de draagkracht van de kolom minder worden. Deze laatste verlaging van de draagkracht van de kolom zit niet verwerkt in de ECCS knikcurve en de knikcurve van de Nederlandse norm.

--

5. Publicatie Leroy, Fisher [7].

A unified approach for stability bracing requirements
Engineering journal, American institute of steel construction,
Fourth quarter, 1985

5.1. Samenvatting.

In het artikel wordt de benodigde veersterkte en stijfheid van verend gesteunde kolommen beschouwd, waarbij het aantal veren varieert van één tot oneindig (continue verend gesteund). Veel gebruikte benaderingsformules worden daarbij onderling en met de "exact solution" (een benadering van, de benodigde veerstijfheid volgens een Eulerse knikberekening, zie [27]) vergeleken.
Om de formules geschikt te maken voor elk belastingsnivo wordt voorgesteld om de E-modulus in het elasto-plastisch gebied te vervangen door de E_t-modulus.
Imperfecties worden tot slot in rekening gebracht m.b.v. een factor welke afhankelijk is van de initiële uitbuiging en de extra uitbuiging die wordt toegestaan.

5.2. Inhoud.

5.2.1. Inleiding.

Veelal worden verend gesteunde kolommen zodanig ontworpen, dat ze als star opgelegd kunnen worden beschouwd. Bij niet volledig gesteunde kolommen is de benodigde veerstijfheid vaak aanzienlijk minder dan de veerstijfheid die met veel gebruikte benaderingsformules wordt berekend.
Een optimale veerstijfheid is van belang voor het beoordelen van bestaande kolommen die gesteund worden door staven met een beperkte sterkte en stijfheid. Economisch gezien kan een optimale veerstijfheid voordeel opleveren, bijvoorbeeld bij grote repetitie van kolommen. Een exacte berekening of een goede benaderingsformule van de benodigde veerstijfheid is hier dan op z'n plaats.

5.2.2. Veerstijfheid van continue verend gesteunde kolommen.

De formules voor de vereiste stijfheid van de ondersteuningen en de Eulerse knikkracht van een continue verend gesteunde kolom worden hier gegeven. Voor geldigheid van de formules in het elasto plastisch gebied, moet in de formules de E-modulus door de E_t-modulus worden vervangen.

5.2.3. Veerstijfheid voor een door een eindig aantal veren gesteunde kolom.

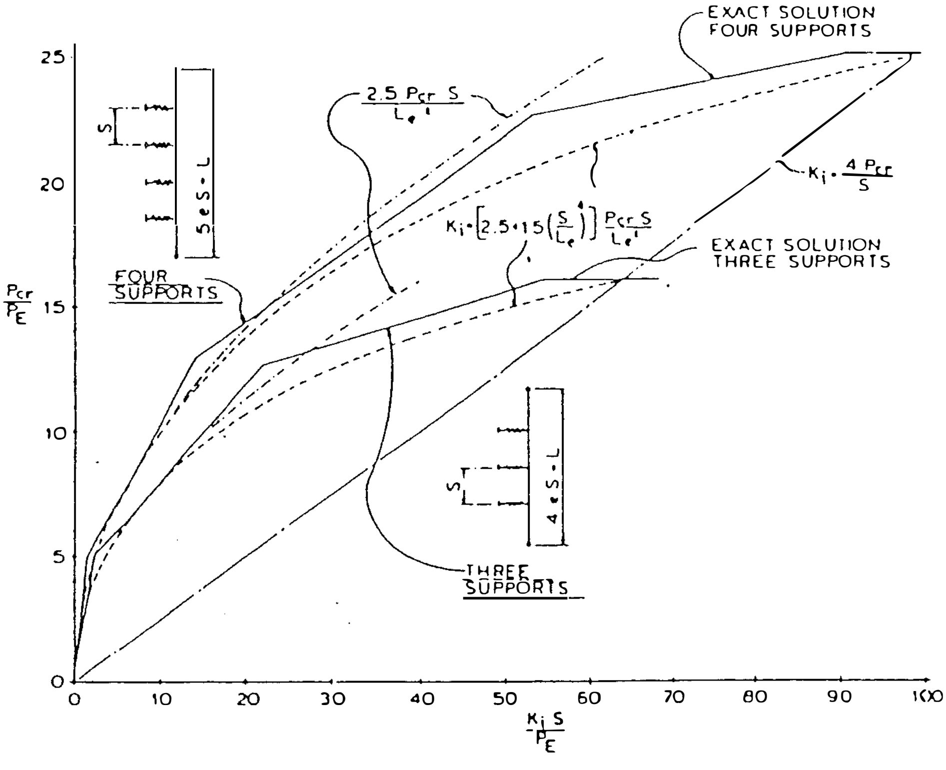


Fig. 5.1: Relatie: draagkracht kolom - veerstijfheid ondersteuningen.

Drie benaderingsformules worden vergeleken met de "exact solution" (fig. 5.1). Indien de onderlinge afstand van de verende ondersteuningen S klein is t.o.v. de kniklengte L_e, dan kan een equivalente continue veerstijfheid worden berekend, zodat de kolom weer als continue verend gesteund kan worden beschouwd. Deze methode geeft voor alle slankheden een goede benadering van de benodigde veerstijfheid, zolang: $F_{cr} \leq 0{,}75.F_E$ $(L_e = S)$

Waarin: F_{cr} = Eulerse knikkracht.
F_E = Eulerse knikkracht (met $L_e = S$).

Een zeer conservatieve waarde voor de benodigde veerstijfheid geeft een formule welke ontwikkeld is door Winter.
De derde formule luidt:

$$K_1 = [2.5 + 1.5(S/L_e)^4][F_{cr}S/L_e^2] \quad (1)$$

Deze formule is gebaseerd op de twee voorgaande, geeft een goede maar conservatieve benadering van de benodigde veerstijfheid. Deze formule is geldig voor het gehele spannings gebied en is ook geschikt als S van dezelfde orde grootte is als L_e.

5.2.4. Veerstijfheid voor een door minder dan drie veren gesteunde kolom.

Ook voor een door één of twee veren gesteunde staaf worden wel benaderingsformules gebruikt. Deze formules geven een lineaire relatie tussen de veerstijfheid en draagkracht van de kolom, tot aan de kritieke veerstijfheid.
Vooral bij een door twee veren gesteunde staaf is deze formule erg conservatief. Het is daarom beter om voor staven die door één of twee veren worden gesteund de formules van de "exact solution" te gebruiken.

5.2.5. Evaluatie van de tangent modulus.

Zodra de normaalspanning.in de kolom de proportionaliteitsgrens overschrijdt is het materiaalgedrag niet meer lineair elastisch. De E-modulus moet dan worden vervangen door de tangent modulus, welke afhankelijk is van het spanningsnivo (fig. 5.2).
De relatie tussen de spanning en de tangent modulus wordt in het artikel parabolisch verondersteld (gebaseerd op de CRC uitdrukking). Bij een spanning gelijk aan de proportionaliteitsgrens is de tangent modulus gelijk aan de E-modulus. Naarmate de spanning stijgt neemt de tangent modulus af tot een waarde 0 bij de vloeispanning.

In formule :

$$E_t = 4.(\frac{F_{cr}}{F_e}).(1-\frac{F_{cr}}{F_e}).E \qquad \frac{F_{cr}}{F_e} \geq 0.5 \qquad (2)$$

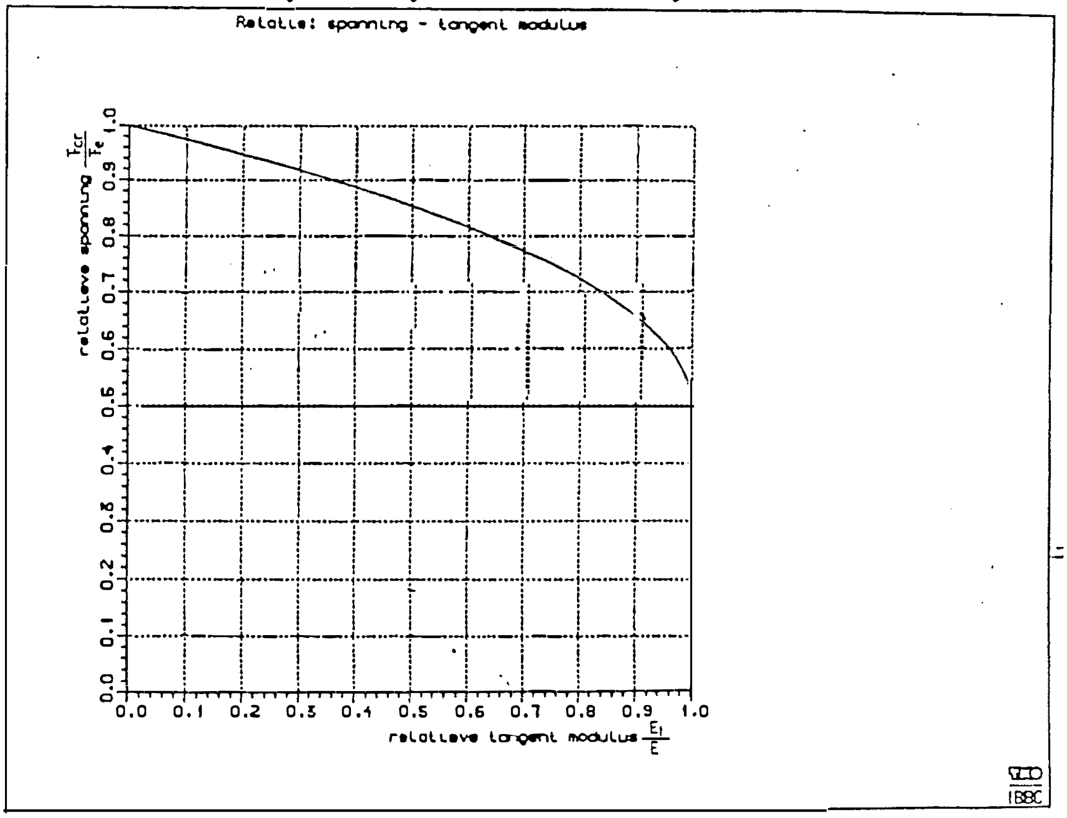


Fig. 5.2: Relatie: normaalspanning - tangent modulus.

5.2.6. Vereiste veersterkte en stijfheid.

De imperfecties van kolommen wordt in rekening gebracht m.b.v. de factor $(d_0/d + 1)$. Hierin is d_0 de beginexcentriciteit en d de bijkomende uitbuiging. Door nu de benodigde veerstijfheid van perfect rechte kolommen te vermenigvuldigen met deze factor, wordt de vereiste stijfheid van verende ondersteuningen voor imperfecte kolommen gevonden. Algemeen geaccepteerd is echter dat de vereiste veerstijfheid van imperfect verend gesteunde kolommen twee maal de benodigde veerstijfheid moet zijn van eenzelfde ideaal rechte verend gesteunde kolom. Dit wordt bereikt door d_0 gelijk te stellen aan d.
De benodigde sterkte is nu de vereiste veerstijfheid van een imperfecte kolom, vermenigvuldigd met de bijkomende verplaatsing, t.g.v. de belasting, juist voor het bezwijken van de kolom.

5.3. Commentaar.

Het artikel geeft oplossingen voor een groot aantal gevallen van verend gesteunde staven. De oplossingen zijn kort en bondig geformuleerd.
Behandelt wordt een tweetal factoren, welke van invloed zijn op de benodigde sterkte en stijfheid van verende ondersteuningen, de E_t-modulus en de imperfectie van kolommen. Gebruik van de E_t-modulus levert t.o.v. het gebruik van de "normale" E-modulus inderdaad een reductie op van de benodigde veerstijfheid. Deze parameter is dus van belang voor het onderzoek.
Ook de imperfecties hebben invloed op de benodigde sterkte en stijfheid van de verende ondersteuningen en zijn daarom ook van belang voor mijn onderzoek. Echter de methode die in dit artikel voor het in rekening van imperfecties is gebruikt, is gebaseerd op of overgenomen uit het werk van Winter [28].

6. Publicatie Matsui, Yagi [8].

On the lateral bracing required for compression members
Stability of steel structures, Liege 13-15 April 1977,
Priliminary report, pp 101-106

6.1. Samenvatting.

In het artikel worden verend gesteunde kolommen m.b.v. een eindige elementen methode onderzocht. De uitgangspunten en varierende parameters worden eerst vermeld. Daarna worden de numerieke resultaten besproken. Het blijkt dat op grond van de numerieke resultaten conclusies kunnen worden getrokken omtrent o.a. de stijfheid en sterkte van de verende ondersteuningen.

6.2. Inhoud.

6.2.1. Inleiding.

Het probleem van de verend gesteunde kolommen valt in twee groepen uiteen. De eerste groep betreft de centrisch belaste, perfecte rechte kolommen. Hiervan is voornamelijk de relatie tussen de stijfheid van de verende ondersteuningen en de toelaatbare knikkracht onderzocht.
De tweede groep betreft kolommen met initiële imperfecties. In het elastische gebied is dit o.a. door Zuk en Winter onderzocht. Hierbij is naast de vereiste stijfheid ook de benodigde sterkte van de ondersteuningen onderzocht. Het elasto-plastische gebied is door enkele Japanezen (o.a. Matsui zelf) onderzocht. Zij beschouwden een gedrukte staaf met rechthoekige doorsnede, alleen in het midden gesteund.

6.2.2. Methode en uitgangspunten.

De beschouwde modellen zijn m.b.v. de eindige elementen methode onderzocht. De modellen worden daarbij belast door een excentrisch aangrijpende kracht. Bij de analyse van het elasto plastisch gedrag zijn de volgende veronderstellingen gemaakt:

1.) Het model is behandeld als een 1-dimensionale staaf.
2.) De relatie tussen spanning en vervorming is bi-lineair verondersteld, met een E-modulus na vloeien van 0,01 E.
3.) Het effect van dwarskrachtsvervorming is verwaarloosd.
4.) Lokale en zijdelingse knik zijn buiten beschouwing gelaten.

6.2.3. Parameter studie

In dit onderzoek zijn drie modellen beschouwd. Een op 1,2 en 3 plaatsen gesteunde staaf. De beschouwde parameters zijn:

1.) De vorm van de doorsnede.
2.) De slankheid van de kolom.
3.) De stijfheid van de ondersteuningen (gerelateerd aan de stijfheid van de kolom, zodat deze parameter (k) dimensiloos wordt).
4.) De excentriciteit van de belasting.

Voor de door 2 en 3 veren gesteunde staaf is het beschouwde aantal gevallen per parameter minder dan bij de door 1 veer gesteunde staaf.

6.2.4. Numerieke resultaten en discussie.

De resultaten zijn vergeleken met drie verschillende knikcurven, te weten:

1.) F_{cr1}: Centrisch belaste kolommen, sterkte gespecificeerd door het AIJ (Architectural Institute of Japan).
2.) F_{cr2}: Curve a ECCS.
3.) F_{cr3}: Jezek's benaderings sterkte van excentrisch belaste kolommen.

Het blijkt dat bij gedrongen staven de maximaal toelaatbare belasting F_{cr1} en F_{cr2} niet wordt gehaald, ondanks verhoging van de veerstijfheid! Verhoging van de veerstijfheid is op een gegeven moment niet meer effectief, omdat bij toename van k = 3 naar k = 5, de toename van de draagkracht van de kolom (F_{max}) slechts gering is (fig. 6.1). Het verschil tussen de F_{max} en F_{cr1} en F_{cr2} is echter verwaarloosbaar klein, en dus is de verlaging van de veiligheid niet kritiek. Uit dit oogpunt bekeken is een stijfheid van $k \geq 3$ voldoende.

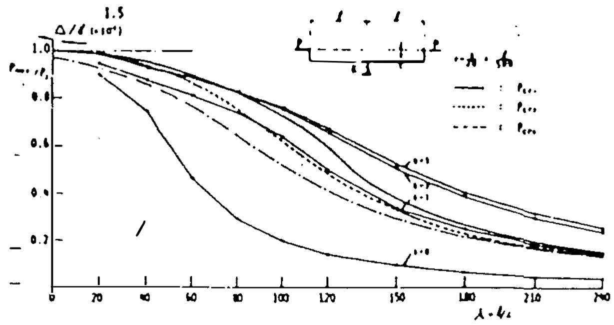


Fig. 6.1: Relatie: slankheid - draagkracht kolom.

Bij vergelijking van de resultaten van de verschillende modellen, lijkt het dat de maximale sterkte van een door twee of drie veren gesteunde staaf kleiner is dan de door 1 veer gesteunde staaf. Conclusies mogen echter niet worden getrokken, omdat de parameterstudie nog niet compleet is.
De benodigde sterkte van (een) ondersteuning(en) is sterk afhankelijk van de slankheid van de staaf en de stijfheid van de ondersteuning(en). Bij toename van de stijfheid van de ondersteuningen, neemt de benodigde sterkte af.

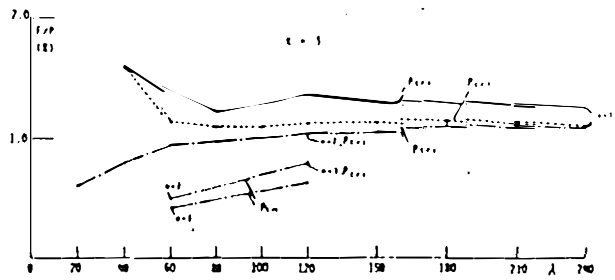


Fig. 6.2: Relatie: veerkracht - slankheid kolom

Indien F_{cr1} of F_{cr2} wordt vereist, is de benodigde stijfheid van de ondersteuningen 3. Deze conditie leidt tot de maximale waarde voor de sterkte van de ondersteuningen. Het blijkt nu dat indien $k \geq 3$ de benodigde sterkte van de ondersteuningen niet groter is dan 2% van de in de kolom aanwezige normaalkracht (fig. 6.2). De 2% ontwerpregel, welke gebaseerd is op elastische analyses, voldoet dus ook in het elasto-plastisch gebied.
De verschillen in benodigde sterkte en stijfheid van de ondersteuningen, tussen een rechthoekige doorsnede en de andere doorsneden zijn erg klein. Bovenstaande conclusies gelden dus ook voor deze doorsneden.

Tot slot wordt nog geconcludeerd dat de benodigde sterkte van de ondersteuningen afneemt, als het aantal ondersteuningen toeneemt.

6.2.5. Elastische oplossing van de benodigde veersterkte.

De elastische oplossing van de benodigde veerkracht, van een alleen in het midden gesteunde staaf is bij λ = 120 en λ = 180 gelijk aan die van de numerieke analyse. Bij λ = 60 is de benodigde veerkracht 5% lager.
De elastische oplossing van de veersterkte is effectief te gebruiken indien de normaalkracht in de kolom iets lager is dan F_{cr}, of als de excentriciteit van de belasting niet gelijk is aan de excentriciteit die bij de numerieke analyses is gebruikt.

6.3. Commentaar.

Het artikel geeft een puur numerieke analyse weer van het probleem. Op achtergronden e.d. wordt niet ingegaan, waardoor geen inzicht in de problematiek rondom de verende gesteunde staven in het elasto-plastisch gebied wordt verkregen. Oorzaken van de resultaten kunnen dan ook niet worden achterhaald, hetgeen jammer is.
Daarentegen geeft het artikel duidelijk de invloed van de verschillende parameters weer. De resultaten en conclusies kunnen dan ook goed worden gebruikt als vergelijkingsmateriaal voor resultaten van het onderzoek.
Het blijkt dat bij gedrongen staven de maximaal toelaatbare belasting niet wordt gehaald, ondanks verhoging van de veerstijfheid. Dit zou(!) er op kunnen duiden dat de z.g.n. "onrealistisch hoge waarden", die met de huidige methode voor de kritieke veerstijfheid worden gevonden, toch niet zo onrealistisch zijn. De benodigde sterkte van de ondersteuningen is in deze publicatie gebaseerd op een constante relatieve veerstijfheid van k = 3. Het is de vraag of deze veerstijfheid in het elastische gebied nodig is. Uit figuur 5.1 blijkt van niet. De veerstijfheid kan dus in het elastische gebied afnemen, waardoor de benodigde veerkracht zal toenemen. Is de benodigde veerkracht dan nog wel kleiner dan 2% van de in de kolom aanwezige normaalkracht? Waarschijnlijk wel, omdat de 2% regel voortkomt uit elastische analyses. Dit effect wordt helaas niet in het artikel beschreven.

7. Publicatie Medland [9].

A basis for the design of column bracing.
The structural Engineer, volume 55, No. 7, July 1977, pp 301 - 307

7.1. Samenvatting.

In het artikel wordt de relatie onderzocht tussen de draagkracht van verend gesteunde kolommen en de kracht in de verende ondersteuningen. Niet één kolom wordt beschouwd, maar meerdere, onderling gekoppeld door elastische veren (fig. 7.1). De normaalkracht is uniform of parabolisch verdeeld over de lengte van de kolom.

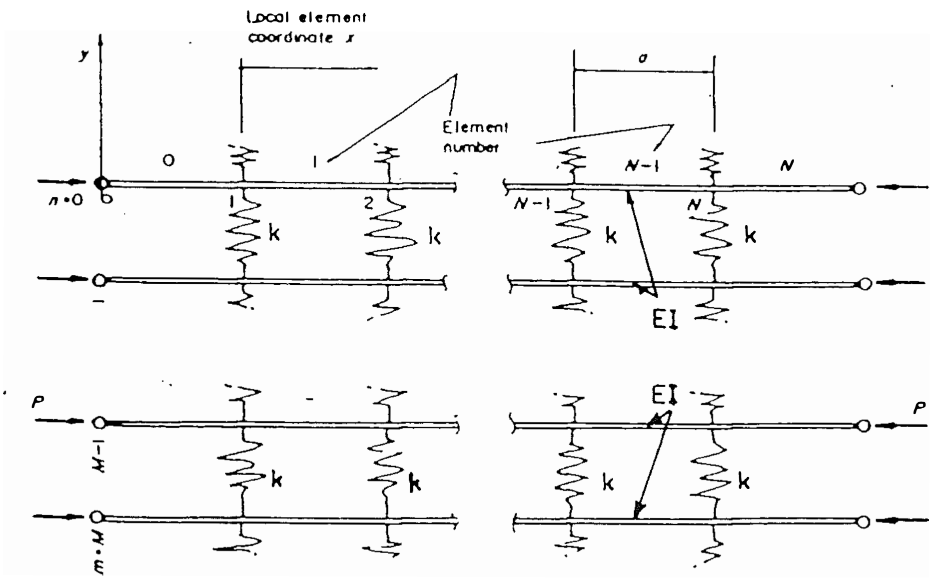


Fig. 7.1: Schematisering.

7.2. Inhoud.

7.2.1. Inleiding.

Voor het ontwerpen van verend gesteunde kolommen zijn twee factoren van belang: de elastische kniklast (Euler) en de kracht in de verende ondersteuningen.
De Eulerse kniklast is een bovengrens voor de draagkracht van een kolom en is afhankelijk van de veerstijfheid.
Sterkte van de verende ondersteuningen is nodig, omdat de kolommen

altijd imperfect zijn. T.g.v. deze imperfecties en de normaalkrachten in de kolommen, ontstaan krachten in de verende ondersteuningen. De maximale krachten in de verende ondersteuningen moeten worden geëvalueerd.

7.2.2. Analytische berekening.

De te onderzoeken constructie wordt als volgt geschematiseerd (fig. 7.1):

1.) De kolommen hebben een constante doorsnede en zijn bij de uiteinden scharnierend opgelegd.
2.) De veren hebben allen een gelijke stijfheid en zijn op onderling gelijke afstanden aan het zwaartepunt van de kolommen verbonden.

De analyses zijn uitgevoerd m.b.v. een matrixmethode. De stijfheidsmatrix wordt m.b.v. stabiliteitsfuncties opgesteld, en de kolommen worden hierbij als volkomen recht beschouwd.
Knik van de constructie treedt nu op indien de determinant van de stijfheidsmatrix gelijk is aan nul. De belasting waarbij dit gebeurt is de kritieke belasting, ofwel de elastische kniklast.
Voor het bepalen van de kracht in de verende ondersteuningen wordt verondersteld dat de kolom initieel een sinusvormige uitbuiging heeft met een amplitude van 1/1000 van de halve golflengte. De verende ondersteuningen zijn daaraan spanningsloos bevestigd. De axiale kolombelasting heeft nu verandering in de uitbuiging van de kolom tot gevolg en dus ook van de kracht in de verende ondersteuningen. Door nu verschillende sinusvormen te combineren kan de maximale bijkomende verplaatsing van de kolom t.p.v. de steunpunten worden gevonden en dus de maximaal op te nemen kracht door de verende ondersteuningen.

7.2.3. Evaluatie van de kritieke belasting.

De Eulerse kniklast van de kolommen (P) is afhankelijk van de stijfheid van de verende ondersteuningen (fig. 7.2). De Eulerse knikkracht is maximaal gelijk aan de Eulerse kniklast van een "pin-ended" kolom, met als lengte de onderlinge afstand van de verende ondersteuningen ($\rho = P/P_E = 1$).
Indien het aantal steunpunten toeneemt dan blijkt dat de krommen de

oplossing van een continue verend gesteunde kolom benaderen. Voor kleine stijfheden ($F_u \leq 1$) is de oplossing van een continue verend gesteunde kolom altijd een goede benadering. Voor tussenliggende waarden ($1 \leq F_u \leq 2.5$) worden de volgende formules gegeven:

$$\rho_{cr} = 0.5 + 0.2F_u \tag{1}$$

waarin: $F_u = f / d_u$

$f = ka^3 / 12EI$

$d_u = 0.45(M-1)^2 + 1.35(M-1) + 1$

Bij een parabolisch verdeelde belasting, wordt de belasting stapsgewijs aangebracht. De grootste normaalkracht, in het midden van de kolom, wordt P genoemd. Het blijkt nu dat bij toename van het aantal belastingspunten de draagkracht P van de kolom groter wordt (fig. 7.2b). De oorzaak hiervan ligt in het feit dat minder kolomlengte onder hoge druk verkeert.

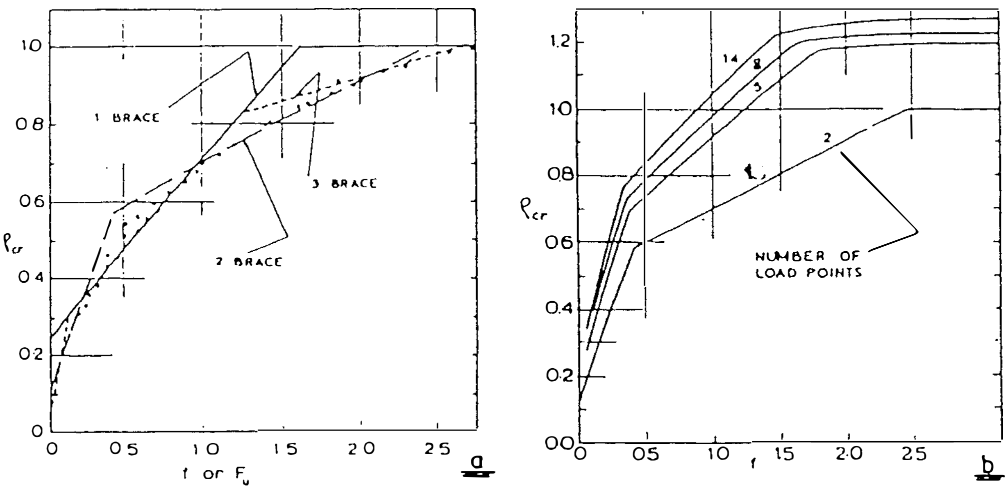


Fig. 7.2: Relatie draagkracht kolom - stijfheid ondersteuning.

In de krommen van figuur 7.2b zitten dezelfde discontinuïteiten als bij de krommen in figuur 7.2a. Na de laatste knik in de krommen stijgt de draagkracht in verhouding tot de veerstijfheid van de ondersteuningen zeer langzaam. De stijfheid behorende bij de laatste knik in de krommen, kan ook hier worden gezien als een kritieke veerstijfheid.

7.2.4. Evaluatie van de veersterkte.

De benodigde veersterkte wordt uitgedrukt in procenten van de axiale kolombelasting. Het is onderzocht voor 1 tot 6 "gekoppelde" kolommen met 1 tot 12 verende ondersteuningen.
Nu blijkt dat bij een gegeven initiële uitbuiging en veerstijfheid de veerkracht langzaam stijgt bij toenemende axiale belasting. Nadert de axiale belasting de draagkracht van de kolom dan stijgt de veerkracht relatief erg snel (zie het verschil van ρ = 0.2 → 0.3 en van ρ = 0.8 → 0.9 ; fig. 7.3).
Voor een parabolische belasting geldt hetzelfde. De vereiste veersterkte is in het algemeen iets lager dan bij de uniform verdeelde belasting.

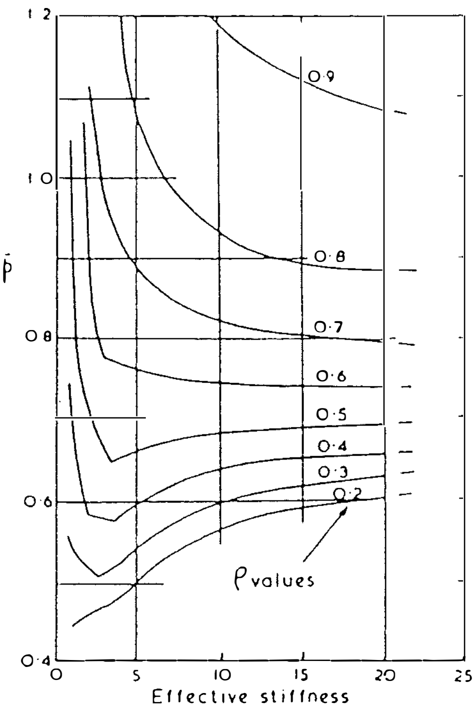


Fig. 7.3: Relatie stijfheid -sterkte ondersteuning

7.2.5. Opmerkingen/conclusies van Medland.

Bij parabolisch belaste verend gesteunde kolommen, met een groot aantal belastingspunten en weinig verende ondersteuningen, is de maximale draagkracht (ρ_{cr}) groter dan 1. Verhoging van de axiale normaalkracht van ρ = 1 naar ρ = 1.1 vereist een veel grotere sterkte van

de verende ondersteuningen. Geadviseerd wordt dan ook om een axiale belasting van $\rho \geq 1$ niet toe te staan, en de veren te dimensioneren op een kracht behorende bij $\rho = 1$.
Veelal wordt bij parabolische belaste, verend gesteunde kolommen verjonging van de doorsnede van de kolom toegepast. Als het traagheidsmoment van de kolom evenredig is aan de de axiale belasting dan is de draagkracht van de kolom (ρ) iets kleiner dan 1. De relaties tussen de stijfheid van de ondersteuningen en de draagkracht van de kolom van figuur 7.2a is op dit geval van toepassing.
De constructie moet ook op andere bezwijkvormen worden gecontroleerd, zoals: torsie, torsieknik en knik uit het vlak.
Tot slot wordt geconcludeerd dat het dimensioneren van de kolom op een knikkracht waarvan de kniklengte gelijk is aan de onderlinge afstand van de ondersteuningen, een goede ontwerpregel is voor alle gevallen.

7.3. Commentaar.

In het artikel worden twee gevallen geanalyseerd. De eerste betreft het bepalen van de relatie tussen de elastische knikkracht van de kolom en de veerstijfheid van de ondersteuningen. De kolommen zijn hierbij volkomen recht verondersteld. De tweede betreft de veersterkte in relatie tot de axiale kracht in de kolom, waarbij de kolommen wel imperfect zijn verondersteld. Een directe relatie tussen de stijfheid en sterkte van de ondersteuningen en de draagkracht van de kolom mag dus niet worden gelegd.
In de inleiding wordt vermeld dat twee factoren van belang zijn, de elastische kniklast en de kracht in de verende ondersteuning. Echter ook de stijfheid van de verende ondersteuning is van belang, omdat daar de elastische kniklast direct van afhankelijk is.

--

8. Publicatie Medland, Sedegin [10].

The buckling of interbraced columns.
Solids Structures, Vol. 14, 1978, pp 375 - 384

8.1. Samenvatting.

Het artikel behandelt de analyse van een systeem van parallel staande kolommen, gekoppeld en gesteund door elastische veren (fig. 7.1). Het stabiliteitsprobleem wordt onderzocht m.b.v. differentiaalvergelijkingen met rand- en overgangsvoorwaarden. De oplossing wordt weergegeven door één formule. Deze geeft relaties tussen de stijfheid van de veren en de elastische draagkracht van de kolommen, waarbij het aantal kolommen en ondersteuningen kan variëren.

8.2. Inhoud.

8.2.1. Basisvergelijkingen.

Beschouwd wordt een elementje in de kolom m, tussen de veren n en $n+1$. De vergelijkingen voor het moment en de dwarskracht in het elementje luiden als volgt:

$$M = EIy'' \tag{1}$$

$$S = M' + Py' = EIy''' + Py' \tag{2}$$

Het combineren van deze twee vergelijkingen levert de D.V. van het evenwicht voor het elementje op:.

$$EIy'''' + Py'' = 0 \tag{3}$$

8.2.2. Oplossing.

De algemene oplossing van vergelijking (3) luidt:

$$y_{n,m} = \frac{A_{n,m}(a\sin\lambda x - x\sin\lambda a)}{a} + \frac{B_{n,m}(a\sin\lambda(a - x) - (a - x)\sin\lambda a)}{a}$$

$$+ C_{n,m}x/a + D_{n,m}(a - x)/a \qquad (4)$$

waarin: $\lambda^2 = \frac{P}{EI}$

De constanten A, B, C, en D kunnen nu worden bepaald m.b.v. rand- en overgangsvoorwarden. De volgende overgangsvoorwaarden kunnen daarvoor worden gebruikt:

1.) Continuiteit van de verplaatsingen t.p.v. de veren.

2.) Hoekverdraaiing idem.

3.) Momenten idem.

4.) Evenwicht van de dwarskracht ter plaatse van de veren.

Vergelijking (4) in combinatie met deze voorwaarde leidt, na een lange herschrijving, tot twee homogene vergelijkingen met twee constanten B en D. Een niet triviale oplossing kan worden gevonden door de determinant gelijk te stellen aan nul. Dit leidt tot de volgende vergelijking:

$$X^2 - X[(1 - \cos(t)) + \beta(t - \sin(t))/t^3] + \beta(1 - \cos(t))/t^2 = 0 \qquad (5)$$

waarin: $X = 1 - \cos(j\pi/(N + 1))$

$t = \lambda a = a\sqrt{P/EI}$

$\beta = \frac{Ka^3}{EI}(1 - \cos(\alpha))$

$j = 1, N$

$\alpha = k\pi/(M + 1)$ voor $k = 1, M$, indien de "kolom" $M + 1$ de fundering is.

8.2.3. Knikvormen.

De knikvormen worden geassocieerd met de factor j. Is deze bekend dan is ook de relatie bekend tussen de stijfheid van de veren en de elastische kniklast van de kolom. Daar voor $j \geq 1$ de formules

elkaar overlappen, is bij eenzelfde stijfheid de formule geldig welke de laagste elastische kniklast geeft.
De kritieke veerstijfheid kan ook m.b.v. formule (5) worden bepaald. De kolommen knikken sinusvormig uit, met buigpunten t.p.v. de verende koppelingen, dus $j = N$. De elastische kniklast is nu gelijk aan P_E. Herschrijven van formule (5) met deze gegevens levert een formule voor de kritieke verstijfheid op:

$$\beta = [1 + \cos(\pi/(N + 1))]\pi^2 \tag{6}$$

Opnieuw uitgaande van formule (5) kan m.b.v. standaardprocedures voor iedere j,N een conservatieve benaderingsformule worden gevonden voor de draagkracht van de kolommen. Deze formule luidt:

$$\beta(t) = \frac{t^3(1 - \cos(t))}{(\sqrt{t} + \sqrt{\sin(t)})^2} \tag{7}$$

Deze formule kan echter op zijn beurt zeer goed worden benaderd door de formule van een kwart cirkel (fig. 8.1). Zo wordt dus een veilige en eenvoudige oplossing gevonden voor een complex probleem.

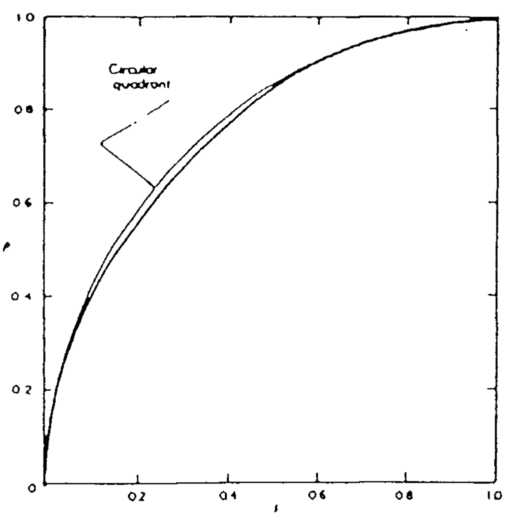


Fig. 8.1: Conservatieve relatie veerstijfheid draagkracht.

8.2.4. Conclusies van Medland en Sedegin.

1.) Door het gebruik van een schaalfactor ($2(1-\cos\alpha)$) , kunnen de oplossingen van een enkele verend gesteunde kolom worden gebruikt voor meerdere, onderling door elastische veren gekoppeld, verend gesteunde kolommen.

2.) De gebruikte methode in dit artikel kan niet worden toegepast op andere belastingsgevallen. Uit [9] is echter gebleken dat de formules voor kolommen, belast door een uniforme normaalkracht, mogen worden toegepast op kolommen belast door een parabolische normaalkracht, zonder dat een te conservatieve benadering wordt verkregen.

8.3. Commentaar.

Het artikel behandelt een exacte afleiding voor knik van een systeem van parallel staande kolommen, gekoppeld en gesteund door elastische veren. Dit resulteert in één formule waarmee voor alle situaties de kritieke belasting kan worden bepaald.
Iets nieuws levert het artikel echter niet op. De resultaten zijn ook al door anderen gevonden (zie o.a. [27]).
Conclusie 2 is waarschijnlijk niet juist. Ook voor andere belastingsgevallen (b.v. parabolische belasting), moet met eenzelfde methode een oplossing kunnen worden gevonden. Deze zal echter veel complexer zijn.

9. Publcatie Medland [11].

Flexural-torsional buckling of interbraced columns.
Eng. Struct., April 1979, Vol. 1, pp 131 -138

9.1. Samenvatting.

Het artikel onderzoekt de stabiliteit van een aantal parallelle kolommen, gekoppeld en ondersteund door elastische veren. De constructie wordt daarbij geschematiseerd als in figuur 9.1a. De kolommen zijn aan de uiteinden scharnierend opgelegd. De stijfheid van de veren, aan de uiteinden (n = 0,N), tegen torderen van de kolom, wordt verondersteld de helft te zijn van de stijfheid van de andere rotatieveren die de staaf tegen torderen steunen.
Van de veren wordt verwacht dat ze steun verlenen aan de kolom, tegen: zijdelingse uitbuiging (K_L), torsie (K_T) en rotatie van de kolom in lengte richting (K_R). Ook de excentriciteit van de veren (e) wordt in het onderzoek meegenomen.
Bij het onderzoek worden differentiaalvergelijkingen van het evenwicht opgesteld en er wordt gebruik gemaakt van de matrixtechniek.

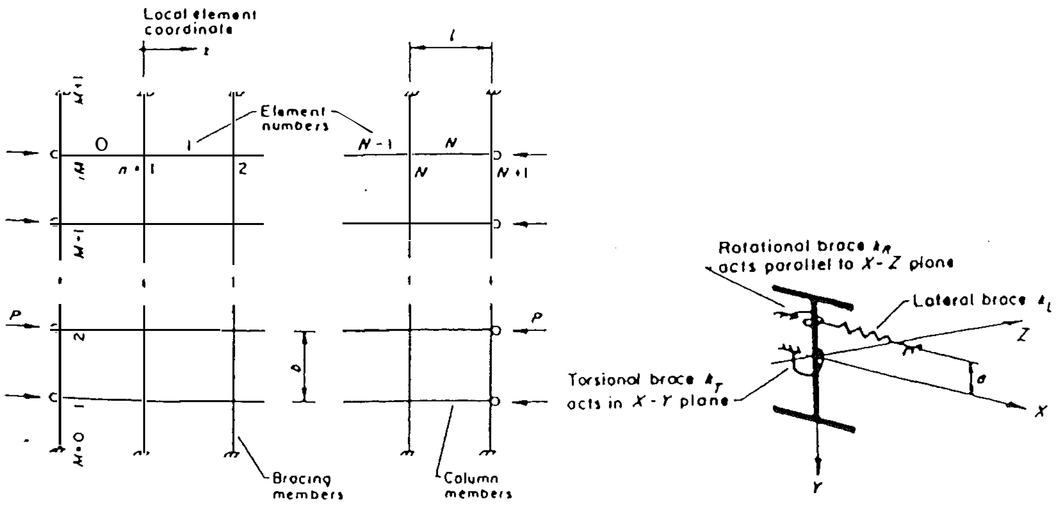


Fig. 9.1: Schematisering.

9.2. Inhoud.

9.2.1. Basisdifferentiaalvergelijkingen.

Evenwicht van een kolomelement n,m in uitgebogen toestand wordt gegeven door het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

$$u_{n,m}'''' + \lambda^2 u_{n,m}'' = 0 \tag{1}$$

$$\varphi_{n,m}'''' + \alpha^2 \varphi_{n,m}'' = 0 \tag{2}$$

waarin: $\lambda^2 = P/EI$

$\alpha^2 = (PI_p/A - GJ)/EI_w$

Uit deze twee differentiaalvergelijkingen kunnen u (zijdelingse verplaatsing) en φ (rotatie van de kolom) worden opgelost. In de formules van u en φ komen 4 constanten voor per veld. Om deze constanten te kunnen oplossen zijn in principe 8 vergelijkingen nodig. Door continuïteit te eisen van de verplaatsingen (u en φ) en de hoekverdraaiingen (u' en φ') t.p.v. de knooppunten worden er 4 vergelijkingen verkregen. De overige 4 vergelijkingen kunnen worden verkregen door het inwendig evenwicht te beschouwen t.p.v. de knooppunten.
Na een lange herleiding met subtituties worden 4 homogene vergelijkingen gevonden met 4 onbekende constanten.

9.2.2. Veerstijfheid / meerdere kolommen.

Het effect van meerdere kolommen op de veerstijfheden blijft beperkt tot een "schaalfactor". Voor de zijdelingse stijfheid is deze factor $2(1 - \cos\psi)$ en voor de rotatie- en torsiestijfheid is de factor $2(2 + \cos\psi)$.
De waarde van ψ is afhankelijk van de randvoorwaarden. Is de veer tussen de kolommen M en $M + 1$ gelijk aan die tussen 0 en 1 dan geldt voor ψ:

$$\psi = \psi_i = i\pi/(M + 1) \qquad i = 1,2,..... \tag{3}$$

De laagste effectieve zijdelingse stijfheid β ($= K_L l^3/EI$), wordt dus bereikt indien $(1 - \cos\psi)$ een minimum is en dus als ψ_i de waarde 0 of een even factor maal π benaderd. De rotatie en torsieveren verzorgen een minimum effectieve steun indien ψ_i een oneven factor maal π benaderd.
Knik van de constructie treedt nu op als de gecombineerde stijfheid

van alle veren een "effectief" minimum is. De waarde van ψ_i is afhankelijk van de verhouding tussen de veerstijfheden en de excentriciteit.

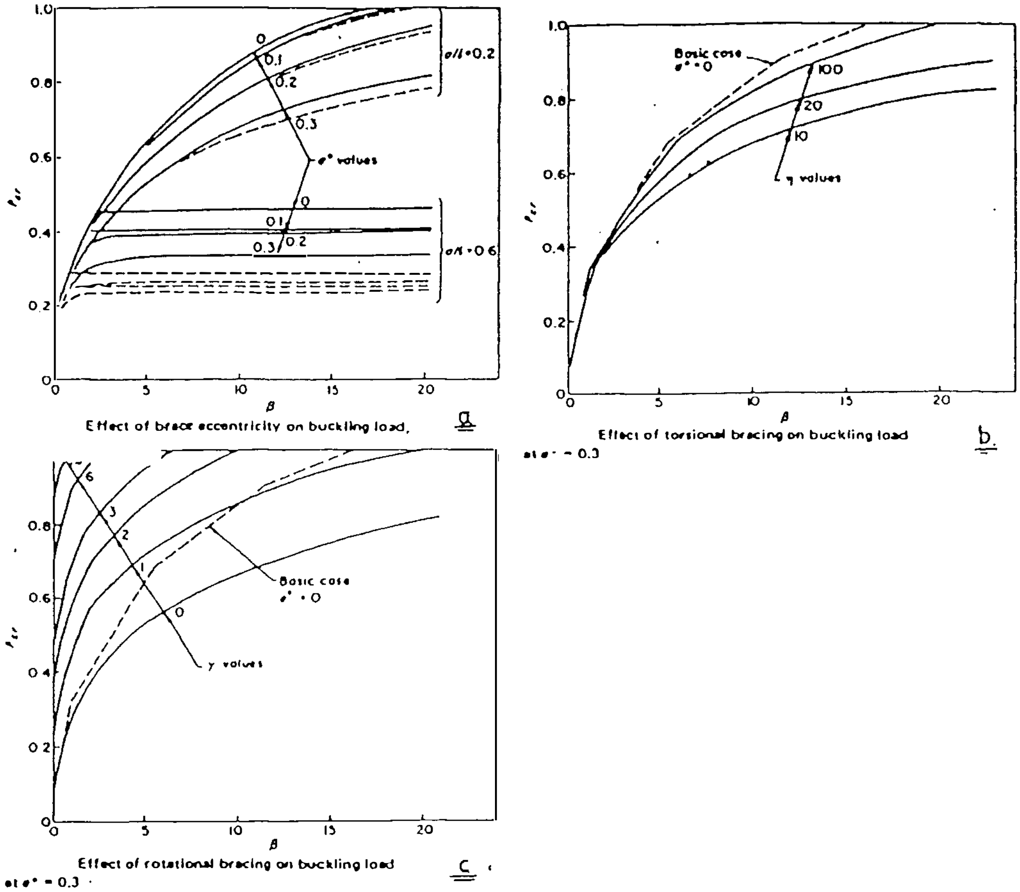


Fig. 9.2: Invloed van de veerstijfheden op de draagkracht van de kolom.

9.2.3. Knikcondities.

De kritieke belasting P kan nu worden bepaald door de determinant van de resterende homogene vergelijkingen gelijk te stellen aan 0. De termen in de determinant zijn een functie van:

1.) De knikvorm van de kolommen weergegeven door de factor (ϑ_j).

2.) de veerstijfheden, die de term ψ bevatten.

3.) De belasting P.

Indien de excentriciteit gelijk is aan nul, dan ontstaat een ontkoppeld stelsel van 2 x 2 homogene vergelijkingen met elk 2 onbekenden. Dit

houdt in dat de translatie en rotatieveer de kolom alleen tegen zijdelingse verplaatsing steunen. De torsieveer levert dan de enige steun tegen torderen van de kolom.
Als de excentriciteit niet gelijk is aan nul, dan leveren de translatieveren een torsie moment. De twee knikvormen (torsie- en zijdelingse knik) zijn dan dus afhankelijk van elkaar.

9.2.4. Knik van een enkele kolom.

Het speciale geval waarbij de excentriciteit (e) en de rotatiestijfheid (K_T) gelijk zijn aan nul en torsie buiten beschouwing wordt gelaten, wordt in [10] behandeld. Dit geval wordt hier als referentie gekozen (fig. 9.2; $e^* = 0$).
Uit de grafieken (fig. 9.2), blijkt dat toename van de excentriciteit tot gevolg heeft dat de draagkracht van de kolom minder wordt. Verhoging van de rotatie-, torsie- en uiteraard de translatie stijfheid van de veren verhogen daarentegen de draagkracht van de kolom.

9.3. Commentaar.

Het artikel behandelt torsieknik van parallelle, door veren gekoppelde en gesteunde kolommen. Het materiaal gedrag wordt lineair elastisch verondersteld. De resultaten zijn dus alleen geldig voor slanke staven.
De staven zijn perfect recht verondersteld en ook de belasting grijpt centrisch aan. De invloed van imperfecties op de draagkracht van de kolom en de benodigde veerstijfheden is dus nog niet bekend.

10. Publicatie Medland, Sedegin [12].

Brace Forces in Interbraced Column Structures
Journal of the structural division, 14698, July 1979, ST7, pp 1543 - 1556

10.1. Samenvatting.

Het artikel onderzoekt de sterkte die nodig is voor de elastische koppelingen en ondersteuningen (veren), van een parallel staande kolommen (fig. 10.1).
In [9] is dit ook al gedaan met behulp van een matrix techniek. In dit artikel wordt gebruik gemaakt van een andere techniek. Evenwichtsvergelijkingen worden voor een elementje opgesteld en "samengevoegd" tot een differentiaalvergelijking. M.b.v. de oplossing van de differentiaalvergelijking kunnen de krachten in de veren worden bepaald. De kolommen worden daarbij initieel uitgebogen verondersteld.

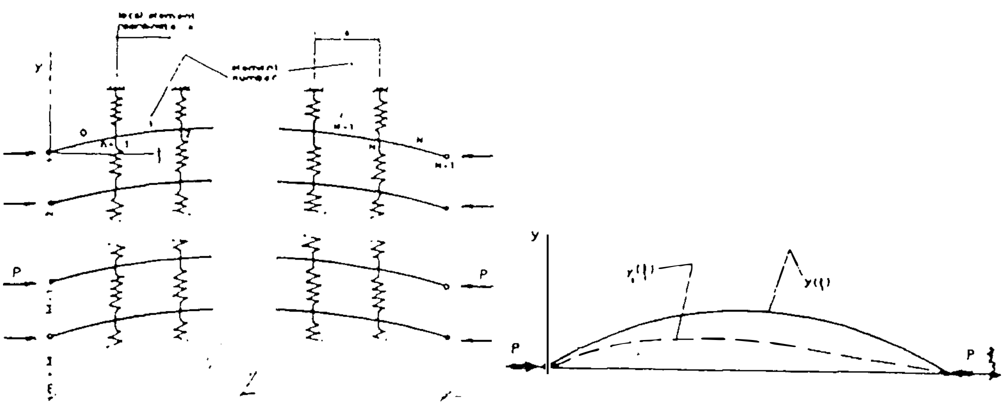


Fig. 10.1: Schematisering.

10.2. Inhoud.

10.2.1. Basisvergelijkingen.

De constructie wordt geschematiseerd als fig. 10.1. De verende ondersteuningen en koppelingen, in het vervolg veren genoemd, met een stijfheid K worden verondersteld spanningsloos aan de initieel uitgebogen kolommen te zijn bevestigd. De initiële uitbuiging van een kolom luidt als volgt:

$$y_I(\xi) = R_r \sin\left(\frac{r\pi\xi}{L}\right) \tag{1}$$

Voor de locale elementen kan de initiële uitbuiging worden herschreven m.b.v. de locale coördinaat x $(= \xi - na)$. Het evenwicht van zo 'n belast element wordt gegeven door de volgende differentiaal- vergelijking.

$$EI(y_{n,m}'''' - y_{nI}'') + Py_{n,m}'' = 0 \tag{2}$$

De oplossing van deze D.V. van het evenwicht luidt als volgt:

$$y_{n,m} = \frac{A_{n,m}(a\sin\lambda x - x\sin\lambda a)}{a} + \frac{B_{n,m}(a\sin\lambda(a - x) - (a - x)\sin\lambda a)}{a}$$
$$+ \frac{C_{n,m}x}{a} + \frac{D_{n,m}(a - x)}{a} + Q_r\sin(n + \frac{x}{a})\frac{r\pi a}{L} \tag{3}$$

waarin: $\lambda^2 = P/EI$

$Q_r = R_r/(1 - (\lambda^2\pi^2))$

De constanten A, B, C en D kunnen nu worden bepaald m.b.v. de volgende overgangsvoorwaarden t.p.v. de verende ondersteuningen.

1.) Continuïteit van de verplaatsingen.

2.) Hoekverdraaiing idem.

3.) Momenten idem.

4.) Evenwicht van de dwarskracht.

Dit leidt tot 4 vergelijkingen met 4 onbekenden per element en is in principe dus op te lossen. Eenvoudig is dit echter niet. Na een lange herleiding met subtituties wordt een uitdrukking voor D_m gevonden, welke voor twee gevallen wordt uitgewerkt ($\mu = 0$; kolom m niet verbonden met de fundering en $\mu = 1$; de kolom m is met een veer met veerstijfheid K aan de fundering verbonden). De factor $D_{n,m}$ kan nu worden gevonden door D_m terug te sustitueren in de gebruikte formule:

$$D_{n,m} = \sum_{j=1}^{\infty} D_{m,j}\sin n\vartheta_j = D_m\sin(n\vartheta_r) \tag{4}$$

10.2.2. Kracht in de veren.

De verplaatsingen van de kolommen zijn nu bekend. De verlenging of verkorting van de tussenliggende veren dus ook. De kracht in een veer is nu de verlenging of verkorting van de veer maal de stijfheid K van die veer. Voor de kracht $F_{n,m}$ geldt dus nu de volgende uitdrukking:

$$F_{n,m} = K[[y_{n,m}(0) - y_{nI}(0)] - [y_{n,m-1}(0) - y_{nI}(0)]] \qquad (5)$$

Voor de krachten in de veren die de kolommen aan de fundering koppelen gelden soortgelijke uitdrukkingen.
Praktisch is het om alle veren gelijk te houden en dus ook hun sterkte. Daartoe moeten de veren worden gedimensioneerd op de grootste kracht die voorkomt. Door de maximum kracht nog te delen door het aantal kolommen, wordt de kracht in de veren "onafhankelijk" gemaakt van het aantal kolommen. In het artikel worden de formules voor de maximum kracht uitgewerkt voor μ = 0,1.
Door voor y_I meerdere sinustermen te nemen kan een meer algemene initiële uitbuiging worden verkregen. De krachten die worden gevonden bij deze verschillende sinustermen mogen eenvoudig worden gesuperponeerd.

10.2.3. Toepassing.

De formules voor de benodigde sterkte van de veren kunnen grafisch worden weergegeven. Voor $\mu = 0$ en een amplitude van $0{,}001L/r$ is dit gedaan (fig. 7.3). Voor andere amplituden mogen de gevonden waarden eenvoudig met de verhouding van de amplituden worden vermenigvuldigd.
Doordat de veren worden ontworpen op de grootste kracht die optreedt, betekent dit dat veel veren worden overgedimensioneerd. Door de krachten in de veren afzonderlijk te beschouwen is dit probleem verholpen. De stijfheid van de veren moet echter wel constant blijven, omdat anders de afleiding van de formules niet meer correct is.

10.2.4. Conclusies van Medland en Sedegin.

In [9] is de oplossing voor de benodigde sterkte van verende ondersteuningen en koppelingen gevonden m.b.v. een niet efficiënte matrix techniek. De resultaten van het artikel [9] en dit artikel komen volkomen met elkaar overeen.
Het is niet waarschijnlijk dat alle kolommen dezelfde sinusvormige initiële uitbuiging, amplitude of oriëntatie bezitten. De oriëntatie van een bepaalde kolom kan bijvoorbeeld net tegengesteld zijn aan de rest

van de kolommen. Hierdoor zal de grootste veerkracht worden gereduceerd. Sommige veerkrachten zullen groter worden, maar kunnen nooit de veerkracht overtreffen waarop de staven zijn gedimensioneerd. Dit komt doordat bij het bepalen van de maximale kracht de oriëntatie van alle kolommen een vergrotende invloed hadden op de grootste veerkracht.

10.3. Commentaar.

In [9] wordt door de eerste schrijver een relatie gelegd tussen de Eulerse knikkracht van de kolom en de stijfheid van de veren, voor initieel rechte staven. De invloed van imperfecties op deze relatie is in beide artikelen helaas niet onderzocht.
Uitgegaan is in dit artikel van lineair elastisch materiaal. De formules zijn dus niet geldig voor gedrongen kolommen.

--

11. Publicatie Medland [13].

Locally induced moments in braced column structures
The structural Engineer, Vol. 57B, No. 3, Sept. 1979, pp 66 - 69

11.1. Samenvatting.

In het artikel wordt een formule afgeleid waarmee de verdeling van het buigend moment in een verend gesteunde kolom kan worden bepaald. Hierbij wordt gebruik gemaakt van een differentiaalvergelijking met bijbehorende rand- en overgangsvoorwaarden. De kolommen zijn initieel sinusvormig uitgebogen verondersteld (fig. 11.1).
Aangegeven wordt hoe de momentenverdeling in een kolom, die deel uitmaakt van een aantal parallelle, onderling gekoppelde, en verend gesteunde kolommen kan worden bepaald.
Tevens worden grafieken gegeven die voor elke doorsnede van de kolommen het maximale moment geven, onafhankelijk van het teken.
Het materiaalgedrag wordt lineair elastisch verondersteld.

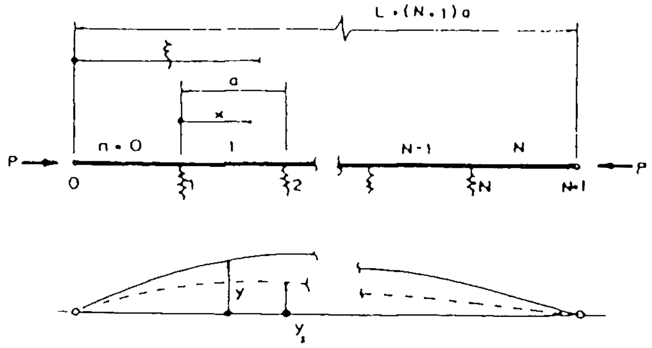


Fig. 11.1: Schematisering.

11.2. Inhoud.

11.2.1. De analyse

De basisvergelijkingen zijn gelijk aan die in [12]. De veronderstelde initiële uitbuiging luidt voor een enkele verend gesteunde kolom als volgt:

$$y_I(\xi) = R_j \sin(j\pi\xi / L) \quad (1)$$

waarin: j = Het aantal halve sinusgolven, over de lengte van de kolom.
R = de amplitude van een halve sinusgolf.

Het evenwicht wordt gegeven door de volgende differentiaalvergelijking:

$$EI(y_n''''(x) - y_{In}''''(x))) + Py_n''(x) = 0 \quad (2)$$

Van deze D.V. wordt de oplossing gegeven in de appendix van het artikel. De konstanten die hierin voorkomen kunnen worden bepaald m.b.v. de volgende overgangsvoorwaarden t.p.v. de verende ondersteuningen:

1.) Continuïteit van de verplaatsingen.
2.) Hoekverdraaiing idem.
3.) Momenten idem.
4.) Evenwicht van de dwarskracht.

De buigende momenten en dwarskrachten kunnen nu worden bepaald door de oplossing van (2) te substitueren in de bekende vergelijkingen van het moment (3) en de dwarskracht (4):

$$M = EI(y_n''(x) - y_{In}''(x)) \quad (3)$$

$$S = EI(y_n'''(x) - y_{In}'''(x)) + Py_n'(x) \quad (4)$$

11.2.2. Momentenverdeling.

De verdeling van het inwendige moment over de lengte van de kolom is nu bekend. Door de momentenverdeling te bepalen voor een aantal sinusvormige initiële uitbuigingen (j = 1 tot N), kunnen grafieken worden getekend die de maximale momentenverdeling (onafhankelijk van het teken) geeft (fig. 11.2a,b).
Uit deze grafieken blijkt dat de waarde van het grootste moment bij meer dan 1 verende ondersteuning stijgt, indien het aantal verende ondersteuningen toeneemt.
De invloed van de veerstijfheid kan worden bepaald door deze berekeningen voor verschillende stijfheden te herhalen. Het maximale moment t.p.v. de verende ondersteuningen komt voor bij relatief stijve ondersteuningen. Het maximale moment tussen twee verende ondersteuningen in komt daarentegen voor bij relatief zwakke ondersteuningen. Het voorgaande blijkt duidelijk uit figuur 11.3, waar de maximale momentenverdeling voor een door vier veren gesteunde kolom is

gegeven, voor twee verschillende veerstijfheden (F_u).

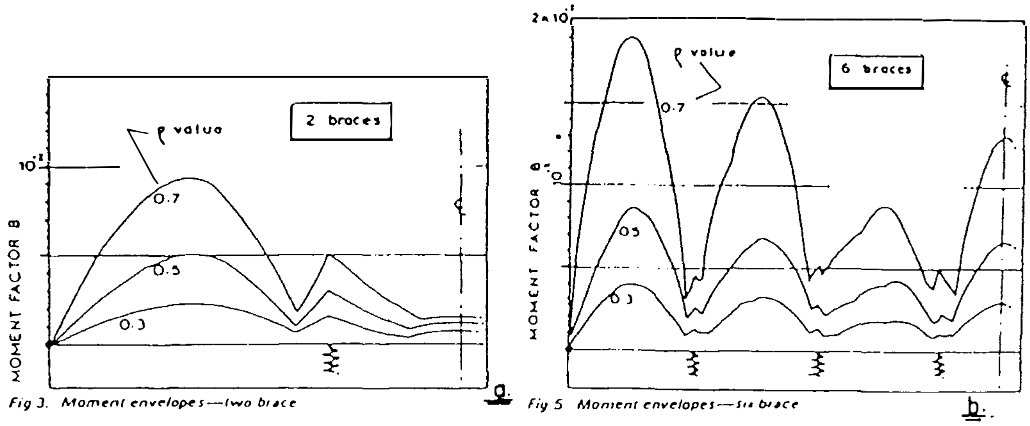


Fig. 11.2: Maximale momentenverdeling.

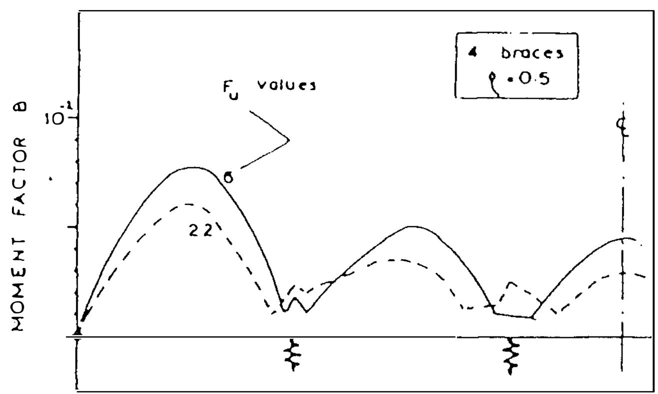


Fig. 11.3: Invloed van de veerstijfheid.

11.2.3. Invloed van het aantal kolommen op de momenten verdeling.

Als een kolom verder van de fundering is verwijderd, worden de veren minder effectief. Voor een gegeven veerstijfheid en aantal kolommen wordt het maximale ("veld") moment dus groter, indien de beschouwde kolom verder van de fundering ligt.

11.2.4. Conclusies van Medland.

De gevonden formule geeft een goede schatting van het maximale buigende moment in een bepaalde doorsnede. De formule is echter moeilijk te gebruiken, tenzij gebruik wordt gemaakt van progameerbare aparatuur. Voor ontwerpdoeleinden zijn daarom de gepubliceerde grafieken beter geschikt (zie o.a. fig. 11.2).

11.3. Commentaar.

Het artikel behandelt de afleiding van een formule voor de momentenverdeling van een op druk belaste, verend gesteunde staaf. De maximale momenten bij verschillende normaalkrachten worden grafisch weergegeven. Uit deze grafieken blijkt dat de maximale momenten sterk toenemen, als de normaalkracht de Eulerse knikkracht van de staaf benadert ($\rho \rightarrow 1$).
Het is nu de vraag wat de invloed van de momenten is op de stijfheid van de kolom, indien in de uiterste vezels van de kolom de vloeispanning van het materiaal wordt overschreden. Verandering van de plaatselijke stijfheid van de kolom heeft o.a. tot gevolg dat de momenten zich zullen gaan herverdelen. Dit effect is niet in het artikel meegenomen.
Een tweede gevolg van het plaatselijk verkleinen van de stijfheid van de kolom is dat de benodigde kritieke veerstijfheid kleiner zal worden. Dit aspect kan van belang zijn voor het onderzoek van de kritieke veerstijfheid bij gedrongen kolommen. Een derde gevolg is uiteraard dat de afleiding van de gevonden formule niet meer klopt. Er zou dus nog goed moeten worden onderzocht hoe groot de momenten zijn t.o.v. de normaalkracht en wat de invloed is op de genoemde gevolgen.

12. Publicatie Medland, Sedegin [14].

The elastic buckling of restrained plates
Instability and collapse of steel structures,
Proceedings of the Michael R. Horne Conference,
Edited by L.J. Morris., Granada, 1983, pp 294 - 302

12.1. Samenvatting.

In het artikel wordt een analytische procedure voorgesteld waarmee de elastische knikkracht van axiaal belaste platen, op onderling gelijke afstanden gesteund door translatie- en rotatieveren, kan worden bepaald. Tevens wordt een techniek voor het bepalen van de benodigde sterkte van de veren besproken.

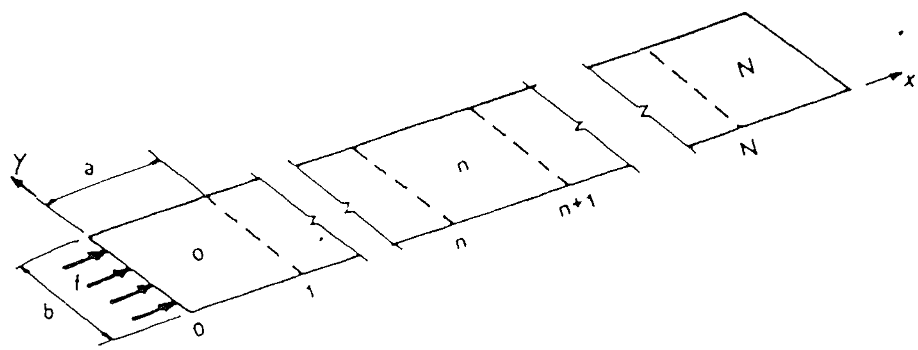


Fig. 12.1: Schematisering.

12.2. Inhoud.

12.2.1. Schematisering.

De plaat heeft een lengte (N + 1)×a en een breedte b. De veren steunen de plaat op onderlinge afstanden a, over de gehele breedte van de plaat (fig. 12.1). De translatieveren bezitten stijfheid tegen verplaatsingen loodrecht op het vlak, de rotatieveren tegen de rotatie $\delta w / \delta x$.
Bij de randen 0 en N+1 zijn geen translatie veren aanwezig. De plaat is daar vrij opgelegd. Wel zijn er rotatieveren aanwezig met een stijfheid die de helft is van de andere rotatieveren.

12.2.2. Basisformules en oplossingstechniek.

De verplaatsing w, loodrecht op de plaat, moet voldoen aan de volgende partiële differentiaalvergelijking:

$$D\nabla^4 w + f\frac{\delta^2 w}{\delta x^2} = 0 \qquad (1)$$

waarin: D = De buigstijfheid van de plaat per eenheid van lengte.
f = De drukkracht per eenheid van lengte.

De doorbuiging w van de plaat wordt verondersteld te voldoen aan: $w = W(x)\sin(\pi y/b)$. Subtitutie van deze uitdrukking in (1) leidt tot een normale D.V. van de vierde orde. Deze kan op een eenvoudige wiskundige wijze worden opgelost en een formule voor de verplaatsingen wordt verkregen. In deze formule komen nog vier constanten (vierde orde D.V.) per plaatveld voor.
Voor het oplossen van deze constanten zijn vier vergelijkingen per plaatveld nodig. Deze kunnen worden verkregen uit continuïteits- en evenwichtsvoorwaarden t.p.v. de verende ondersteuningen. Continuïteit wordt geeist van:

1.) De verplaatsingen W.

2.) De hoekverdraaiing dW/dx.

Evenwicht wordt verlangt van:

1.) Het moment.

2.) De dwarskracht.

Uiteindelijk, na een lange herleiding met subtituties, wordt een homogeen stelsel vergelijkingen met nog twee onbekende constanten gevonden. Knik treedt nu op indien de determinant van de coëfficiënten matrix gelijk is aan nul.

12.2.3. Knikkrachten en vormen.

De mogelijke knikvormen zijn sinusvormig, waarvan het aantal halve sinusgolven waarin de plaat uitknikt, verschillend kan zijn. De knikvorm die de laagste elastische knikkracht oplevert wordt meestal gezocht.
Is het aantal halve sinusgolven van de knikvorm gelijk aan het aantal velden van de plaat, dan treedt geen verplaatsing w op t.p.v. de verende ondersteuningen. De aanwezigheid van rotatieveren kan dan de kritische belasting (f^*) nog verhogen, boven die van een alleen door

translatie veren gesteunde plaat (fig. 11.2).
Uit figuur 12.2 blijkt tevens dat de invloed van rotatieveren groter wordt als de verhouding a/b kleiner is.

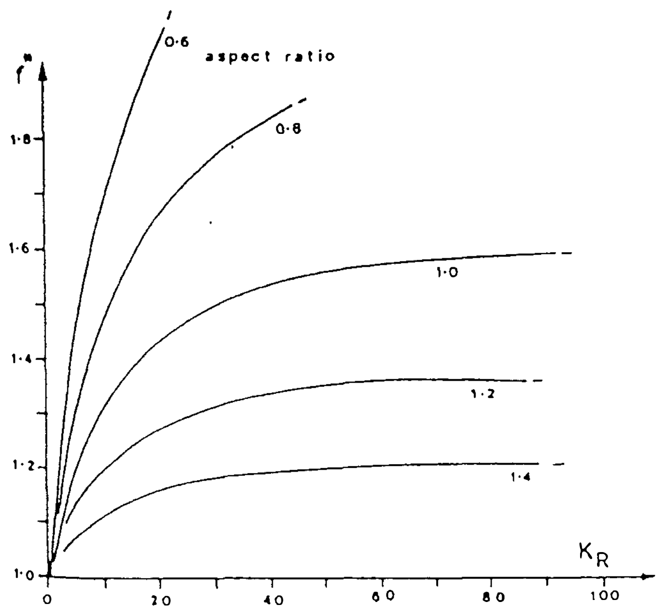


Fig. 12.2: Invloed van de rotatiestijfheid en de verhouding a/b op de elastische knikkracht.

12.2.4. Initieel uitgebogen plaat.

Voor het bepalen van de elastische knikkracht is alleen de stijfheid van de veren van belang. Bij initieel vervormde platen is ook de sterkte van de veren belangrijk.
Verondersteld wordt een initiële uitbuiging van de volgende vorm:

$$w_I(\xi,\eta) = Zsin(i(\frac{\eta + \xi}{N + 1})\pi)\sin(\pi\eta r) \qquad (2)$$

waarin: Z = De amplitude van de sinusvormige uitbuiging.
i = Het aantal halve sinusgolven over de lengte van de plaat.
ξ,η= Dimensilose coördinaat assen van de plaatvelden.

De D.V. van het evenwicht van de plaat, in uitgebogen toestand, luidt:

$$\nabla^2(w - w_I) + (m + p)^2\frac{\delta^2 w}{\delta\xi^2} = 0 \qquad (3)$$

Nu blijkt dat het effect van de drukkracht kan worden weergegeven door de initiële verplaatsing w te delen door de factor: $(1 - f / f_{cr_i})$. Hierbij stelt f_{cr_i}, de kritieke belasting voor van een vrij opgelegde plaat, met een lengte/breedte verhouding van:

$$\frac{(N+1)a}{i} : b \tag{4}$$

12.3. Commentaar.

In het artikel wordt de theorie van verend gesteunde staven uitgebreid voor verend gesteunde platen. De auteurs passen dezelfde techniek toe als bij eerder gepubliceerde artikelen over verend gesteunde kolommen ([10 - 13]). Soortgelijke opmerkingen als bij de verend gesteunde kolommen zijn ook op dit artikel van toepassing.
Nieuwe gezichtspunten levert het artikel niet op. Resultaten van het onderzoek zouden misschien m.b.v. dit artikel kunnen worden uitgebreid voor verend gesteunde platen.

13. Publicatie Mutton, Trahair [16].

Stiffness Requirements For Lateral Bracing
Journal of the structural division, 10086, October 1973, ST10,
pp 2167 - 2182

13.1. Samenvatting.

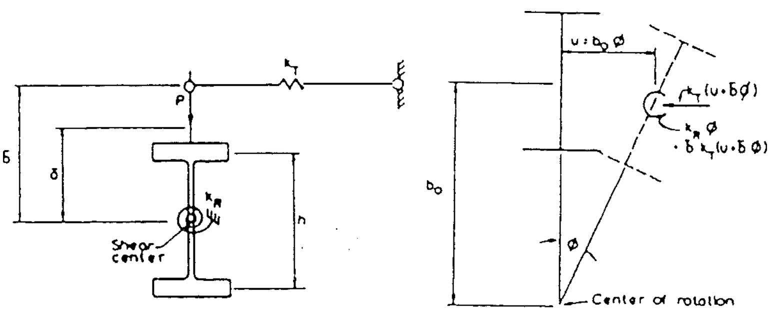
Het artikel behandelt de benodigde translatie- en rotatiestijfheid voor verende ondersteuningen. Formules voor deze stijfheden worden voor drie gevallen afgeleid:

1.) Een kolom, gesteund door een translatieveer in het midden.

2.) Een door eindmomenten belaste ligger, in het midden gesteund door een translatie- en rotatieveer.

3.) Een door een puntlast belaste ligger, in het midden gesteund door een translatie- en rotatieveer.

Het materiaalgedrag wordt hierbij lineair elastisch verondersteld.
Ook de invloed van de plaats van de ondersteuning in dwarsrichting wordt onderzocht.



(a) Cross Section At Midspan (b) Equivalent Actions

Fig. 13.1: Schematisering van de ondersteuningen.

13.2. Inhoud.

13.2.1. Inleiding.

Vaak worden staven gesteund om hun draagkracht te verhogen. Veelal met slechts enkele ondersteuningen, zodat het gedrag van de staven lineair elastisch blijft.
Kolommen en liggers kunnen op vele manieren worden gesteund. De meesten kunnen echter worden geschematiseerd als een staaf die in het zwaartepunt door een rotatieveer en op een bepaalde afstand daarvan ($\bar{b}$)door een translatieveer wordt gesteund (fig. 13.1).

13.2.2. Gesteunde kolommen.

Enig inzicht in het stabiliteits gedrag van gesteunde staven kan worden verkregen door een relatief simpel geval te beschouwen. Hiervoor wordt in het artikel een kolom genomen die door een translatieveer op halve hoogte wordt gesteund (waarbij $\bar{b} = 0$; $k_R = 0$).
Is nu de stijfheid van de verende ondersteuning nul dan is de knikvorm van de kolom gelijk aan een halve sinusgolf. Indien echter de stijfheid van de ondersteuningen zo groot is dat hij als "star" kan worden beschouwd dan is de knikvorm gelijk aan een hele sinusgolf. De kniklengte is hierbij de helft van die van de ongesteunde kolom en de Eulerse knikkracht van de "star" gesteunde kolom is dus verviervoudigd.
Door nu differentiaalvergelijkingen van het evenwicht voor de staafdelen op te stellen, en deze op te lossen m.b.v. de rand- en overgangsvoorwaarden kan ook voor tussenliggende stijfheden van de ondersteuningen de draagkracht worden bepaald.

13.2.3. Gesteunde ligger, belast met gelijke eindmomenten.

Het blijkt dat de stabiliteit van op buiging belaste staven op soortgelijke wijze als bij de verend gesteunde kolommen kan worden beschreven. Ook hier wordt de uitbuiging en de rotatie m.b.v. sinusgolven beschreven.
Na het vaststellen van de uitbuigvormen worden de differentiaalvergelijkingen van het evenwicht opgesteld. Deze worden opgelost en de relaties tussen de draagkracht van de ligger, de stijfheden en de

plaats van de ondersteuning in dwarsrichting is nu bekend.
Het blijkt nu dat een translatieveer aan de drukzijde het meest effectief is. Uit figuur 12.2 blijkt dat, indien de translatieveer op een afstand $\bar{b} = h^2/4b_0$ vanaf het zwaartepunt aan de staaf is verbonden, in de meeste gevallen geen rotatiestijfheid meer nodig is.

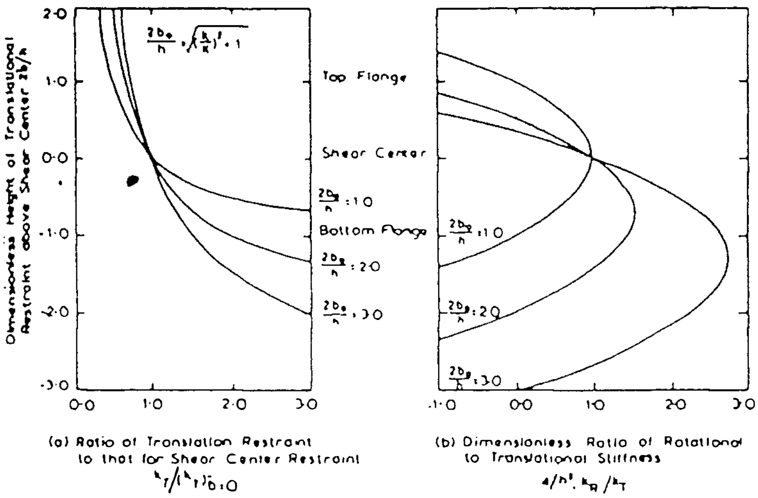


Fig. 13.2: Invloed van de afstand: ($\bar{b}$); verende ondersteuning - zwaartepunt van de ligger.

13.2.4. Gesteunde ligger, belast door een puntlast in het midden.

Ook hiervoor worden de differentiaalvergelijkingen opgesteld en de rand- en overgangsvoorwaarden geformuleerd. De uiteindelijke vergelijkingen kunnen echter analytisch niet worden opgelost.
Gebruik wordt gemaakt van een numerieke methode. M.b.v. de daaruit volgende oplossing zijn grafieken gemaakt waaruit bijvoorbeeld de relatie tussen de rotatiestijfheid en de draagkracht van de ligger blijkt, of waaruit bijvoorbeeld de minimum waarden van de translatie- en rotatiestijfheid, waarbij de ligger knikt in een hele sinusgolf ("second mode") en dus de maximale draagkracht bezit, volgt.

13.2.5. Analyse van de resultaten.

Uit de grafieken blijkt ook dat indien de rotatiestijfheid groter is dan een bepaalde waarde (fig. 13.3), de staaf altijd in de "second mode" knikt. Er is hier dus sprake van een kritieke rotatiestijfheid van

de verende ondersteuning.
Wordt alleen de invloed van de translatieveer beschouwd dan blijkt ook hier weer dat de effectiviteit van de verende ondersteuning toeneemt met de afstand ($\bar{b}$), tussen het aangrijpingspunt van de verende ondersteuning en het zwaartepunt van de ligger.

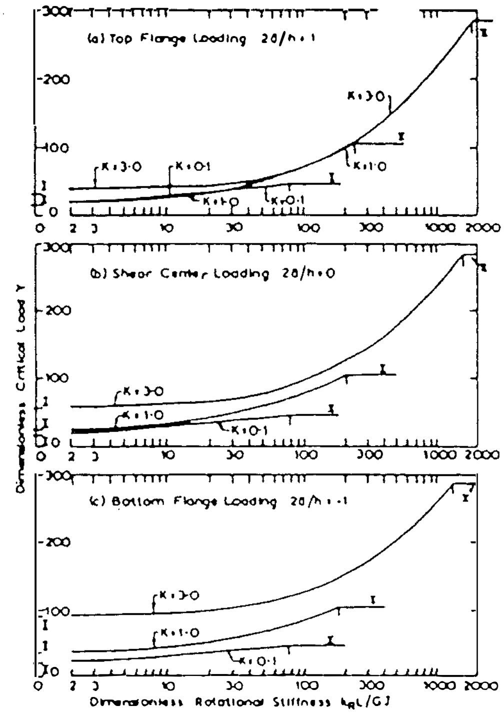


Fig. 13.3: Draagkracht van een tegen torderen verend gesteunde staaf, belast door een puntlast.

13.2.6. Conclusies.

Onderzocht is de relatie tussen de stijfheid van de verende ondersteuningen, de plaats van de verende ondersteuningen in dwarsrichting en de draagkracht van de staven. Het is gebleken dat een kolom voldoende door een translatieveer kan worden gesteund, opdat de kolom in de "second mode" uitknikt. Dit geldt ook voor liggers, maar dan moet de translatieveer wel aan de drukflens zijn verbonden. De effectiviteit van een translatie verende ondersteuning bij liggers is namelijk sterk afhankelijk van de plaats waar deze aangrijpt.
Bij liggers, belast door een puntlast, is ook een voldoende stijve rotatieveer alleen voldoende.

13.3. Commentaar.

De verend gesteunde kolom wordt verondersteld alleen zijdelings uit te knikken. In werkelijkheid kan de kolom ook nog torderen (torsieknik). Dit is helaas niet meegenomen in de berekening.
Worden de resultaten van de verend gesteunde liggers met die van een verend gesteunde kolom (bijv. [5]) vergeleken, dan blijkt ook hier dat een aan de drukzijde bevestigde translatieveer het meest effectief is.

14. Publicatie Nakamura, Takeshi [17].

Strength and deformability of H-shaped steel beams and lateral bracing requirements
Stability of steel structures-Yugoslavia, pp 177-186, Gedeelte "Bracing requirements".

14.1. Samenvatting.

Het eerste deel van het artikel handelt over de sterkte en vervormingscapaciteit van stalen liggers met een I-vormige doorsnede. Het tweede deel behandelt de vereiste sterkte en stijfheid van verende ondersteuningen voor liggers.
Van de verende ondersteuningen zijn de efficiëntie en gevolgen van verschillende types ondersteuningen, zoals een translatieveer verbonden aan de trek- of drukflens en rotatieveer onderzocht. De sterkte en stijfheid van elk type veer wordt besproken, door gebruik te maken van een eenvoudig mechanisch model en resultaten van experimenten. Tot slot worden relatief eenvoudige ontwerpformules voor de stijfheid en sterkte van de ondersteuningen voorgesteld.

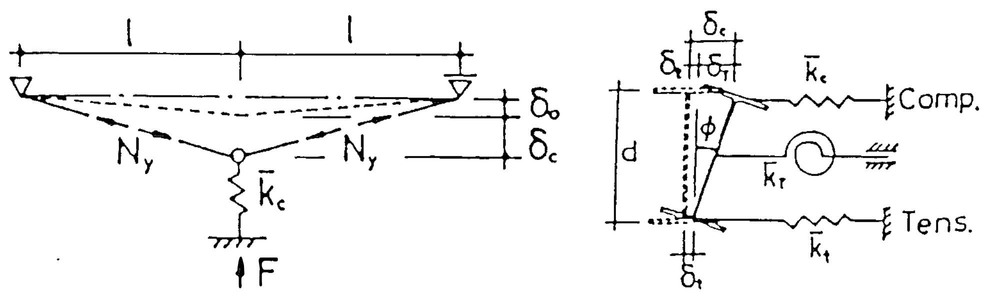


Fig. 14.1: Schematisering.

14.2. Inhoud.

Er wordt uitgegaan van een analytisch model (fig. 14.1) waarbij de staaf scharnierend wordt verondersteld t.p.v. de verende ondersteuning, met een initiële imperfectie van d_0. Door nu hiervoor evenwichtsvergelijkingen op te stellen, in belaste toestand, kan een relatie tussen de staafkracht, de initiële imperfectie en de benodigde veerkracht F worden gevonden. Onder de staafkracht wordt hier de

som van de drukspanningen in de ligger, net voor bezwijken verstaan. De veerkracht F is afhankelijk van het toegepaste veertype en van de stijfheid van de veer. Een algemene formule is opgesteld voor een ligger, welke gesteund wordt door translatieveren en een rotatieveer t.p.v. het steunpunt. Door nu de verplaatsing en rotatie van de staaf t.p.v. het te steunen punt te beschouwen kan de relatie tussen de benodigde steunkracht en de veerstijfheden worden vastgelegd.
De toegestaande initiële imperfecties volgens de normen is $l/500$. Het model geeft echter bij deze initiële imperfectie een benodigde veerkracht die ongeveer de helft is van de benodigde veerkracht welke is gevonden m.b.v. numerieke analyses van "Matsui". Daarom is de initiële imperfectie d_0 in de uiteindelijke ontwerpformules gehouden op $l/250$.
De effectiviteit van de verende ondersteuningen is nu dus afhankelijk van de sterkte en stijfheid van de veren. Door nu een bepaalde kracht (bijv.: $0{,}02.\sigma_y.A/2$) in de verende ondersteuningen te veronderstellen, kunnen ontwerpformules voor de benodigde veerstijfheden worden opgesteld.
De ontwerpformules zijn geverifieerd aan de resultaten van experimenten. Voor het geval van antisymmetrische knik van de bovenflens kwamen de resultaten van de experimenten goed overeen met de waarden die de ontwerpformules gaven.

14.3. Commentaar.

In het artikel worden o.a. experimentele resultaten vergeleken met een analytisch model. Er wordt geconcludeerd dat het analytisch model goed overeenkomt met de gevonden resultaten van de experimenten. Er worden echter maar drie resultaten vermeld, hetgeen wel erg weinig is om conclusies te trekken.
De resultaten van de experimenten komen goed overeen met die van het theoretisch model. De resultaten van de numerieke analyse van "Matsui" echter niet. De oorzaak hiervan wordt helaas niet in het artikel behandeld.

15. Nederlands Normalisatie-Instituut
Voorschriften voor het Ontwerpen van Stalen Bruggen (VOSB 1963) [18]

NEN 1008,1e druk, augustus 1963
pp 56 - 59

15.1. Inhoud.

Behandeld wordt het instabiliteitsprobleem van een verend ondersteunde randstaaf. Gegeven is hoe de benodigde stijfheid (A) van de verende ondersteuningen m.b.v. grafieken (b.v. fig. 13.1) kan worden bepaald, opdat knik uit het vlak van de hoofdligger niet optreed.
M.b.v. de grafieken kan echter ook, indien de veerstijfheid is gegeven, de virtuele slankheid (λv) worden bepaald. Uit de virtuele slankheid volgt dan de maximaal toe te laten drukkracht in de staaf.

15.2. Commentaar.

Gerefereerd wordt naar literatuur van Ir. W. J. v. d. Eb. Deze heeft een lineair elastische berekening uitgevoerd voor een verend gesteunde, op druk belaste, staaf, waarbij de uiteinden scharnierend verschuifbaar zijn verondersteld. Deze schematisering is realistischer voor een verend gesteunde bovenrand van open wandbruggen dan de schematisering waarbij de uiteinden scharnierend maar onverplaatsbaar zijn verondersteld.
Uitgegaan is van lineair elastisch materiaalgedrag. De grafieken zijn dus niet geldig in het elasto-plastische gebied.

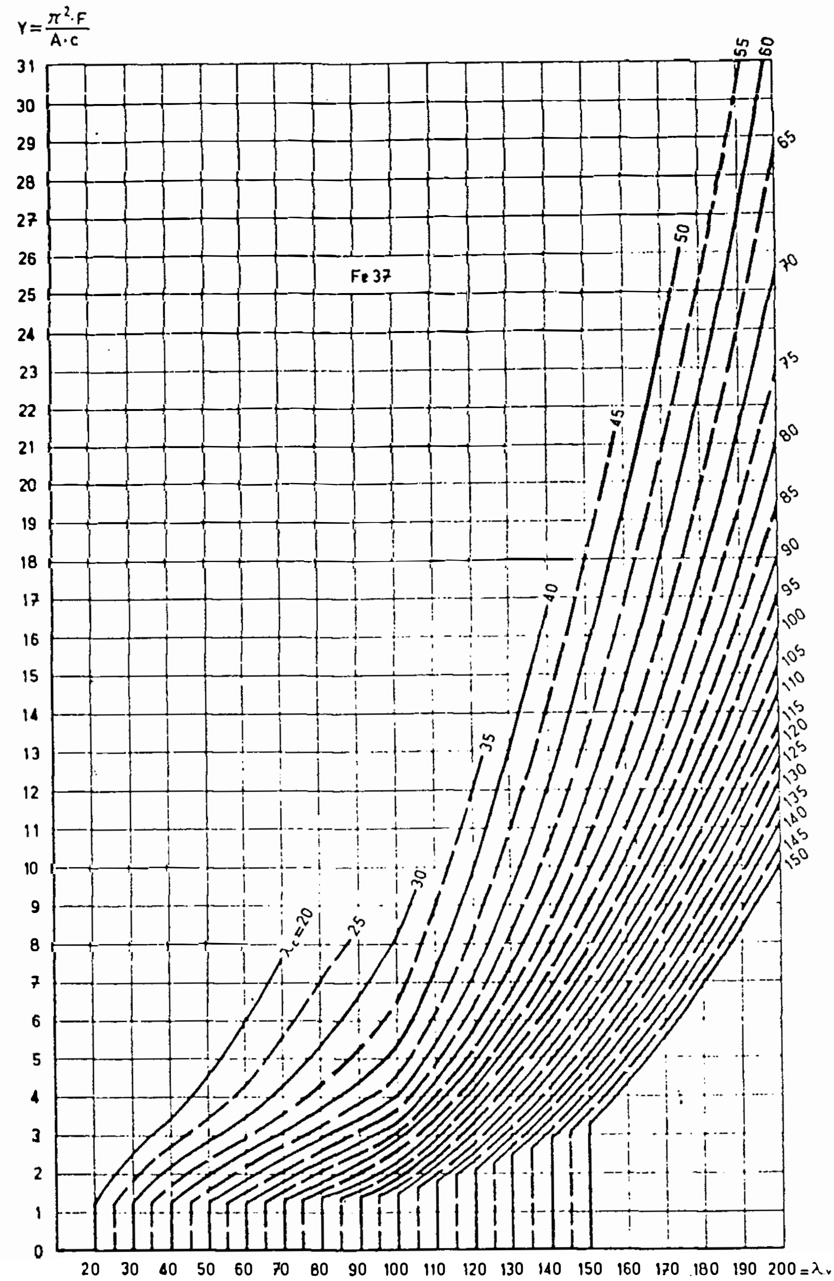


Fig. 13.1: Relatie veerstijfheid - virtuele slankheid λv - systeemslankheid λc ($l_k = a$).

16. Publicatie Oliveto [19].

Inelastic buckling of columns partially restraind against sway and rotation
Eng. struct., 1980, Vol.2, April, pp 97-102

16.1. Samenvatting.

In het artikel wordt een computerprogramma behandeld, welke de kniklast en knikvormen van een plaatselijke door elastische translatie- en rotatie veren gesteunde kolom bepaalt. Analyses in het elasto-plastische gebied zijn verricht m.b.v. de tangent modulus theorie. Tevens worden numerieke resultaten en de daaruit volgende conclusies gepresenteerd.

16.2. Inhoud.

16.2.1. Inleiding.

Veel stabiliteitsproblemen kunnen worden geschematiseerd tot een plaatselijk tegen uitbuiging en rotatie gesteunde kolom. De afstand tussen de verende ondersteuningen behoeft hierbij niet gelijk te zijn en ook de doorsnede kan per staafdeel verschillen.
Er zijn twee methoden voor het vinden van de elastische kniklast van de kolom. De eerste, meest elementaire, is m.b.v. differentiaal vergelijkingen. Het grote voordeel van deze methode is dat dimensilose grafieken kunnen worden bepaald, welke van groot belang voor een ontwerper kunnen zijn. Nadeel is echter dat deze methode alleen geschikt is voor simpele constructies met een zekere regelmaat.
Bij de tweede methode wordt de stijfheidsmatrix van de kolom opgesteld. Door nu de belasting iteratief op te voeren totdat de matrix singulier wordt, kan de kniklast worden bepaald. Deze methode wordt het meest gebruikt, maar is duur en vaak zijn de resultaten niet correct. Er zijn drie mogelijke oorzaken voor deze fouten:

1.) De knikvormen waarbij een deel van de knooppunten niet verplaatsen worden niet gevonden. Eén van deze knikvormen kan echter de maatgevende zijn.

2.) Veel kniklasten kunnen dicht bij elkaar liggen. Om er zeker van te zijn dat men er niet één mist, moet de stapgrootte van de belasting klein zijn.

3.) Wanneer wordt gezocht naar singulariteit van de stijfheidsmatrix let men op tekenwisseling van de determinant. Deze verandert niet alleen bij nul maar ook bij oneindig van teken. Dit geeft moeilijkheden bij het programmeren.

Het programma is ook geschikt voor het elasto plastische gebied. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de tangent-modulus theorie. De stijfheid van de kolom wordt kleiner als de normaalspanning in de kolom de proportionaliteitsgrens is gepasseerd (fig. 16.1).

16.2.2. Stijfheidsmatrix van de kolom.

De stijfheidsmatrix van een staafdeel wordt opgesteld door de relatie tussen de krachten die uitwendig op een staafdeel werken en de verplaatsingen en rotaties t.p.v. de staafuiteinden te bepalen. M.b.v. evenwichtsvergelijkingen wordt de "overall" stijfheidsmatrix voor de constructie opgesteld.
Vanuit de ingenieurshoek bekeken, treedt knik op als de staaf geen buigstijfheid meer bezit. Wiskundig betekent dit dat de determinant van de stijfheidsmatrix gelijk aan nul moet zijn.
Reductie van de stijfheidsmatrix t.g.v. de axiale belasting heeft twee oorzaken. De eerste is het gevolg van veranderingen in de geometrie van de constructie en is meegenomen in de stijfheidsfuncties. De tweede is het gevolg van verandering in materiaal eigenschappen. De relatie tussen spanning en vervormingen is na een bepaalde normaalspanning (proportionaliteitsgrens), niet meer lineair-elastisch. Deze niet lineaire relatie wordt nu in rekening gebracht door de E-modulus te vervangen door de E_t-modulus.
De bepaling van de kniklast gebaseerd op het verdwijnen van de stijfheidsmatrix kan nu op dezelfde manier plaatsvinden als in het elastische gebied.

16.2.3. Numerieke basisprocedure.

Hier wordt een algoritme van het programma behandeld, waarbij geen nieuwe feiten of factoren worden geconstateerd.

16.2.4. Gebruikte numerieke waarden.

Voordat het programma kan worden toegepast, zijn nog een aantal numerieke waarden nodig, die het materiaal en de constructie karakteriseren. Ook voor de tangent-modulus is nog een uitdrukking nodig. De relatie tussen spanning en vervorming (fig. 16.1), ontlasten niet meegerekend, luidt in formulevorm als volgt:

$$\frac{\sigma - \sigma_p}{\sigma_y - \sigma_p} = tanh\frac{E\varepsilon - \sigma_p}{\sigma_y - \sigma_p} \qquad (1)$$

Grafisch:

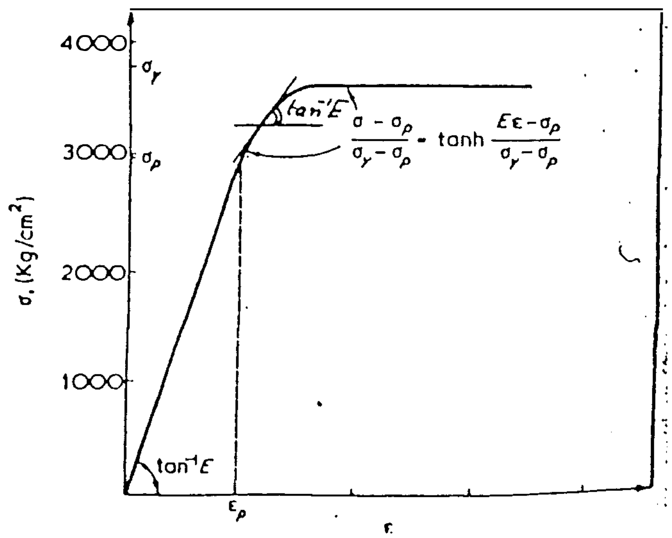


Fig. 16.1: σ–ε diagram.

De E_t-modulus ($d\sigma/d\varepsilon$) wordt nu gegeven door de formule:

$$E_t = E[1 - (\frac{\sigma - \sigma_p}{\sigma_y - \sigma_p})^2] \qquad (2)$$

Twee voorbeelden worden gegeven. Een kolom waarbij de normaalkracht stapsgewijs toeneemt en een kolom waarbij de normaalkracht constant is over de gehele kolom.

16.2.5. Conclusies van Oliveto.

Het computer programma is geverifieerd m.b.v. experimenten. De resultaten waren in goede overeenstemming.
Bij de numerieke voorbeelden valt het op dat de sterkte van een kolom met constante normaalkracht (a) kleiner is dan de sterkte van een kolom met toenemende normaalkracht (b) (fig. 16.2).
Tevens valt het op dat de kolom met constante normaalkracht zich over een groter gebied van de slankheid lineair elastisch gedraagt, dan de kolom met toenemende normaalkracht.

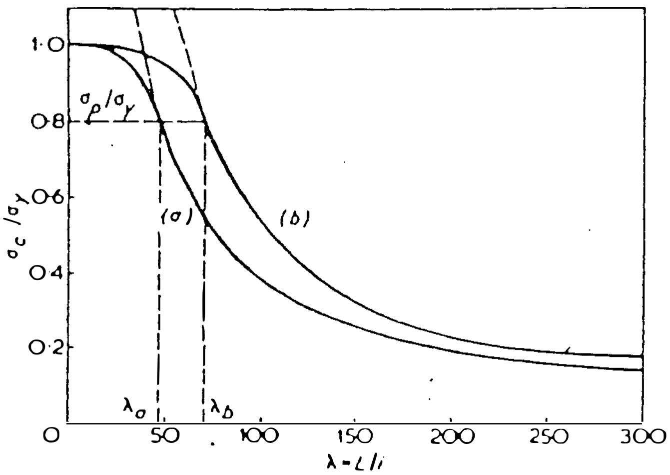


Fig. 16.2: Relatie: slankheid - draagkracht kolom.

16.3. Commentaar.

In het artikel zijn uitgangspunten en beperkingen van het computer programma duidelijk aangegeven. Interessant is de uitbreiding van het programma naar het elasto-plastisch gebied. De E_t-modulus is echter niet de enige factor die van invloed is op de draagkracht van de kolom. Ook initiële imperfecties spelen een belangrijke rol, maar deze zijn niet in het computer programma verwerkt.
Voordeel van het programma is dat het geschikt is voor zowel translatie- als rotatie verende ondersteuningen. Zo kan de invloed van een translatie- of rotatie verende ondersteuning worden beschouwd, of een combinatie hiervan.
De opmerking in het artikel dat de resultaten van de "matrix methode" vaak niet correct zijn is aanvechtbaar. Door een eenvoudige handberekening of door ervaring is de grootte van de kniklast bij

benadering meestal wel bekend. Tevens worden de computers steeds sneller, zodat tegenwoordig een voldoende verfijnde stapgrootte van de belasting kan worden toegepast.

17. Rapport Snijder, Bijlaard [23]

De dimensionering van knikverkorters in hoogspanningsmasten.
TNO IBBC, Rapport BI-85-92 63.4.3680, Deel: A,B,C

17.1. Samenvatting.

In het rapport wordt een controleprocedure voor knikverkorters in hoogspanningsmasten behandeld. De achtergronden van de controleprocedure, zoals de stijfheidsinteractie kolom - knikverkorters en het bepalen van de axiale stijfheid van de knikverkorter worden toegelicht.
De controleprocedure wordt geverifieerd m.b.v. rekenvoorbeelden. De resultaten van berekeningen volgens de controleprocedure worden vergeleken met de resultaten van fysisch en geometrische niet lineaire DIANA berekeningen. De DIANA berekeningen bevestigen de juistheid van de controleprocedure.

17.2. Inhoud.

17.2.1. Inleiding.

Knikverkorters zijn staven die in principe bij het aanbrengen van de primaire belasting, onbelast blijven. De functie van de knikverkorters is het opdringen van een gewenste knikvorm (en dus draagkracht) aan de primair wel belaste randstaven.
Door deze functie van de knikverkorters ontstaan secundaire krachten in de knikverkorters. In dit rapport wordt nu een rekenregel beschreven, waaraan het werkelijk gedrag van de hoogspanningsmasten wordt getoetst. De hier gebruikte rekenregel is afgeleid van de in [25] opgenomen rekenregel voor verend gesteunde kolommen.

17.2.2. Stijfheidsinteractie.

Bij deze rekenregel is er van uitgegaan dat de stijfheid van de verende ondersteuning onafhankelijk is van de te steunen staaf. Bij

broekstukconfiguraties van hoogspanningsmasten is dit anders. De stijfheid van de knikverkorters is hierbij ook afhankelijk van de te steunen staaf.
De stijfheid waarbij het ondersteunende vakwerk nog net stijf genoeg is om de doorgaande randstaaf de gewenste knikvorm op te dringen (de kritieke veerstijfheid), kan worden bepaald met een Eulerse knikberekening. Hierbij wordt een gegeven ondersteuningsconstructie flexibeler gemaakt door de oppervlakte van de doorsnede van de staven in de ondersteuningsconstructie met een factor f te reduceren. De factor waarbij het ondersteunende vakwerk de doorgaande randstaaf nog net de gewenste knikvorm opdringt, wordt de kritieke oppervlaktefactor (f_{kr}) genoemd.

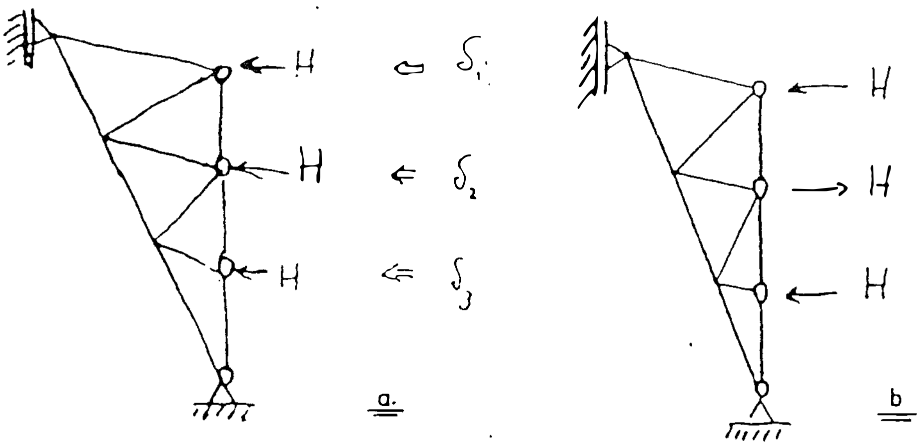


Fig. 17.1: Schematisering tot vakwerk en belasting ter beoordeling van de stijfheid (a) en de sterkte (b) van de constructie.

Een indruk van de stijfheid van de constructie kan ook worden verkregen door een horizontale belasting op de constructie, waarbij in de verticale randstaaf scharnieren t.p.v. de knikverkorters zijn opgenomen, aan te brengen. Door de stijfheid k nu te definieren als H/δ (fig. 17.1) en te eisen dat deze stijfheid voor elke puntlast minimaal gelijk moet zijn aan de kritieke veerstijfheid, kan ook voor deze methode een kritieke oppervlaktefactor worden bepaald.
De volgende drie manieren waarop de horizontale belasting kan worden aangebracht, worden in het rapport beschouwd:

1.) Horizontale gelijk gerichte puntlasten van gelijke grootte.

2.) Horizontale alternerend gerichte puntlasten van verschillende grootte.

3.) Horizontale alternerend gerichte puntlasten van gelijke grootte.

De bij de horizontaal aangebrachte belasting gevonden oppervlaktefactoren worden vergeleken met de oppervlaktefactor van de Eulerse knikberekening. Nu blijkt dat bij horizontaal alternerend aangebrachte puntlasten niet altijd een veilige oppervlaktefactor wordt gevonden. Bij horizontaal gelijk gerichte puntlasten wordt daarentegen wel een veilige oppervlaktefactor gevonden. Deze laatste methode wordt daarom gekozen om de ondersteuningsconstructie op stijfheid te beoordelen.

17.2.3. Axiale stijfheid van een hoekprofiel.

De axiale stijfheid van een centrisch belaste, perfect rechte staaf bedraagt: $k = EA/l$. De stijfheid van een op druk belaste knikverkorter is echter kleiner. Dit heeft de volgende oorzaken:

1.) Imperfecties, samengevat in een geometrische imperfectie e^{*}.

2.) Een fysische excentriciteit e, die de afstand is van het zwaartepunt van de doorsnede tot het aangrijpingspunt van de belasting (veroorzaakt door de toepassing van een hoekprofiel als knikverkorter).

3.) Het tweede-orde effect (geometrische niet lineairiteit).

De invloed van deze effecten kan worden verwerkt in een formule voor de verkorting van een op druk belaste knikverkorter. De formule luidt nu als volgt:

$$\delta_l = \frac{Pl}{EA} + \frac{\dfrac{\pi^2 EI}{l^2 P}}{\dfrac{\pi^2 EI}{l^2 P} - 1}\left[\frac{Pe^2 l}{EI} + \frac{2Pe^{*}el}{3EI}\right] \qquad (1)$$

Voor de buigstijfheid EI in formule (1) moet de buigstijfheid om de sterke as van het hoekprofiel worden genomen, omdat aanvankelijk buiging om de sterke as voor het stijfheidsgedrag maatgevend is.
In een ander rapport [B-76-231] wordt een relatie voor de axiale stijfheid aanbevolen. Deze relatie luidt:

$$\Delta = 0{,}0083\sigma 10^{-3} \qquad (2)$$

Waarbij: $\sigma \leq \sigma_{T.G.B.}$
Formule (2) blijkt goed met formule (1) en een proefresultaat overeen te komen. Voor de stijfheidsrelatie wordt daarom formule (2) gebruikt.
De axiale stijfheid van een op druk belast hoekprofiel luidt na

herschrijven van formule (2) nu als volgt:

$$k = \frac{EA_{eff}}{l} \qquad (3)$$

waarin: $A_{eff} = 0{,}57 A_{aanw}$

17.2.4. De 5% reductie regel.

De huidige methode voor het bepalen van de kritieke veerstijfheid levert, naarmate de slankheid van een staaf kleiner wordt steeds grotere waarden op voor de kritieke veerstijfheid. Door nu de draagkracht van de staaf met 5% te reduceren, kan met een lagere stijfheid worden volstaan. Draagkracht van de staaf wordt dus ingeleverd voor een lagere stijfheidseis. Dit wordt des te aantrekkelijker naarmate de slankheid van een staaf kleiner wordt.

17.2.5. Stijfheidscontrole.

De axiale stijfheid van de knikverkorters, moet groter zijn dan de kritieke veerstijfheid. Deze stijfheid kan dus worden bepaald door het aanbrengen van horizontaal, gelijkgerichte puntlasten en de stijfheid te definieren als: H/δ (zie ook par. 17.2.2.).
De stijfheid moet worden opgebracht door het ondersteunende vakwerk en de randstaaf. Een deel van de draagkracht van de randstaaf wordt dus gebruikt om de constructie de benodigde stijfheid te geven. De extra kracht die daardoor onstaat in de randstaaf kan worden bepaald door de horizontale belasting in figuur 17.1 te vervangen door de kracht in de knikverkorters. De grootste normaalkracht in de randstaaf moet van de eerder berekende draagkracht worden afgetrokken.

17.2.6. Sterkte controle.

De knikverkorters worden in principe niet betrokken bij het overbrengen van de primaire belasting in de hoogspanningsmasten, maar t.g.v. het steunen van primair belaste staven ontstaan in de knikverkorters wel secundaire krachten.

Voor het bepalen van deze secundaire krachten worden twee modellen gebruikt (fig. 17.2). Voor model 1 wordt in [25] de volgende formule gegeven voor de krachten in de veren:

$$voor \quad k \le 2k_{kr} : \quad F_v = \frac{kl_k}{1000}\,\frac{1}{n-1} \qquad (4)$$

met:

1.) $k \le k_{kr}$; zodat de kracht in de veer niet groter wordt dan die behorend bij de kritieke veerstijfheid.

2.) $l_k \ge 4a\xi$; een correctieterm, voor het geval dat k ter grootte van k_{kr} is.

3.) Als ondergrens de 1% regel.

De uitgangspunten bij het bepalen van formule (4) waren:

1.) De veren zijn spanningsloos aangebracht.

2.) De verend ondersteunde staaf knikt in een sinusvorm waarbij de halve sinusgolf een lengte heeft gelijk aan de kniklengte l_k.

3.) Ter plaatse van de toppen van de sinusgolven bevindt zich een veer met veerstijfheid k.

4.) De staaf heeft een initiële imperfectie die affien is met de knikvorm.

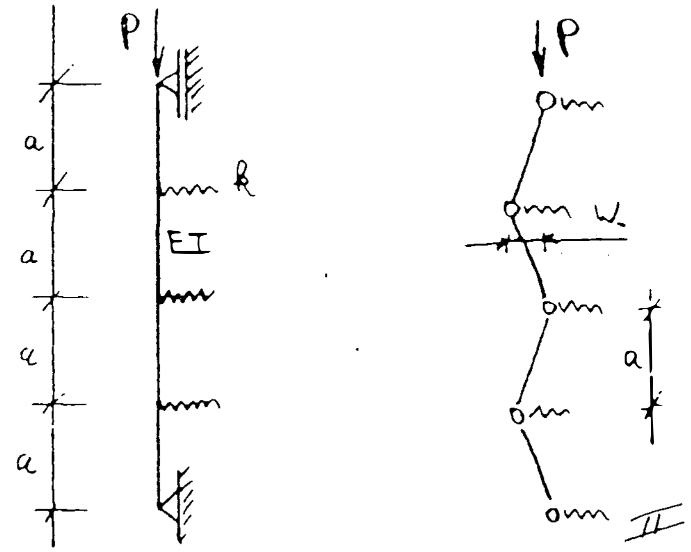


Fig. 17.2: Schematiseringen voor het bepalen van de krachten in de knikverkorters.

Voor waarden van $k \ge 2k_{kr}$ geldt voor alle gangbare slankheden dat de krachten in de veren minder dan 1% bedragen van de kracht in de

verend gesteunde staaf. Daarom wordt in [25] voor waarden van $k \geq 2k_{kr}$ gekozen voor de 1% regel.
Nadert de veerstijfheid de kritieke veerstijfheid dan wordt niet meer voldaan aan de genoemde uitgangspunten. De krachten in de knikverkorters kunnen nu beter worden bepaald m.b.v. model 2. De volgende formule kan daarvoor worden afgeleid:

$$F_v = 0{,}004 \frac{n}{n-1} F \qquad (5)$$

Doordat voor effectieve knikverkorters geldt dat $k \approx k_{kr}$ wordt in het rapport aanbevolen om formule (5) te gebruiken. De stijfheid van de knikverkorters moeten hierbij m.b.v. de schematisering van figuur 17.1b worden bepaald, omdat deze schematisering het beste aansluit bij model 2.

17.2.7. Vergelijking controleprocedure - DIANA sommen.

Het voorgaande wordt samengevat tot een controleprocedure. De volgende opmerkingen worden hierbij gemaakt:

1.) Alle knikverkorters moeten op drukkrachten worden gecontroleerd, omdat als de horizontale alternerend gerichte belasting (fig. 17.1) van teken verwisselt de normaalkrachten in de knikverkorters ook van teken verwisselen. De knikverkorters kunnen dus zowel op druk als trek worden belast.

2.) Door normaalkrachtvervormingen van de randstaaf zullen de knikverkorters toch enigszins primair worden belast. Echter ook zij zullen daardoor vervormen en de randstaaf zal dus het grootste gedeelte van de primaire belasting naar de fundering overbrengen. Of de resterende primaire belasting in de knikverkorters nog van belang is, moet uit DIANA sommen blijken.

De controleprocedure en de DIANA sommen worden toegepast op drie knikverkorterconfiguraties. De randstaaf wordt daarbij in twee verschillende slankheden uitgevoerd.
Blijkt het dat een broekstukconfiguratie volgens de controleprocedure niet voldoet of is overgedimensioneerd dan wordt de constructie aangepast, zodat deze precies aan de sterkte- en stijfheidseisen van de controleprocedure voldoet. De aangepaste constructie wordt met DIANA doorgerekend.
Voor de DIANA berekeningen wordt het drie-dimensionale broekstukconfiguratie geschematiseerd tot een twee-dimensionale constructie

(fig. 17.3). De randstaaf wordt daarbij opgebouwd uit twee delen die elk de halve oppervlakte van de doorsnede van de randstaaf bezitten.
Voor de doorgaande staaf (1), wordt een element gebruikt waarbij met geometrische en fysische niet-lineariteit rekening wordt gehouden. De aanpendelende randstaaf wordt gemodelleerd met een element waarbij geometrische niet-lineariteit en fysisch lineair materiaal gedrag in rekening wordt gebracht.

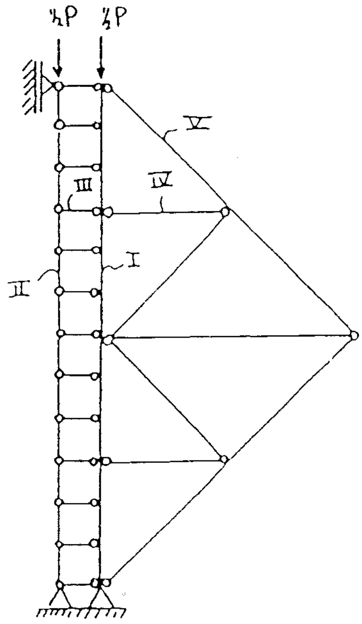


Fig. 17.3: Schematisering van de constructie t.b.v. DIANA berekeningen.

De knikverkorters (4) worden gemodelleerd m.b.v. een element waarbij wordt gerekend met geometrische lineariteit en fysisch niet-lineair materiaal gedrag. De randstaven tot slot worden gemodelleerd m.b.v. een element waarvan het gedrag geometrisch en fysisch lineair is.
Bij een geometrisch en fysisch niet lineaire berekening dienen imperfecties in rekening te worden gebracht. De volgende imperfectievormen zijn aangebracht:

1.) Parabolische imperfectie door de systeempunten. De imperfectie is hierbij affien aan de gewenste knikvorm. De amplitude van de imperfectie kan worden bepaald door ijking aan de knikcurve of worden ontleend aan [25].

2.) Een imperfectie gebaseerd op het "harmonica" model (fig. 17.2b). De systeempunten blijven hierbij niet op hun plaats. Hier wordt d.m.v. ijking de imperfectie, t.p.v. de knikverkorters, gevonden.

3.) Als derde imperfectievorm worden de twee voorgaande gecombineerd.

4.) De vierde imperfectievorm is ook een combinatie van (1) en (2), maar nu is de parabolische imperfectie gereduceerd met een pure geometrische imperfectie van $a/1000$.

Voor deze vier imperfectievormen zijn DIANA berekeningen gemaakt voor één model. Daaruit blijkt dat de krachten in de knikverkorters bij de imperfectievormen 2,3 en 4 goed overeenkomen met de in proeven gevonden waarden. De parabolische imperfectievorm geeft echter waarden die ongunstiger zijn. Daarom wordt voor deze imperfectievorm gekozen.

17.2.8. Evaluatie / Conclusies van Snijder en Bijlaard.

Bij vergelijking van de DIANA sommen met de controleprocedure blijkt dat de draagkracht, bepaald volgens de controleprocedure voldoende is. De krachten in de knikverkorters zijn van dezelfde orde grootte als waarop ze volgens de controleprocedure zijn gedimensioneerd. De controleprocedure leidt dus tot een veilige dimensionering van knikverkorters in hoogspanningsmasten.
In de controleprocedure wordt gesteld dat de draagkracht van de kolom moet worden verlaagd met de grootste normaalkracht t.g.v. het meewerken van de randstaaf aan zijn eigen ondersteuningsconstructie. Als dit echter niet wordt gedaan dan blijkt dat de draagkracht volgens de controleprocedure goed overeenkomt met die van de DIANA sommen. Deze stap kan dus in de controleprocedure achterwege worden gelaten.

17.3. Commentaar.

In het rapport wordt een vervangende axiale stijfheid voor op druk belaste staven bepaald. Deze vervangende stijfheid is echter bepaald voor op druk belaste staven en is niet geldig voor op trek belaste staven, omdat bij op trek belaste staven de tweede orde effecten bijvoorbeeld geen rol spelen.
In de ondersteuningsconstructie komen echter zowel op druk als op trek belaste staven voor. Het reduceren van alle staven met eenzelfde factor levert dus niet de juiste stijfheid van de knikverkorters t.p.v. de systeempunten op. Doordat de axiale stijfheid van de op trek belaste staven groter is dan de stijfheid van op druk belaste staven, zal de

ondersteuningsconstructie in werkelijkheid stijver zijn dan met de controleprocedure is berekend. De controleprocedure is wat de stijfheid van de knikverkorters betreft dus wel aan de veilige kant.
Het probleem van de relatief hoge kritieke veerstijfheid bij gedrongen staven wordt in het rapport opgelost met de 5% reductie regel. Dit is een handige rekentruc, maar verandert niets aan het probleem op zich.

18. Publicatie Swannel [26].

The elastic buckling of columns constrained by an initial curved side rail.
Civil Engineering Transactions, Institution of Engineerings Australia, No. CE15, 1973, pp 90-93.

18.1. Samenvatting.

In dit artikel wordt eerst beschreven hoe de axiale stijfheid van een elastisch uitgebogen staaf kan worden bepaald. Daarna wordt deze axiale stijfheid gebruikt in de beschrijving van het gedrag van een kolom welke in het midden door een elastisch uitgebogen staaf wordt gesteund (fig. 18.1). Hierbij is gebruik gemaakt van een matrix techniek die voor generalisatie geschikt is.

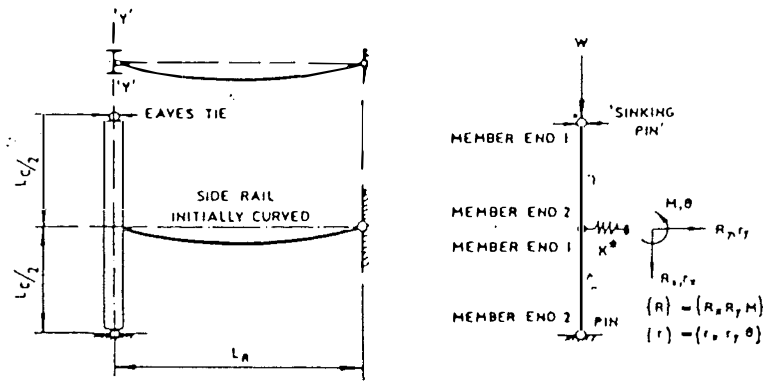


Fig. 18.1: Schematisering van de constructie.

18.2. Inhoud.

18.2.1. De axiale stijfheid.

De tangentiële axiale stijfheid van een pin-ended kolom K^{*}, is gedefinieerd als de kracht die nodig is om de afstand tussen de scharnierende uiteinden een eenheidsverplaatsing te verkorten.
Deze verkorting wordt veroorzaakt door een verkorting t.g.v. spanningen (Wet van Hooke) en door een verkorting t.g.v. buiging.

De tangentiële stijfheid kan dus worden bepaald door de staafkracht te delen door de totale axiale verkorting. Dit resulteert in een stijfheid, welke na herschrijven afhangt van de slankheid van de staaf, de initiële uitbuiging en het belastingsnivo.

18.2.2. De elastische kniklast van een verend gesteunde kolom.

Voorgaande theorie wordt toegepast op een perfecte rechte kolom, gesteund in het midden door een initiëel gebogen staaf. Het probleem wordt opgelost m.b.v. een matrix techniek, die ook veel bij andere stabiliteitsproblemen wordt gebruikt.
Een stijfheidsmatrix wordt opgesteld, welke de relatie geeft tussen de krachten die t.p.v. de verende ondersteuningen werken en de daaruit volgende verplaatsingen t.p.v. de verende ondersteuningen. Op deze manier wordt het effect van de tangentiële stijfheid meegenomen in het stabiliteits probleem.

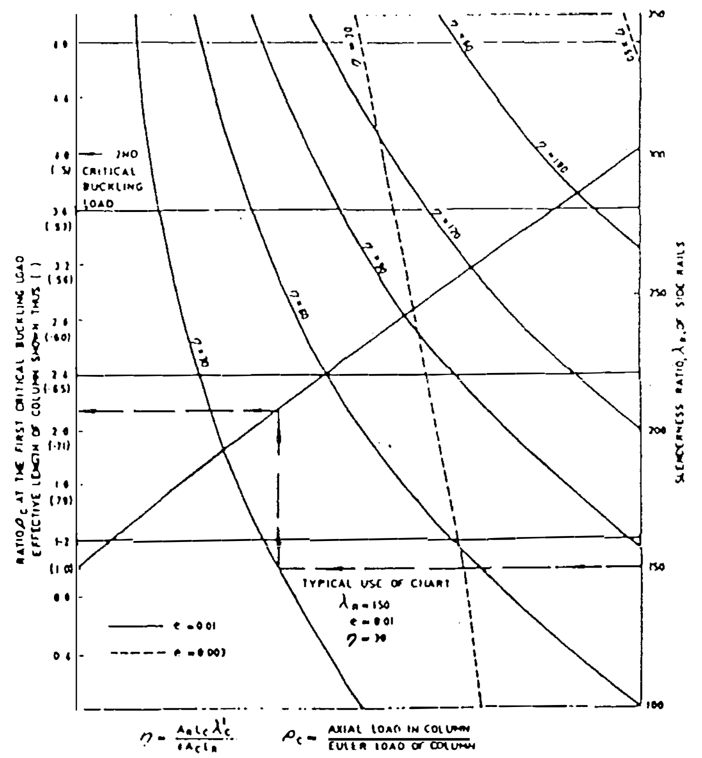


Fig. 18.2

De algemene conditie voor instabiliteit is dat de determinant van de overall-stijfheidsmatrix gelijk aan 0 moet zijn. De resultaten die hieruit voortvloeien zijn gelijk aan die van Timoshenko [27]. De verdienste van de hier gebruikte matrix techniek is dat hij volkomen algemeen is,

voor alle verend gesteunde staven en geschikt is voor computertoepassingen.
De verschillende knikvormen worden besproken en het blijkt ook hier dat de knikvormen en dus de toelaatbare knikkracht, afhankelijk is van de stijfheid van de verende ondersteuning. Voor deze stijfheid moet hier dus de tangentiële axiale stijfheid van de knikverkorter worden genomen.
Grafieken kunnen nu worden getekend, waarbij de relatie tussen de verschillende parameters (slankheid van de kolom en de knikverkorter, initiële uitbuiging knikverkorter en de toelaatbare knikkracht) wordt gegeven (fig. 18.2).

18.2.3. Conclusies van Swannel.

1.) De presentatie in grafiekvorm heeft de verdienste dat de resultaten van de afleiding nu met een minimum aan rekenwerk kunnen worden vastgesteld.
Tevens beschrijven de grafieken het stabiliteitsgedrag van de constructie kompleet.

2.) Soortgelijke grafieken kunnen zonder noemenswaardige problemen ook worden opgesteld voor meer complexe situaties, zoals meerdere knikverkorters, effecten van torsieknik en elasto plastisch gedrag.

18.3. Commentaar.

De grafieken zijn behoorlijk ingewikkeld om te gebruiken. De invloed van veel parameters is in één grafiek gestopt. Beter is naar mijn mening de tangentiële stijfheid van de knikverkorter gescheiden te houden van de relatie tussen de toelaatbare knikkrachten en de benodigde veerstijfheid van de kolom.
Bij de afleiding van de tangentiële stijfheid van de knikverkorters is een op druk belaste staaf beschouwd. De stijfheid van een op trek belaste staaf is waarschijnlijk groter dan die van een op druk belaste staaf. Aangezien de kolom zal uitknikken in de zwakste richting van de veer, is de stijfheid van een op trek belaste knikverkorter dus niet van belang. Principieel gezien had ook de tangentiële stijfheid van een op trek belaste knikverkorter moeten worden bepaald.

19. Publicatie Timoshenko [27].

Theory of elastic stability.
First Edition.
McGraw-Hill book company, Inc, Ney-York and Londen, 1936,
pp 100-108

19.1. Inhoud.

Timoshenko behandelt de Eulerse knikberekening en de oplossing van een rechte, centrisch belaste, verend gesteunde staaf. De benodigde stijfheid van de ondersteuningen wordt berekend door evenwicht- en vormveranderingsvergelijkingen op te stellen en gebruik te maken te maken van de juiste rand- en overgangsvoorwaarden. Dit wordt uitgewerkt voor een staaf met één veer in het midden. Voor een op meerdere plaatsen gesteunde staaf is de afleiding in principe gelijk.
Voor het bepalen van de kritieke veerstijfheid wordt ook de arbeidsmethode behandeld. Deze methode geeft op eenvoudige wijze, snel de juiste waarden voor de kritieke veerstijfheid.

19.2. Commentaar.

Timoshenko geeft een juiste oplossing van het probleem. Hij geeft de Eulerse knikkracht van een verend gesteunde kolom in relatie tot de stijfheid van de verende ondersteuningen.
In zijn afleiding beperkt hij zich echter tot centrisch belaste, volkomen rechte staven. Uitbreiding voor praktijksituaties (volkomen rechte staven komen in de praktijk niet voor, residuele spanningen, etc.) is zeker nodig.

20. Publicatie Winter [28].

Lateral bracing of columns and beams.
Transactions American Society of Civil Engineers,
paper no. 3044, V.125, 1960, pp 807-819; 823-830; 838-845

20.1. Samenvatting.

In het artikel wordt m.b.v. experimenten aangetoond dat met relatief zwakke ondersteuningen de draagkracht van een kolom sterk kan worden vergroot.
Een simpele berekeningsmethode wordt ontwikkeld, waarmee op snelle en eenvoudige wijze de sterkte en de kritieke stijfheid van de verende ondersteuning(en) kunnen worden bepaald. Deze methode berust op een door enkele aannamen sterk vereenvoudigde Eulerse knikberekening. Ook wordt de invloed van initiële imperfecties in de methode verwerkt. Door de eenvoud van de methode is hij vooral geschikt voor ontwerpberekeningen.

20.2. Inhoud.

20.2.1. Inleiding.

In het artikel beperkt Winter zich tot het geval waarbij verende ondersteuningen de functie hebben de draagkracht van de kolom te verhogen. Torderen van de staaf wordt hierbij buiten beschouwing gelaten.
Tevens beperkt hij zich in zijn artikel tot het bepalen van de kritieke veerstijfheid en het bepalen van de daarbij behorende sterkte van de verende ondersteuningen, dus het geval waarbij de gevolgen van een verende ondersteuning equivalent zijn aan de gevolgen van een starre ondersteuning. Als reden wordt hiervoor gegeven dat de kosten van een niet volledig gesteunde kolom ($k_{akt.} < k_{kr}$) niet veel lager zijn dan de kosten van een volledig gesteunde kolom. Het is daarom oneconomisch om een niet volledig gesteunde kolom te ontwerpen.

20.2.2. Experimenteel onderzoek.

Het belang van het onderzoek blijkt o.a. uit geselecteerde resultaten van testen. Deze testen kwantificeren de volgende belangrijke punten:

1.) Met behulp van relatief zwakke ondersteuningen, was het mogelijk de draagkracht van een kolom met een factor 15 te vergroten.
2.) Als bezwijken van de kolom werd ingeleid door het bezwijken van de verende ondersteuning, dan was de kracht in de ondersteuning ongeveer 1% van de in de kolom aanwezige normaalkracht.
3.) De efficïentie van de ondersteuning hangt niet alleen af van de sterkte, maar ook van de stijfheid van de ondersteuning.
4.) De kracht in een stijve ondersteuning is kleiner dan die in een slappe ondersteuning.

Omdat relatief gezien zwakke ondersteuningen zulke grote effecten hebben wekt dit de indruk dat de vereiste sterkte en stijfheid van ondersteuningen niet met grote nauwkeurigheid behoeven te worden bepaald. Daarom is het voldoende en praktisch om een eenvoudige berekeningsmethode te ontwerpen, welke een bovengrens geeft voor de benodigde sterkte en stijfheid van verende ondersteuningen.

20.2.3. Plaatselijke gesteunde kolommen.

Winter stelt vast dat de op dat moment bekende theorie voor ideale kolommen (volkomen recht, centrische belasting etc.), een relatie geeft tussen de stijfheid van de ondersteuningen en de kolombelasting. Deze theorie geeft, als knik optreedt, geen informatie over de benodigde sterkte, omdat bij zulke ideale condities de grootte van de oplegreacties niet is vast te stellen.
In het artikel vergelijkt Winter een star opgelegde kolom met een verend gesteunde kolom (fig 20.1), beide op onderling gelijke afstanden ondersteund. De star opgelegde kolom zal een sinusvormige knikvorm hebben, waarbij het aantal halve golven gelijk is aan het aantal velden. Buigpunten van deze knikvorm bevinden zich ter plaatse van de ondersteuningen. Men kan dus ter plaatse van de ondersteuningen stellen dat: $y'' = -M/EI = 0$ en er dus een fictief scharnier plaatsen.
Een verend gesteunde kolom met $k_{akt} \geq k_{kr}$ knikt op exact dezelfde wijze, als de star opgelegde kolom. Op de plaatsen van verende

ondersteuningen kan dus weer een fictief scharnier worden gedacht.

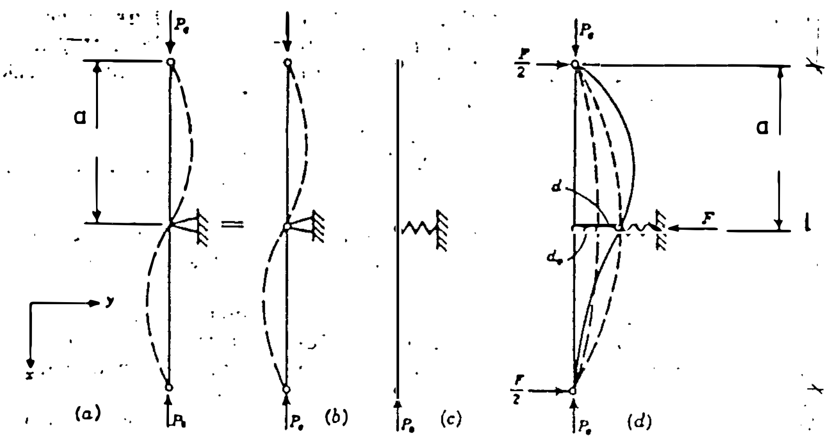


Fig. 20.1: Schematiseringen.

Tot nu toe is een ideaal rechte, centrisch belaste kolom beschouwd. Deze komen in de praktijk echter niet voor. Ten tweede zou dit betekenen dat de ondersteuningen slechts een oneindig kleine sterkte behoeven te hebben, omdat bij zuivere knik de verplaatsingen (en dus de krachten in de veren $= k.d$) pas optreden als de kolom is bezweken. Dit is echter in tegenspraak met de experimenten. Daarom past Winter het model ook toe op imperfecte kolommen. De fout die hierbij wordt gemaakt is verwaarloosbaar klein.
Door nu de kolom te belasten met de Eulerse knikkracht ($l_k = a$), de kracht in de verende ondersteuning te stellen op $k.d$ en evenwichtsvergelijken op te stellen, kan de kritieke veerstijfheid worden berekend. De formule voor de kritieke veerstijfheid luidt:

$$k_{kr} = \frac{m.F_E}{\xi.l} \cdot \left[\frac{d_0}{d} + 1\right] \tag{2}$$

De benodigde sterkte wordt nu verkregen door de kritieke veerstijfheid met de toegestaande extra uitbuiging te vermenigvuldigen. Dus:

$$F_{req} = k_{kr} d = \frac{m.F_E}{\xi.l} \cdot [d_0 + d] \tag{2}$$

Het blijkt dus dat hoe groter de initiële imperfecties, hoe groter de kritieke veerstijfheid en benodigde sterkte. De grootste waarde verkrijgt men, als de initiële uitbuigvorm affien is aan de knikvorm, waarbij de kolom bezwijkt.

20.2.4. Slotopmerkingen Winter.

1.) De methode kan ook worden toegepast op verend gesteunde kolommen, waarbij de onderlinge afstand van de verende ondersteuningen niet gelijk is.
2.) De methode is niet exact.
3.) Ook voor niet continue kolommen is de methode toepasbaar. Indien er bijvoorbeeld een scharnier t.p.v. de oplegging is, dan is de methode zelfs nog beter.
4.) De vereiste sterkte en stijfheid zijn dus afhankelijk van de initiële uitbuiging (d_0) en de bijkomende uitbuiging (d). Als maximaal initiële uitbuiging kan men de in de norm voorgeschreven waarden nemen. Een realistische waarde voor de bijkomende uitbuiging is bijvoorbeeld $2.d_0$.
5.) De methode is niet geschikt voor gebruik in het elasto plastisch gebied, omdat het dan nodig is om de kolom adequaat te steunen op plaatsen waar plastische scharnieren ontstaan.

20.2.5. Discussie.

In de discussie breidt G.G. Green de theorie uit. Hij beschouwt de knikvorm, waarbij het aantal halve sinus golven 1 minder is dan het aantal velden. Ook voor dit gebied zijn eenvoudige formules voor de relatie tussen de stijfheid en sterkte van de verende ondersteuningen en de draagkracht van de kolom op te stellen.

20.3. Commentaar.

In zijn model voor plaatselijk gesteunde imperfecte kolommen wordt een fout gemaakt, die Winter "verwaarloosbaar klein" noemt. Voor het ontwerpen is dit een prima uitgangspunt, maar voor controle berekeningen is het van belang om te weten hoe groot deze fout maximaal (procenten, promilen ?) kan zijn. Hiervoor moet bekend zijn waardoor de fout wordt veroorzaakt.
Het blijkt dat de imperfecties van grote invloed zijn op de sterkte en stijfheid van de ondersteuningen. De methode die in het huidige rapport concept rekenregels [25] wordt toegepast, houdt hier, wat de

bepaling van de kritieke veerstijfheid betreft geen rekening mee. Het is dus van belang om dit nader te onderzoeken.
Doordat er verschillende aannamen moeten worden gedaan, voordat de kritieke veerstijfheid kan worden berekend, wordt de uiteindelijke waarde voor de kritieke veerstijfheid wel erg veilig. Als de methode voor controle berekening zou worden gebruikt dan zou bijvoorbeeld een probalistische benadering op zijn plaats zijn.
Winters methode is slechts geldig in het elastische gebied. Een uitbreiding naar het elasto plastische gebied ($\bar{\lambda} \leq 1$) zou gewenst zijn.
Tot slot nog de vraag of het voordeel van een eenvoudige maar veilige methode opweegt tegen het economisch voordeel van een exacte berekening. Vooral nu tegenwoordig, ook in het ontwerp stadium het gebruik van de computer toeneemt.

21. Publicatie Zuk [29].

Lateral bracing forces on beams and columns
Journal of the structural division, 1032, July 1956, EM3

21.1. Samenvatting.

Slanke staven worden vaak gesteund om hun draagkracht te verhogen. Er is echter weinig bekend omtrent de sterkte van de ondersteuningen die daarvoor nodig is.
In het artikel wordt een poging gedaan om voor acht kenmerkende gevallen de benodigde sterkte voor de ondersteuningen te kwantificeren. De oplossingen worden exact bepaald met de directe oplossing van de basisvergelijkingen, of benaderd m.b.v. energie methoden.
De kenmerkende gevallen zijn:

1.) Centrisch belaste kolom, starre ondersteuning op halve hoogte.
2.) Centrisch belaste kolom, continue star ondersteund.
3.) Centrisch belaste kolom, verende ondersteuning op halve hoogte.
4.) I-profiel met gelijke eindmomenten en een starre ondersteuning in het midden, in dwarsrichting een afstand h boven het zwaartepunt.
5.) I-profiel met gelijke eindmomenten en een continue starre ondersteuning, in dwarsrichting op een afstand h boven het zwaartepunt.
6.) I-profiel met gelijke eindmomenten en een verende ondersteuning in het midden, in dwarsrichting een afstand h boven het zwaartepunt.
7.) I-profiel met gelijke eindmomenten en een continue verende ondersteuning, in dwarsrichting op een afstand h boven het zwaartepunt.

In alle beschouwde gevallen zijn de staven initieel uitgebogen verondersteld, omdat ten eertste perfect rechte staven in de praktijk niet voorkomen en ten tweede omdat bij initieel rechte staven de ondersteuningen theoretisch geen sterkte nodig hebben.
Het materiaal gedrag is lineair elastisch verondersteld.

21.2. Inhoud.

De gevallen 1,3 en 4 zijn samengevat.

21.2.1. Geval 1; Centrisch belaste kolom, starre ondersteuning op halve hoogte (fig. 21.1 geval 1)

Voor dit probleem worden differentiaalvergelijkingen opgesteld d.m.v. evenwichtsvergelijkingen. M.b.v. rand- en overgangsvoorwaarden worden deze opgelost en de kracht in de starre ondersteuning is nu bekend. Na subtitutie van $P = (4\pi^2 EIa)/(3L^3)$, resulteert dit in de volgende formule:

$$F_{max} = \frac{64\pi^2 EIa}{3L^3} \qquad (1)$$

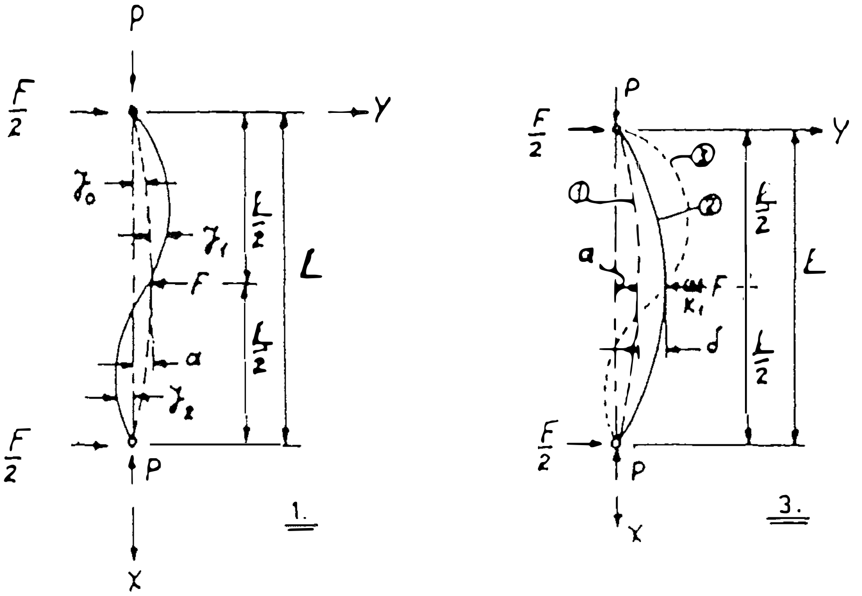


Fig. 21.1: Geval 1 en 3

21.2.2. Geval 3; Centrisch belaste kolom, verende ondersteuning op halve hoogte (fig 21.1 geval 3)

Dit geval is opgelost door Winter, Green en Cruykendall (zie ook [28]). Er wordt volstaan met het vermelden van hun resultaten. De totale uitbuiging wordt verkregen door de initiële uitbuiging (a) te vermenigvuldigen met de factor: $\mu/(\mu - 1)$, waarin $\mu = P/P_{cr}$.
De benodigde sterkte voor de verende ondersteuning is nu de totale

uitbuiging maal de veerstijfheid van de ondersteuning, in formule vorm:

$$F = k_1 a \frac{\mu}{(1 - \mu)} \tag{2}$$

Er zijn echter enige beperkingen:

1.) De formule is niet geldig indien $P.P_E$ ($l_k = a$) benadert, omdat dan de uitbuiging en de benodigde kracht in de verende ondersteuning oneindig groot worden.
2.) De veerstijfheid moet kleiner zijn dan de kritieke, omdat de kolom bij $k \geq k_{kr}$ de knikvorm (3) i.p.v. (2) aanneemt (Fig. 21.1 ; geval 3).

Indien $k \geq k_{kr}$ (en dus $P.P_{cr}$ benadert) beschouwt Zuk de verende ondersteuning als "star" en gebruikt dan de resultaten van geval 1 om de benodigde sterkte voor de verende ondersteuning te kunnen bepalen. Voor de uitbuiging a substitueert hij $a + F/k$. De formule voor de benodigde sterkte luidt dan:

$$F_{max} = a \frac{\psi}{(1 - \frac{\psi}{h_1})} \tag{3}$$

Waarin:

$$\psi = \frac{64\pi^2 EI}{3L^3} \tag{4}$$

De fout die gemaakt wordt door a (onafhankenlijk van de spanning) te vervangen door a_1 (afhankelijk van de spanning) is volgens Zuk klein en altijd aan de veilige kant.

21.2.3. Geval 4; Centrisch belaste kolom, continue verend gesteund.

Ook hier wordt niet diep op de achtergronden ingegaan en wordt er volstaan met het vermelden van enkele uit de literatuur (o.a. [28]) bekende formules.

De benodigde kracht voor de verende ondersteuning per m^1 (f_1) volgt nu uit:

$$f_1 = k_1 a_n \frac{\mu}{(1 - \mu)} \tag{5}$$

Hierin is a_n de amplitude van de initiële uitbuiging waarvan de vorm affien is met de knikvorm. P_{cr} en a_n zijn dus afhankelijk van de knikvorm, welke op zijn beurt afhankelijk is van de stijfheid van de continue verende ondersteuning (fig. 21.2)

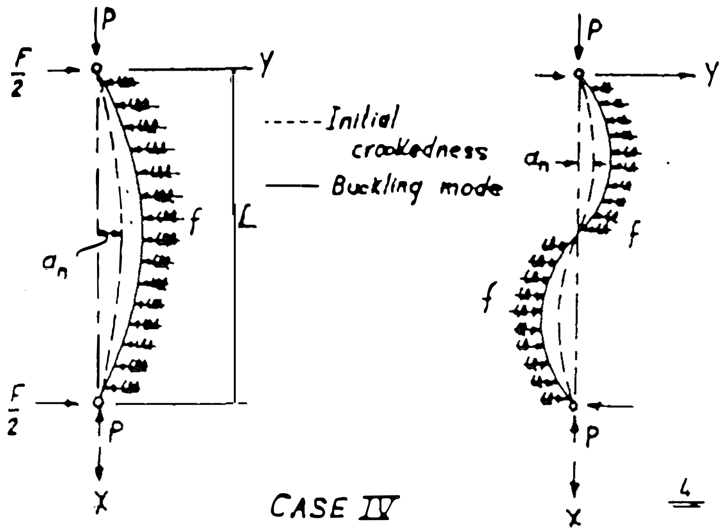


Fig. 21.2: Geval 4

21.2.4. Numerieke "voorbeelden".

Alhoewel de formules voor de sterkte van de ondersteuningen relatief simpel zijn komen ze, op de initiële uitbuiging a na, totaal niet overeen. Een uniforme formule voor alle gevallen is dan ook moeilijk te bepalen.
Na echter het invullen van numerieke identieke gegevens voor de staven, blijkt dat de benodigde kracht in de ondersteuningen niet groter zijn dan 2% van de sommatie van de in de ligger aanwezige drukspanningen in een bepaalde doorsnede. De z.g.n. 2% regel is dus wel geldig voor alle gevallen.
De enige eis die hierbij moet worden gesteld is dat bij I-profielen de ondersteuning aan de drukflens moet worden bevestigd. Een op een bepaalde afstand aan de trekflens bevestigde ondersteuning kan zelfs totaal ineffectief zijn.
Ook voor een op meerdere plaatsen gesteunde gesteunde kolom is de 2% regel geldig.
De gevonden formules geven alleen de kracht in de ondersteuningen tussen de uiteinden. De krachten in de ondersteuningen aan de uiteinden van de staven kunnen door eenvoudige evenwichtsvergelijkingen worden gevonden.

21.2.5. Conclusies.

In de praktijk worden de ondersteuningen vaak berekend m.b.v. de 2% regel. Zuk kent geen enkele constructie, die volgens de 2% regel is ontworpen, en toch is ingestort. De resultaten van Zuk's eigen onderzoek lijken de juistheid van de 2% regel te bevestigen. Hij pleit dan ook voor opname van de 2% regel in normen en richtlijnen, uiteraard nadat er een groot aantal nummerieke berekeningen zijn gemaakt en vele testen zijn uitgevoerd, ter verificatie van deze 2% regel.

21.3. Commentaar.

Zuk heeft een aantal synonieme gevallen overzichtelijk naast elkaar gezet. Frappant is dat de formules voor de benodigde sterkte van de ondersteuningen zo verschillend zijn, maar dat allen aan de z.g.n. 2% regel voldoen. Indien de 2% regel ook in het elasto plastisch gebied geldig zou zijn (desnoods met enige beperkingen, zoals b.v. een minimum vereiste stijfheid), dan zou dit voor normen en richtlijnen een geschikte rekenregel zijn.
Zuk gaat er vanuit dat bij $k \geq k_{kr}$ de verende ondersteuningen als star kunnen worden beschouwd. Hetzelfde doet Winter in zijn artikel [28] (4 jaar later), maar beschouwt de kolom scharnierend t.p.v. de verende/starre ondersteuning en komt tot een soortgelijke maar iets andere vergelijking voor de benodigde sterkte van de verende ondersteuning dan Zuk. Het is interessant om beide formules eens onderling of met DIANA berekeningen te vergelijken.

Bijlage 4

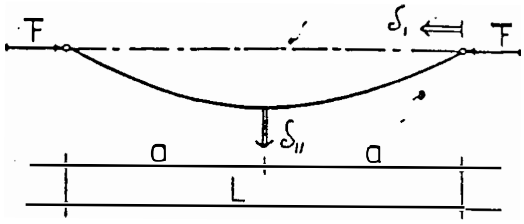
Resultaten DIANA-berekeningen.

Resultaten DIANA-berekeningen.

De belangrijkste resultaten van de fysisch- en geometrisch niet-lineaire DIANA berekeningen zijn samengevat in tabellen. De vervorming van de kolommen tijdens toenemende belasting wordt ook grafisch weergegeven in de aan de tabellen toegevoegde figuren.

Tabel 1.1.1. :

-Geg: -Pin-ended kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- $w(x) = 80.078 \sin \frac{\pi x}{2a}$

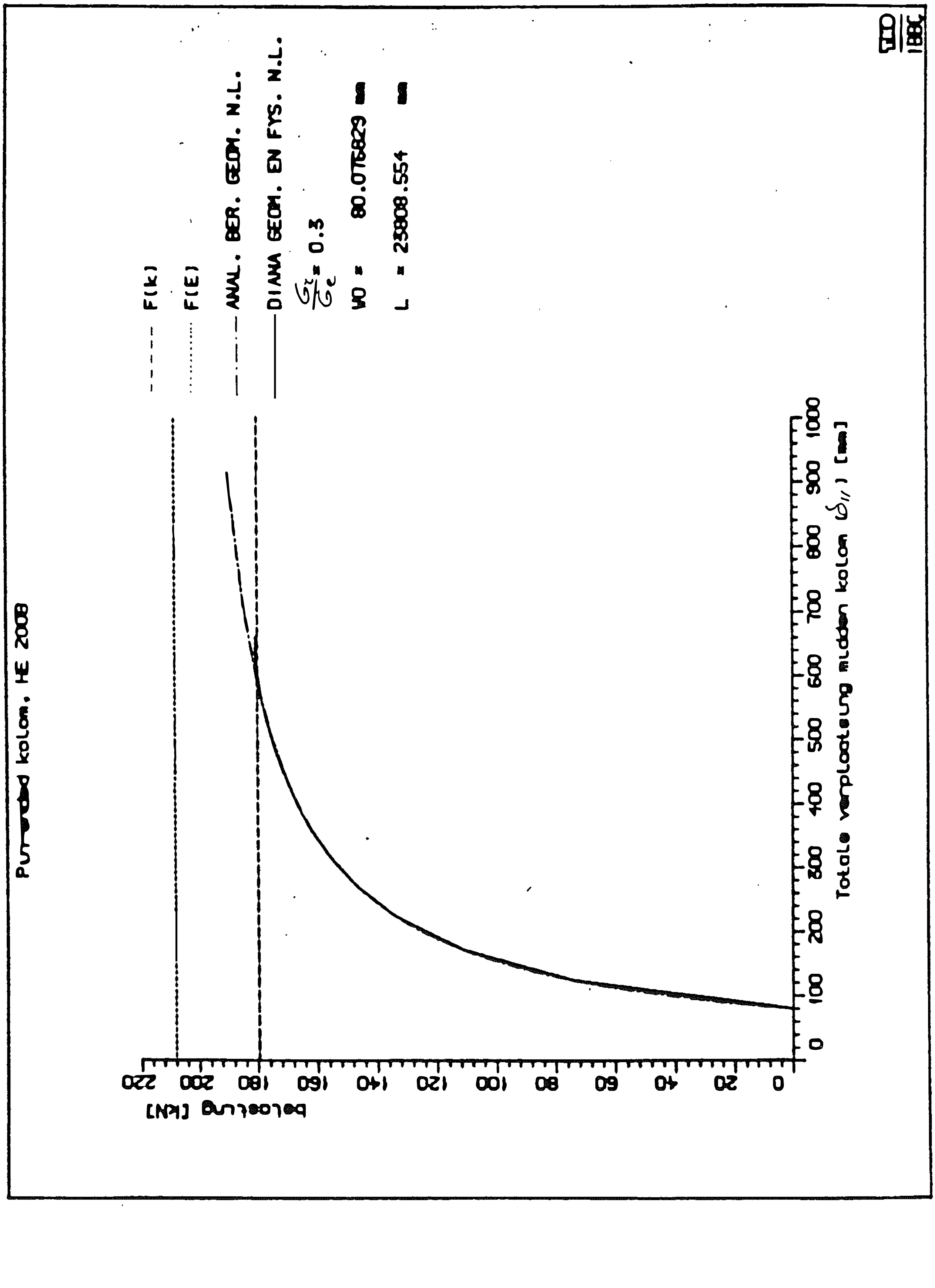


DIANA		
F [kN]	δ_I [mm]	δ_{II} [mm]
0.00	0.00	0.00
73.98	1.00	43.89
111.20	2.00	91.59
134.10	3.25	144.50
146.60	4.50	189.80
155.80	6.00	237.00
161.90	7.50	278.60
166.40	9.00	316.20
169.70	10.50	350.70
172.40	12.00	382.70
173.90	13.00	402.90
175.30	14.00	422.30
176.40	15.00	441.00
177.40	16.00	459.10
177.80	16.50	467.90
178.30	17.00	476.60
178.60	17.50	485.10
179.00	18.00	493.60
179.30	18.50	501.90
179.50	19.00	510.10
179.80	19.50	518.20
180.00	20.00	526.10
180.20	20.50	534.00
180.30	21.00	541.80

Vervolg tabel 1.1.1.:

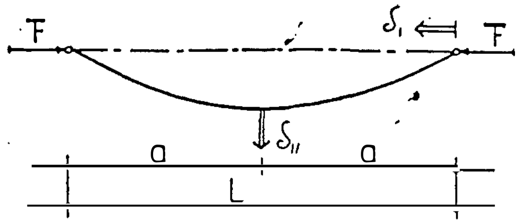
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_{11} [mm]
180.40	21.50	549.50
180.50	22.00	557.10
180.60	22.50	564.60
180.60	23.00	572.00
180.60	23.50	579.40

F_{DMAX} = 180.60 kN bij δ_1 = 23.00 mm.



kolom, HE 200B
F(k)
F(E)
ANAL. BER. GEOM. N.L.
DIANA GEOM. EN FYS. N.L.
$\frac{\sigma_r}{\sigma_e}$ = 0.3
VO = 80.076829 mm
L = 25808.554 mm
belasting [kN]
0 20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220
0 100 200 300 400 500 600 700 800 900 1000
Totale verplaatsing midden kolom $\delta_{//}$ [mm]
TNO IBBC

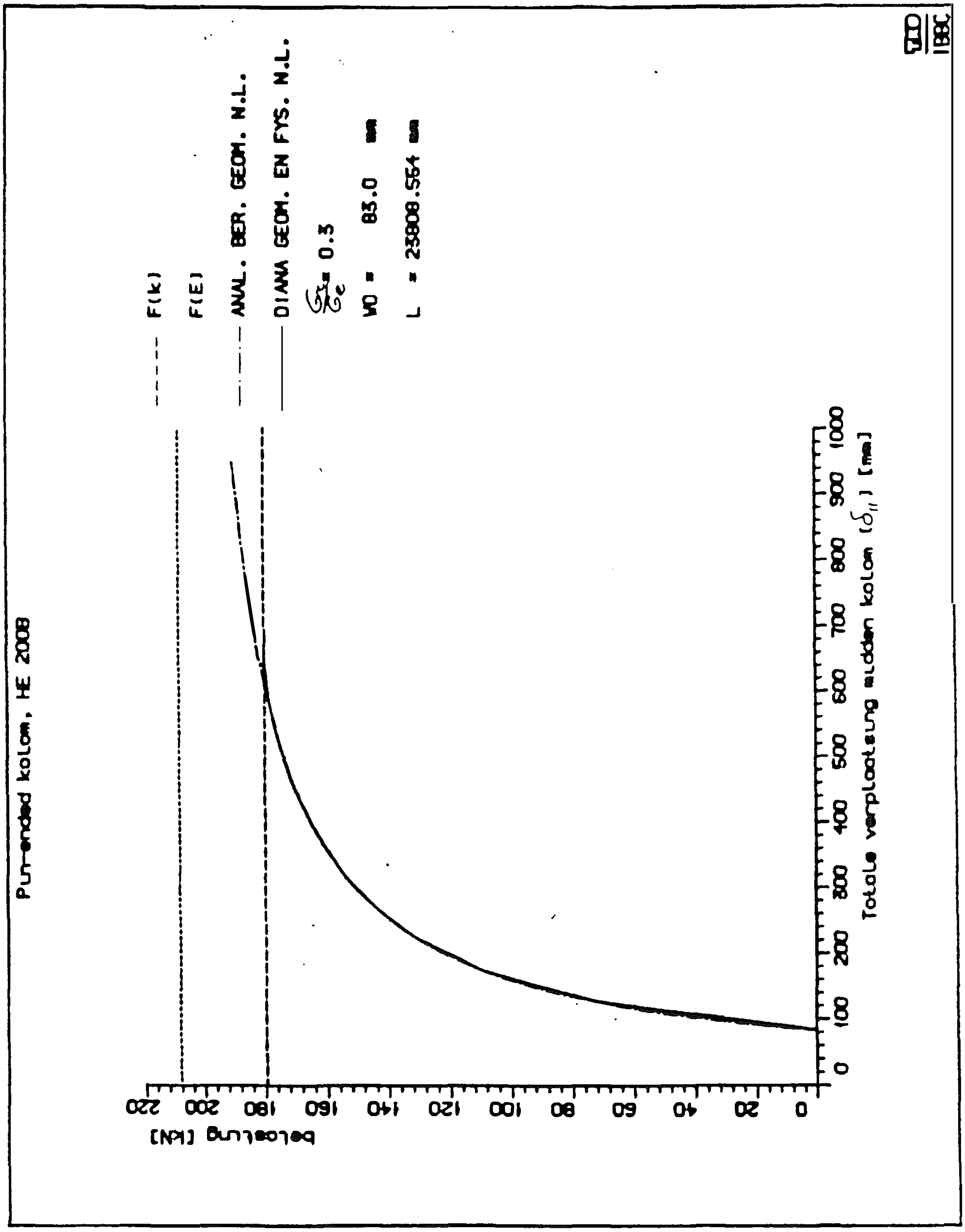
Tabel 1.1.2. :



-Geg: -Pin-ended kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- $w(x) = 83.0 \sin \frac{\pi x}{2a}$

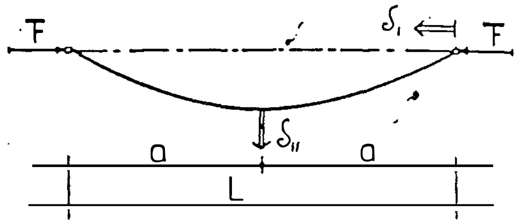
DIANA		
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_{11} [mm]
0.00	0.00	0.00
72.21	1.00	43.86
109.0	2.00	90.95
132.0	3.25	143.3
144.7	4.50	188.3
154.1	6.00	235.2
160.4	7.50	276.7
164.9	9.00	314.1
168.4	10.50	348.5
171.2	12.00	380.5
173.4	13.50	410.4
175.3	15.00	438.7
176.8	16.50	465.5
178.0	18.00	491.2
178.6	19.00	507.7
179.1	20.00	523.7
179.5	21.00	539.4
179.7	22.00	554.6
179.8	23.00	569.6
179.9	24.00	584.2
179.8	25.00	598.5

F_{DMAX} = 179.90 kN bij δ_1 = 24.00 mm.


Pin-ended kolom, HE 200B
F(k)
F(E)
ANAL. BER. GEOM. N.L.
DIANA GEOM. EN FYS. N.L.
σ_r/σ_e = 0.3
WO = 83.0 mm
L = 23808.554 mm
belasting [kN]
Totale verplaatsing midden kolom (δ_{II}) [mm]
TNO IBBC

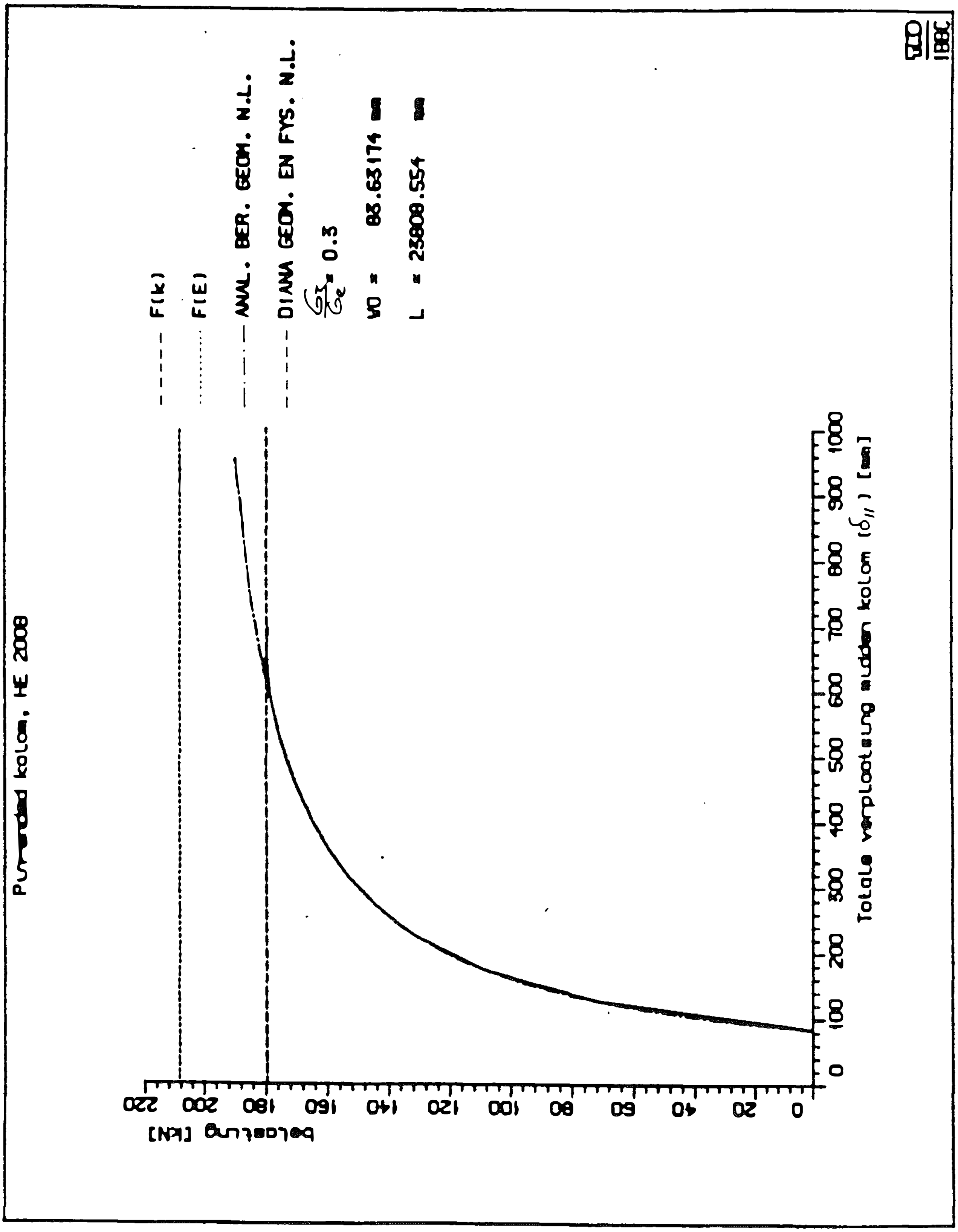
Tabel 1.1.3. :

-Geg: -Pin-ended kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- $w(x) = 83.632 \sin\frac{\pi x}{2a}$



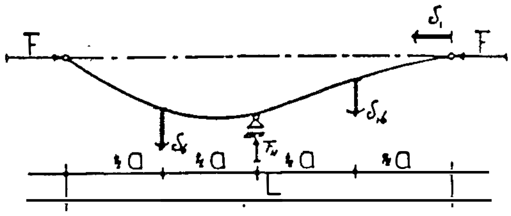
DIANA		
F [kN]	δ_I [mm]	δ_{II} [mm]
0.00	0.00	0.00
71.78	1.00	43.84
108.5	2.00	90.81
131.6	3.25	143.0
144.3	4.50	187.9
153.7	6.00	234.8
160.0	7.50	276.3
164.6	9.00	313.7
168.1	10.50	348.1
170.9	12.00	380.0
173.2	13.50	409.9
175.1	15.00	438.2
176.6	16.50	465.0
177.8	18.00	490.7
178.7	19.50	515.2
179.3	21.00	538.8
179.5	22.00	554.1
179.7	23.00	569.0
179.7	24.00	583.7
179.7	25.00	598.0
179.5	26.00	612.0

F_{DMAX} = 179.70 kN bij δ_I = 24.00 mm.


F(k)
F(E)
ANAL. BER. GEOM. N.L.
DIANA GEOM. EN FYS. N.L.
= 0.3
VO = 83.63174 mm
L = 23808.554 mm
kolom, HE 2008
belasting [kN]
Totale verplaatsing kolom [mm]
TNO IBBC

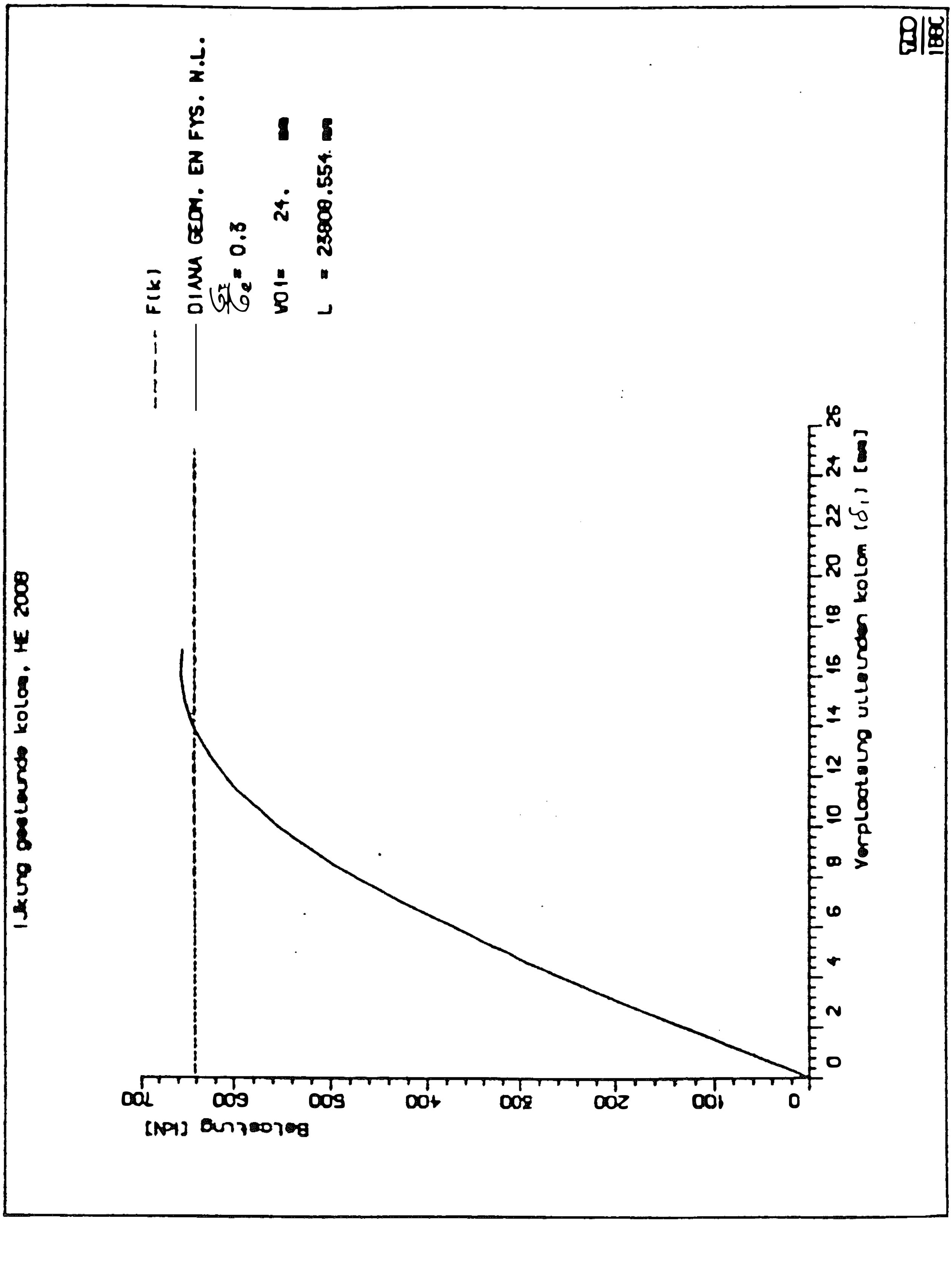
Tabel 1.2.1. :

-Geg: -Star gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- $w(x) = 83.632 \sin\frac{\pi x}{2a} + 24 \sin\frac{\pi x}{a}$



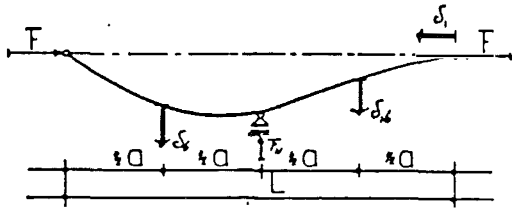
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
32.84	0.5	1.241	-0.7619	0.5611
65.51	1.0	2.567	-1.503	1.121
130.2	2.0	5.513	-3.316	2.239
193.7	3.0	8.920	-5.521	3.348
271.0	4.25	13.98	-9.983	4.712
344.7	5.50	20.14	-13.46	6.033
426.3	7.00	29.29	-20.54	7.520
497.1	8.50	40.54	-29.76	8.838
554.6	10.00	53.55	-40.97	9.928
598.5	11.50	67.57	-53.46	10.78
625.2	12.75	79.56	-64.19	11.32
644.0	14.00	91.42	-74.89	11.74
652.6	15.00	100.0	-83.01	12.01
657.1	16.00	110.3	-90.85	12.23
656.7	16.50	115.0	-94.63	12.30
655.2	17.0	124.2	-101.7	12.46

F_{DMAX} = 657.15 kN bij δ_1 = 16.12 mm.


IJking gesteunde kolom, HE 200B
F(k)
DIANA GEOM. EN FYS. N.L.
σr/σe = 0.3
VO1= 24. mm
L = 23808.554 mm
Verplaatsing uiteinden kolom (δ1) [mm]
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26
Belasting [kN]
0 100 200 300 400 500 600 700
TNO IBBC

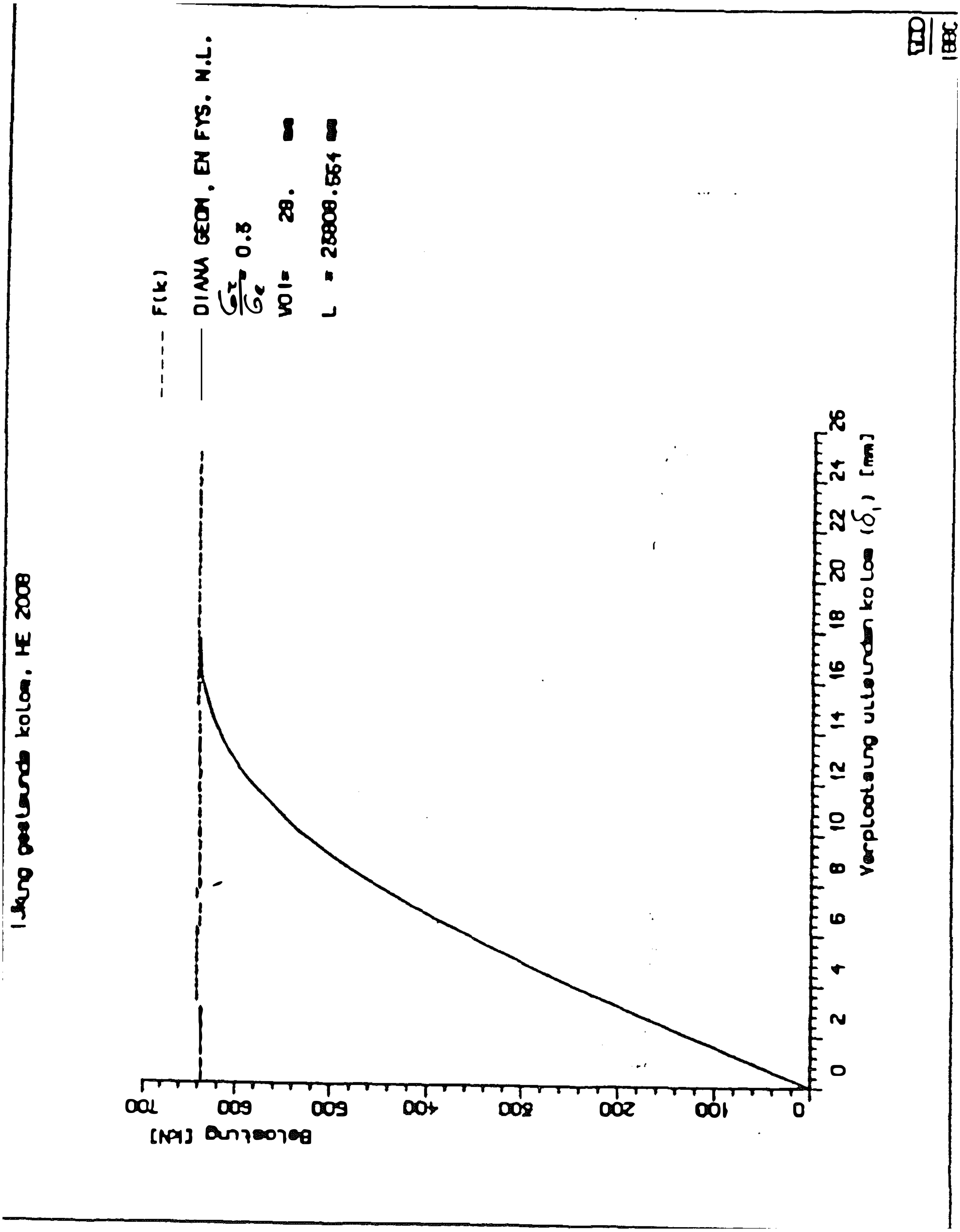
Tabel 1.2.2. :

-Geg: -Star gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- $w(x) = 83.632 \sin\frac{\pi x}{2a} + 28 \sin\frac{\pi x}{a}$



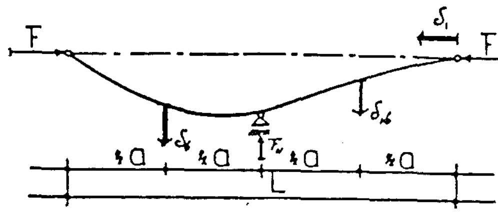
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
32.39	0.5	1.383	-0.8669	0.5532
64.54	1.0	2.860	-1.812	1.105
128.0	2.0	6.127	-3.970	2.201
190.1	3.0	9.882	-6.555	3.284
265.1	4.25	15.40	-10.53	4.607
335.9	5.50	22.00	-15.53	5.875
413.4	7.0	31.54	-23.13	7.284
480.1	8.5	42.84	-32.57	8.520
534.4	10.0	55.52	-43.59	9.543
576.6	11.5	68.91	-55.56	10.35
598.5	12.5	78.00	-63.72	10.79
615.8	13.5	87.02	-71.88	11.15
627.8	14.5	96.11	-79.84	11.45
631.7	15.0	100.7	-83.64	11.59
635.1	15.5	105.1	-87.47	11.70
637.6	16.0	109.5	-91.22	11.80
639.2	16.5	113.9	-94.88	11.89
640.0	17.0			
639.9	17.5			

F_{DMAX} = 640.07 kN bij δ_1 = 28.00 mm.


F(k)
DIANA GEOM. EN FYS. N.L.
VOI= 28. mm
Verplaatsing uiteinde kolom (δ_1) [mm]
Belasting [kN]
0
100
200
300
400
500
600
700
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26

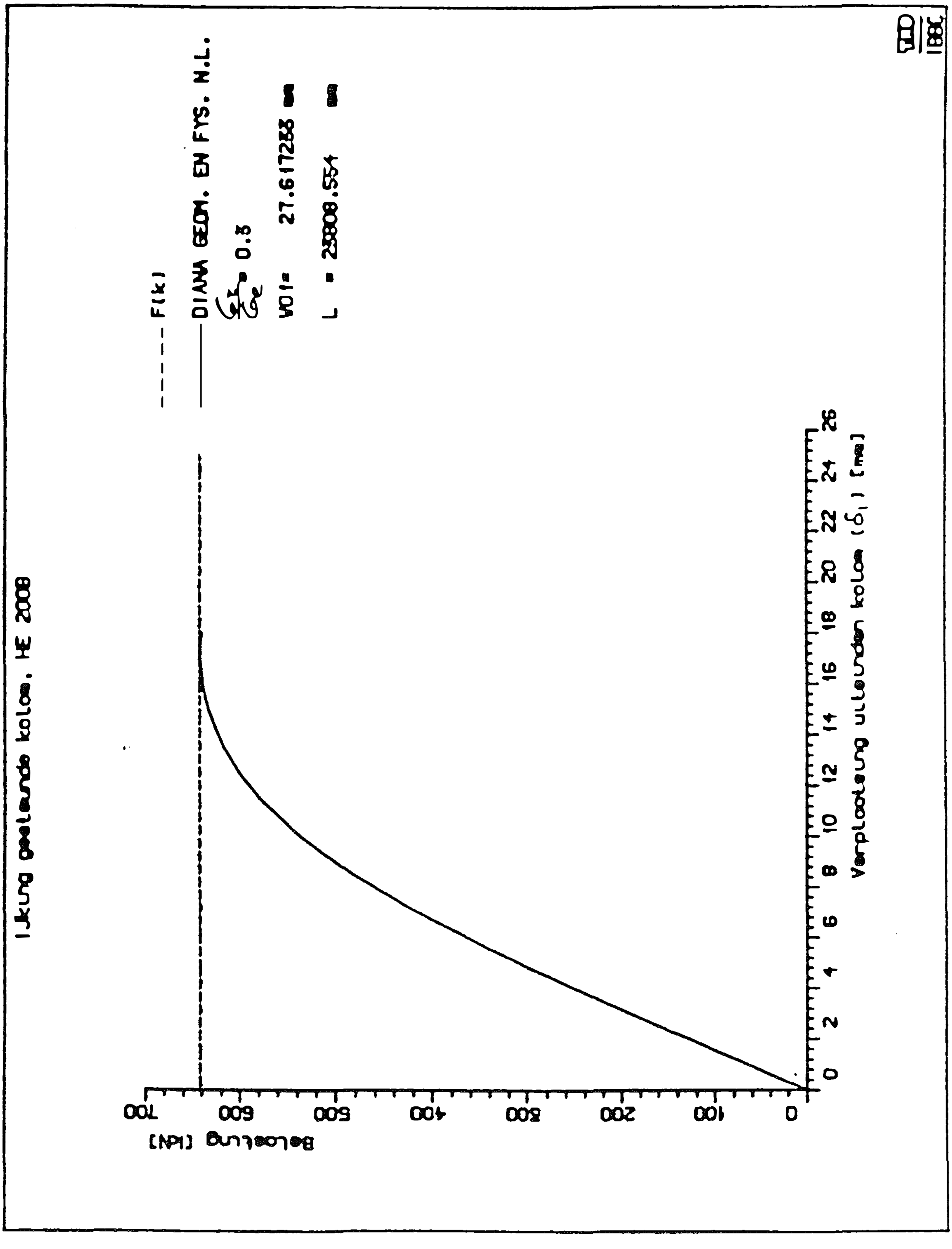
Tabel 1.2.3. :

-Geg: -Star gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- $w(x) = 83.632 \sin\frac{\pi x}{2a} + 27.617 \sin\frac{\pi x}{a}$



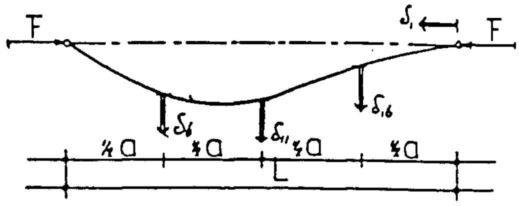
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
32.43	0.5	1.370	-0.8528	0.554
64.64	1.0	2.832	-1.783	1.107
128.2	2.0	6.070	-3.909	2.205
190.5	3.0	9.793	-6.459	3.291
265.7	4.25	15.27	-10.39	4.617
336.8	5.5	21.83	-15.34	5.890
414.7	7.0	31.34	-22.90	7.307
481.7	8.5	42.64	-32.33	8.550
536.3	10.0	55.35	-43.36	9.579
578.7	11.5	68.80	-55.38	10.39
600.4	12.5	77.94	-63.58	10.83
617.8	13.5	86.99	-71.77	11.19
626.8	14.25	93.91	-77.77	11.42
633.9	15.0	100.7	-83.60	11.63
636.9	15.5	105.2	-87.43	11.74
639.3	16.0	109.6	-91.20	11.84
640.9	16.5	114.0	-94.86	11.93
641.6	17.0	118.4	-98.40	12.01
641.4	17.5	122.7	-101.8	12.10
640.3	18.0	127.1	-105.0	12.18

F_{DMAX} = 641.63 kN bij δ_1 = 17.14 mm.


Ijking gesteunde kolom, HE 200B
F(k)
DIANA GEOM. EN FYS. N.L.
VOI= 27.617283 mm
L = 25808.554 mm
Belasting [kN]
Verplaatsing uiteinden kolom (δ1) [mm]
TNO IBBC

Tabel 1.3.1. :

-Geg: -Pin-ended kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- $w(x) = 83.632 \sin\frac{\pi x}{2a} + 27.617 \sin\frac{\pi x}{a}$



DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{11} [mm]	δ_{16} [mm]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
21.31	0.5	7.449	9.513	6.006
56.36	1.5	23.89	30.96	19.90
91.81	3.0	49.91	65.76	43.10
118.6	5.0	52.55	110.3	73.42
133.9	7.0	111.4	150.0	100.8
141.6	8.5	130.8	177.0	119.5
147.4	10.0	148.7	201.9	136.8
152.0	11.5	165.3	225.1	153.0
155.7	13.0	180.9	246.9	168.2
158.8	14.5	195.6	266.9	182.6
161.4	16.0	209.5	286.9	196.3
163.7	17.5	222.8	305.6	209.3
165.7	19.0	235.5	323.4	221.8
167.4	20.5	247.7	340.5	233.8
168.9	22.0	259.4	356.9	245.4
169.9	23.0	267.0	367.6	252.8
170.7	24.0	274.5	378.0	260.2
171.6	25.0	281.7	388.2	267.3
172.3	26.0	288.8	398.2	274.4
173.1	27.0	295.8	408.0	281.2
173.7	28.0	302.6	417.6	288.0
174.3	29.0	309.3	427.1	294.6
174.9	30.0	315.9	436.4	301.2

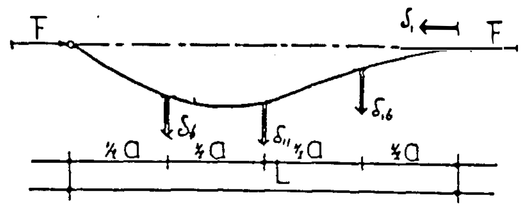
Vervolg tabel 1.3.1.:

F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
175.5	31.0	322.4	445.5	307.5
176.2	32.5	331.9	458.9	316.9
176.9	34.0	341.1	471.9	326.0
177.5	35.5	350.2	484.7	335.0
178.0	37.0	359.0	497.2	343.7
178.6	39.0	370.5	513.5	353.0
179.0	41.0	381.6	529.3	366.0
179.3	43.0	392.4	544.8	376.7
179.5	45.0	403.0	559.9	387.0
179.6	47.0	413.3	574.7	397.1
179.6	49.0	423.3	589.1	407.0
179.5	51.0	433.1	603.3	416.6

F_{DMAX} = 179.62 kN bij δ_1 = 48.00 mm.

Tabel 1.3.2. :

-Geg: -Pin-ended kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- $w(x) = 83.197 \sin\frac{\pi x}{2a} + 27.617 \sin\frac{\pi x}{a}$

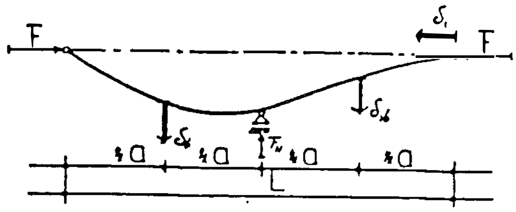


DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{11} [mm]	δ_{16} [mm]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
21.39	0.5	7.442	9.500	5.994
56.56	1.5	23.89	30.95	19.88
92.10	3.0	49.95	65.80	43.11
118.9	5.0	82.65	110.4	73.49
137.0	7.5	118.2	159.5	107.3
147.7	10.0	148.9	202.1	137.0
159.5	15.0	200.6	274.3	187.4
167.0	20.0	243.9	335.2	230.1
171.7	25.0	282.0	388.6	267.6
175.1	30.0	316.2	436.7	301.4
177.5	35.0	347.4	480.8	332.3
179.1	40.0	376.4	521.8	360.9
179.9	45.0	403.3	560.3	387.4
179.8	47.5	416.1	578.7	399.9
179.7	50.0	428.5	596.6	412.1

F_{DMAX} = 179.90 kN bij δ_1 = 44.90 mm.

Tabel 1.4.1. :

-Geg: -Star gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- $w(x) = 83.426 \sin\frac{\pi x}{2a} + 27.617 \sin\frac{\pi x}{a}$

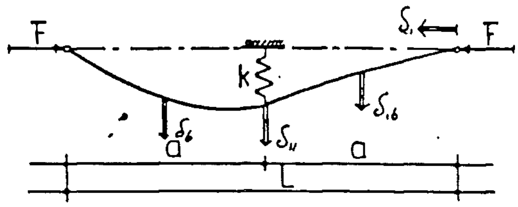


DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
32.43	0.5	1.369	0.8535	0.5527
96.59	1.5	4.394	2.800	1.653
190.5	3.0	9.790	6.463	3.283
308.9	5.0	19.06	13.23	5.376
438.4	7.5	34.91	25.85	7.725
536.3	10.0	55.34	43.38	9.556
600.4	12.5	77.93	63.60	10.80
625.1	14.0	91.42	75.88	11.32
639.1	15.5	104.9	87.52	11.71
639.5	16.0	109.6	91.25	11.81
640.9	16.5	114.0	94.89	11.90
641.6	17.0	118.4	98.43	11.98
641.4	17.5	122.7	101.8	12.07

F_{DMAX} = 641.60 kN bij δ_1 = 17.00 mm.

Tabel 1.5.1. :

-Geg: -Verend gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- k = 139.925 N/mm.
- $w(x) = 83.632 \sin\frac{\pi x}{2a} + 27.617 \sin\frac{\pi x}{a}$



DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_8 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
29.25	0.5	3.183	1.186	0.3959
58.01	1.0	6.548	2.441	0.8134
113.9	2.0	13.86	5.170	1.717
192.7	3.5	26.35	9.845	3.255
264.5	5.0	40.73	15.24	5.014
327.9	6.5	56.88	21.31	6.980
382.7	8.0	74.46	27.93	9.110
442.4	10.0	99.30	37.31	12.11
489.1	12.0	124.7	46.93	15.16
517.0	13.5	143.6	54.02	17.42
539.5	15.0	162.3	60.72	19.60
551.6	16.0	174.5	64.73	20.98
556.5	16.5	180.6	66.39	21.62
561.1	17.0	186.6	68.01	22.25
565.2	17.5	192.5	69.48	22.86
568.8	18.0	198.4	70.79	23.44
572.0	18.5	204.2	71.92	24.00
574.6	19.0	210.0	72.85	24.52
576.6	19.5	215.7	73.51	25.01
577.9	20.0	221.4	73.82	25.45
578.6	20.5	227.0	73.86	25.85
578.3	21.0	232.6	73.40	26.17
576.8	21.5	238.2	72.33	26.41

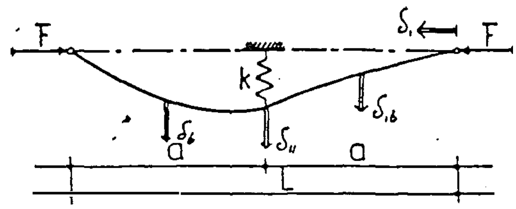
Vervolg tabel 1.5.1.:

F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
573.3	22.0	243.8	70.38	26.52
567.1	22.5	249.6	67.27	26.45
562.2	23.0	255.1	64.82	26.45
557.3	23.5	260.4	62.47	26.44
551.7	24.0	265.7	59.96	26.40
542.3	25.0	275.7	55.87	26.40
533.0	26.0	285.4	52.04	26.38
519.4	27.5	299.1	46.90	26.36
509.4	28.75	310.0	43.33	26.39
508.5	28.80	310.5	43.08	26.37
508.5	28.825	310.7	43.05	26.38
508.3	28.85	310.9	42.98	26.38
507.9	28.9	311.3	42.85	26.38
507.1	29.0	312.2	42.59	26.39
503.5	29.5	316.4	41.34	26.41
499.2	30.0	320.6	39.95	26.40

F_{DMAX} = 578.63 kN bij δ_1 = 120.62 mm.

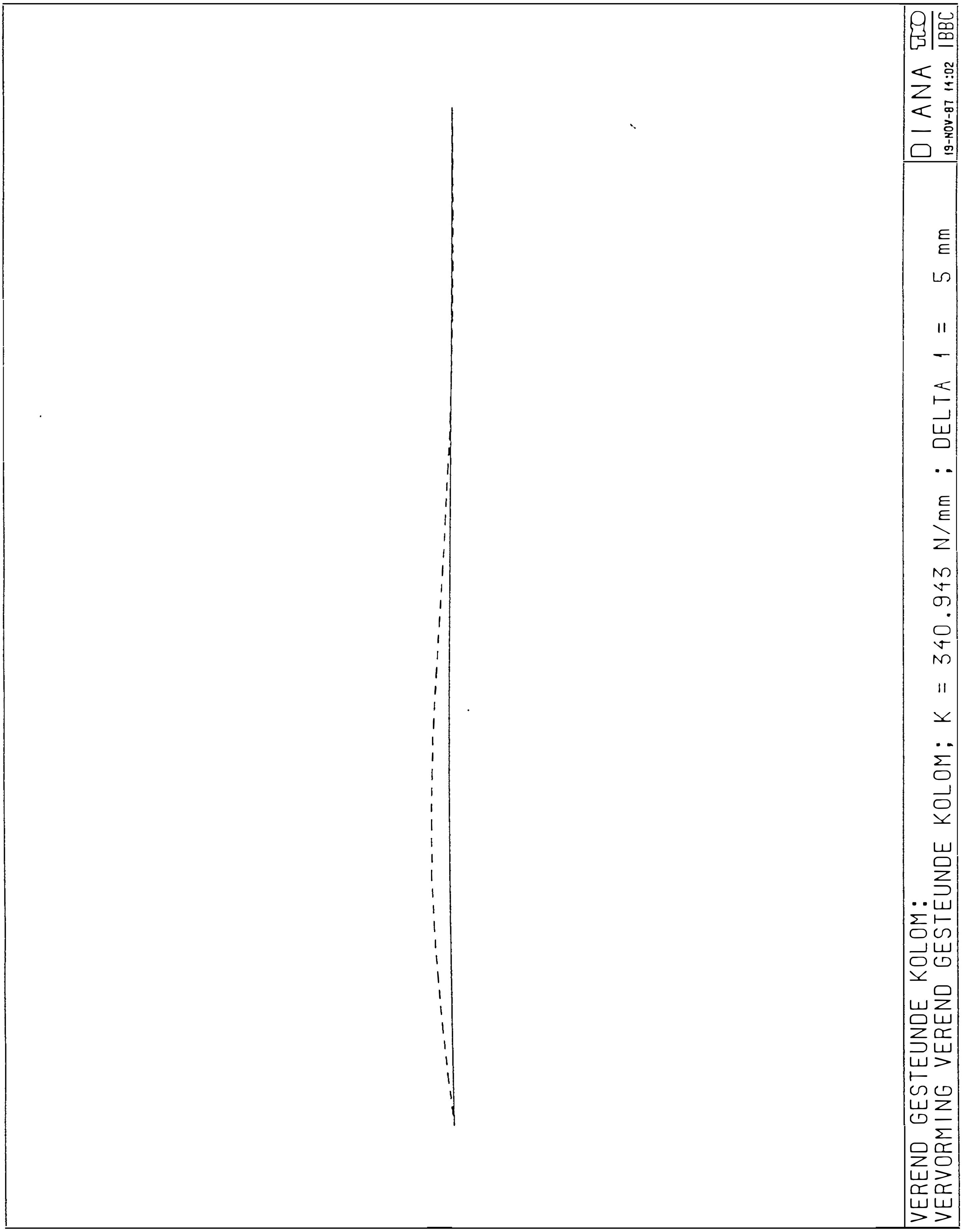
Tabel 1.5.2. :

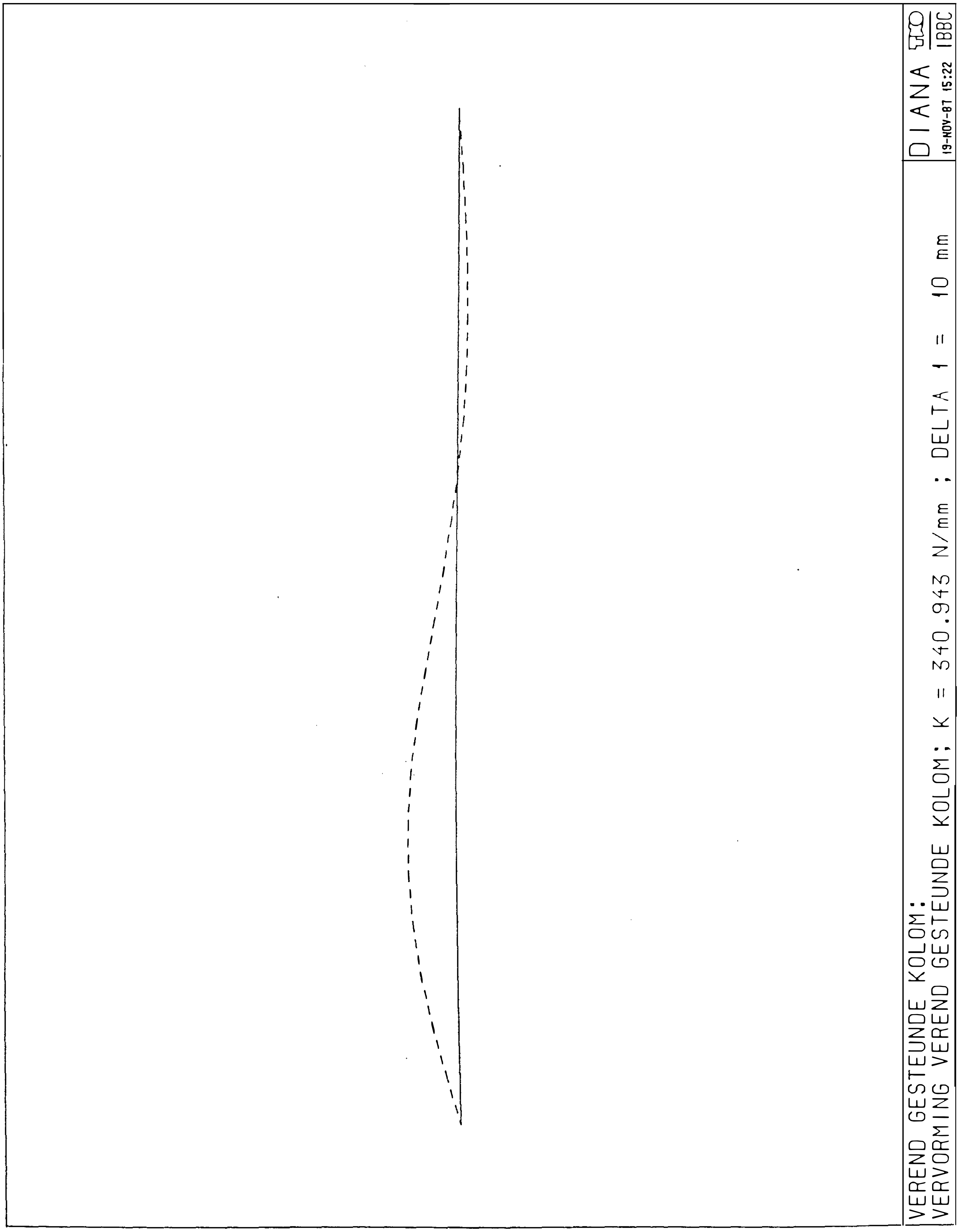
-Geg: -Verend gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- k = 340.943 N/mm.
- $w(x) = 83.632 \sin\frac{\pi x}{2a} + 27.617 \sin\frac{\pi x}{a}$

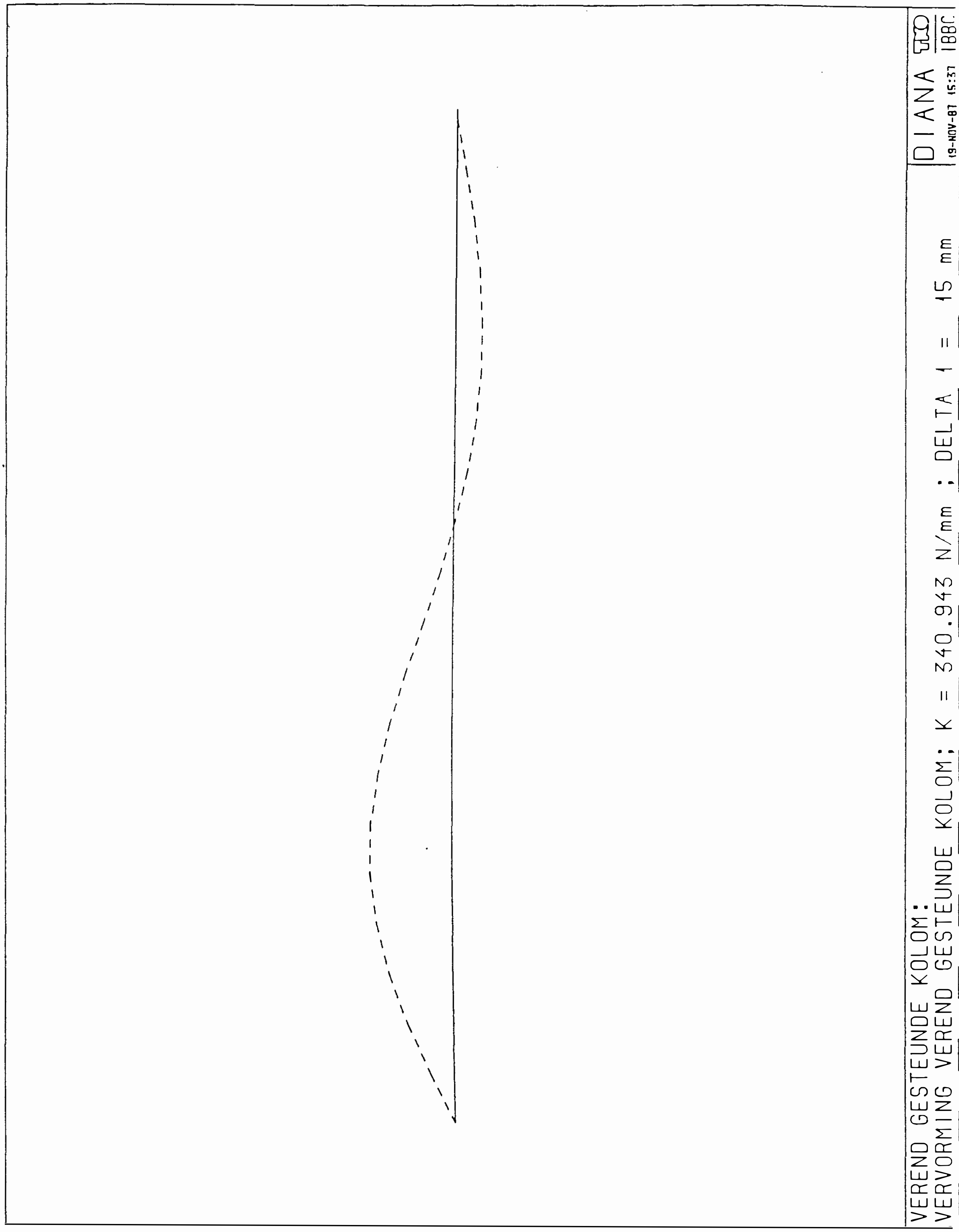


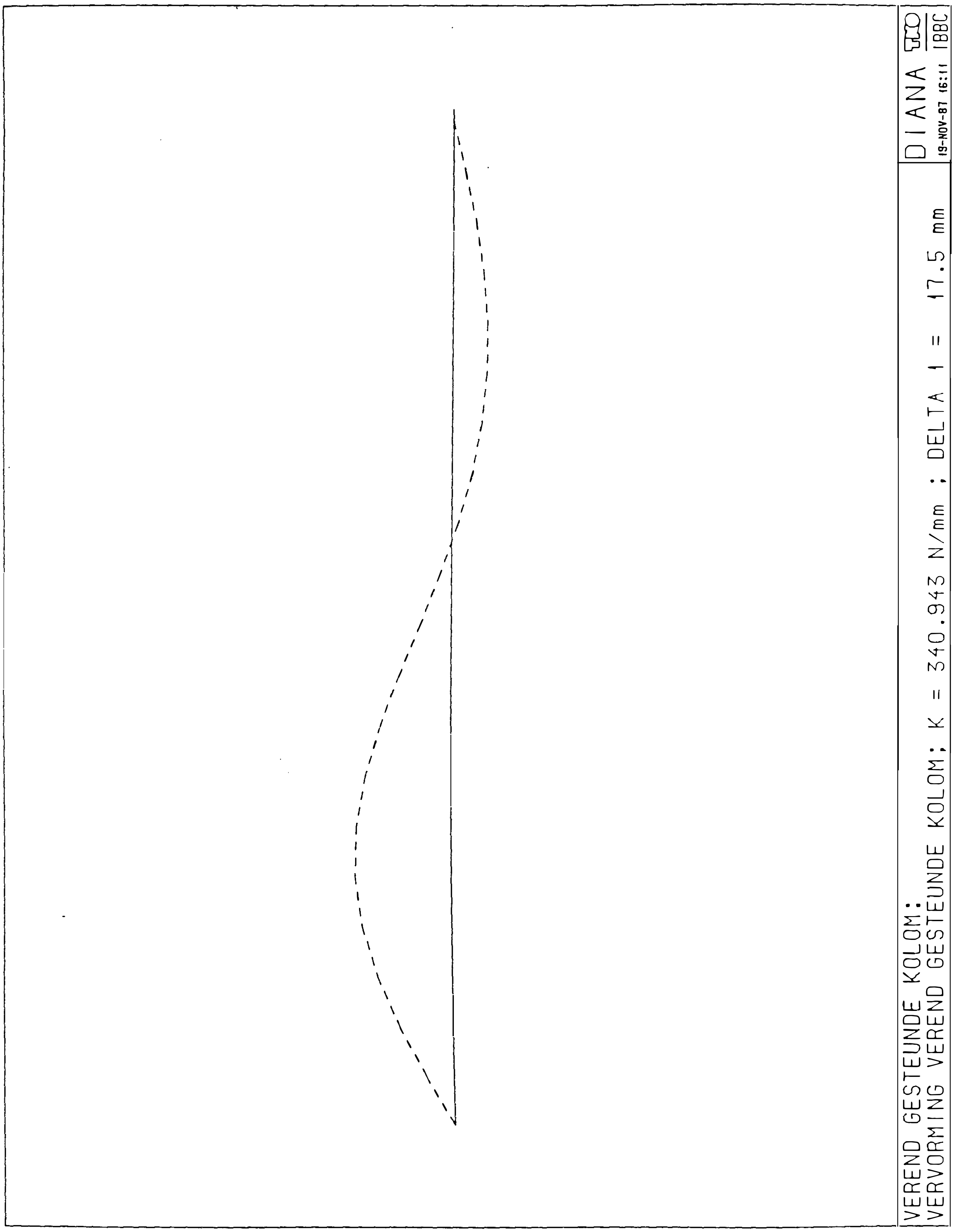
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
30.87	0.5	2.266	0.1545	0.4766
61.46	1.0	4.647	0.2767	0.9665
91.73	1.5	7.150	o.3609	1.470
151.2	2.5	12.55	0.3882	2.517
208.9	3.5	18.53	0.1728	3.616
291.5	5.0	28.71	-0.7816	5.349
367.6	6.5	40.47	-2.784	7.150
435.6	8.0	53.80	-6.166	8.955
511.0	10.0	73.54	-13.17	11.22
567.9	11.5	94.38	-22.81	13.17
598.8	13.0	110.1	-31.23	14.37
619.7	15.0	125.6	-40.02	15.36
626.7	16.0	135.9	-45.75	15.89
628.4	16.5	141.1	-48.53	16.12
629.7	17.0	146.1	-51.25	16.34
629.9	17.5	151.2	-53.85	16.55
629.0	18.0	156.3	-56.28	16.74

F_{DMAX} = 629.96 kN bij δ_1 = 17.34 mm.


DIANA
19-NOV-87 14:02
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 340.943 N/mm ; DELTA 1 = 5 mm

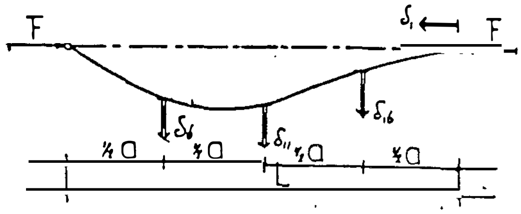

DIANA
19-NOV-87 15:22
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 340.943 N/mm ; DELTA 1 = 10 mm


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 340.943 N/mm ; DELTA 1 = 15 mm
DIANA
19-NOV-87 15:37
IBBC


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 340.943 N/mm ; DELTA 1 = 17.5 mm
DIANA
19-NOV-87 16:11
IBBC

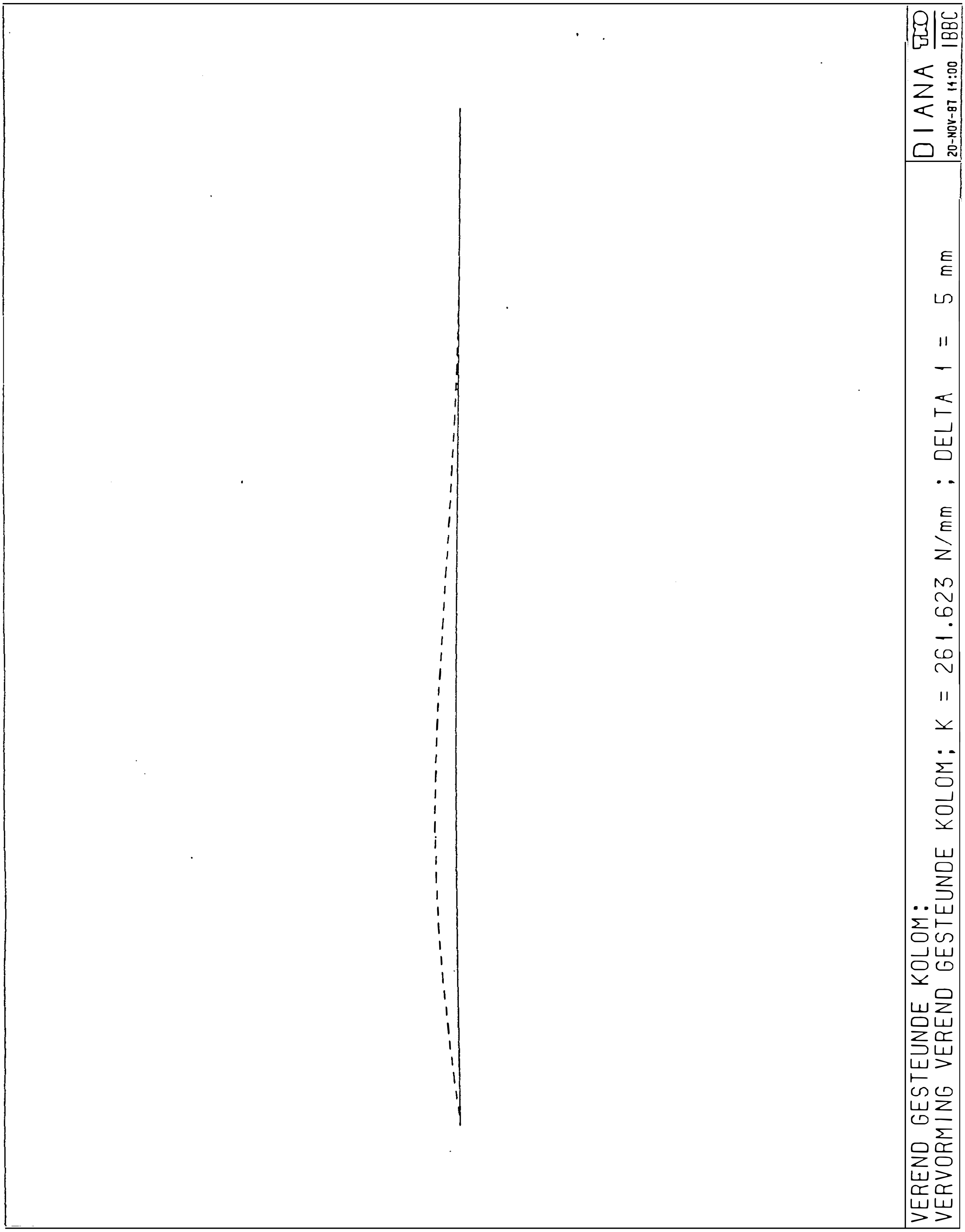
Tabel 1.5.3. :

-Geg: -Verend gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- k = 261.623 N/mm.
- $w(x) = 83.632 \sin\frac{\pi x}{2a} + 27.617 \sin\frac{\pi x}{a}$

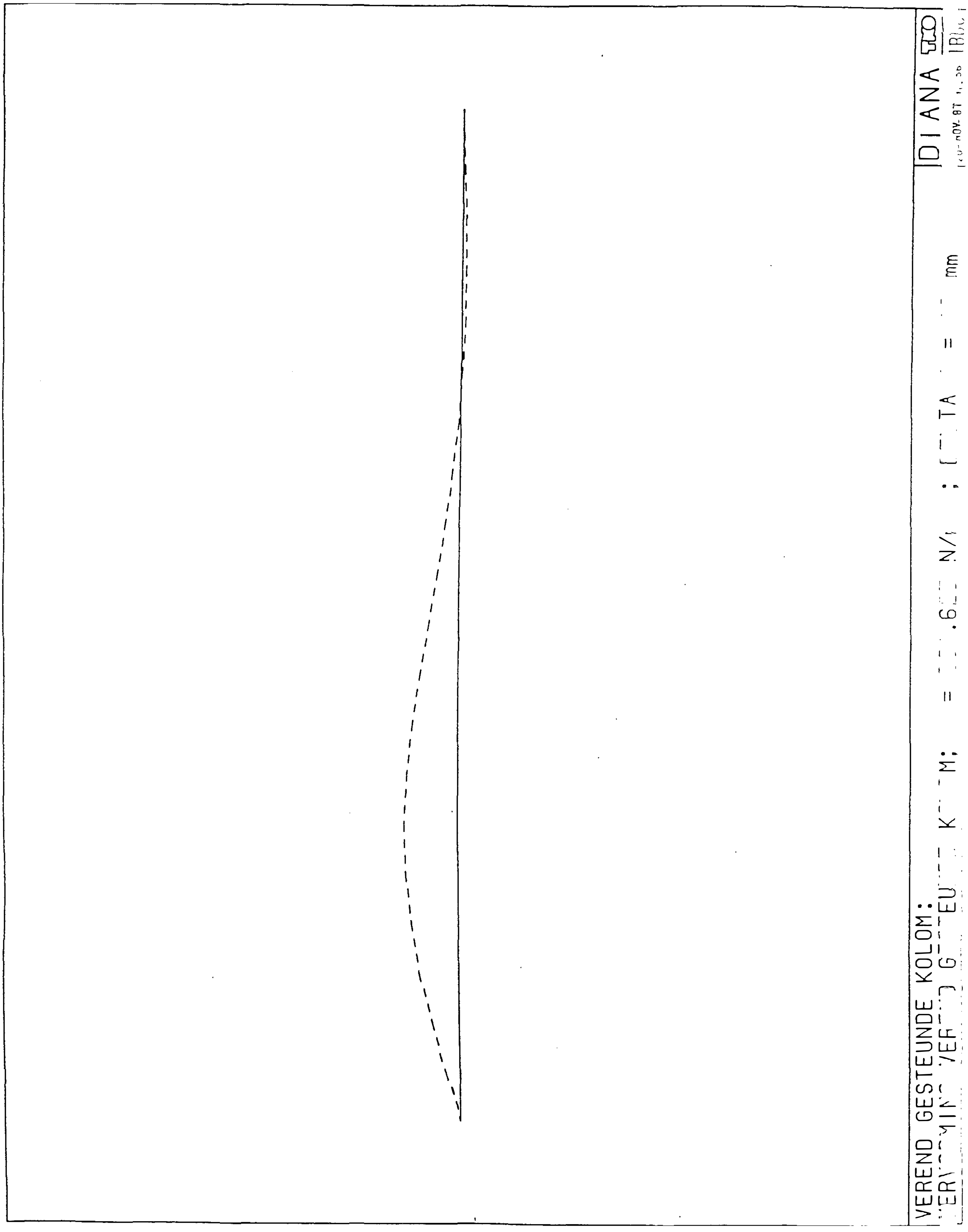


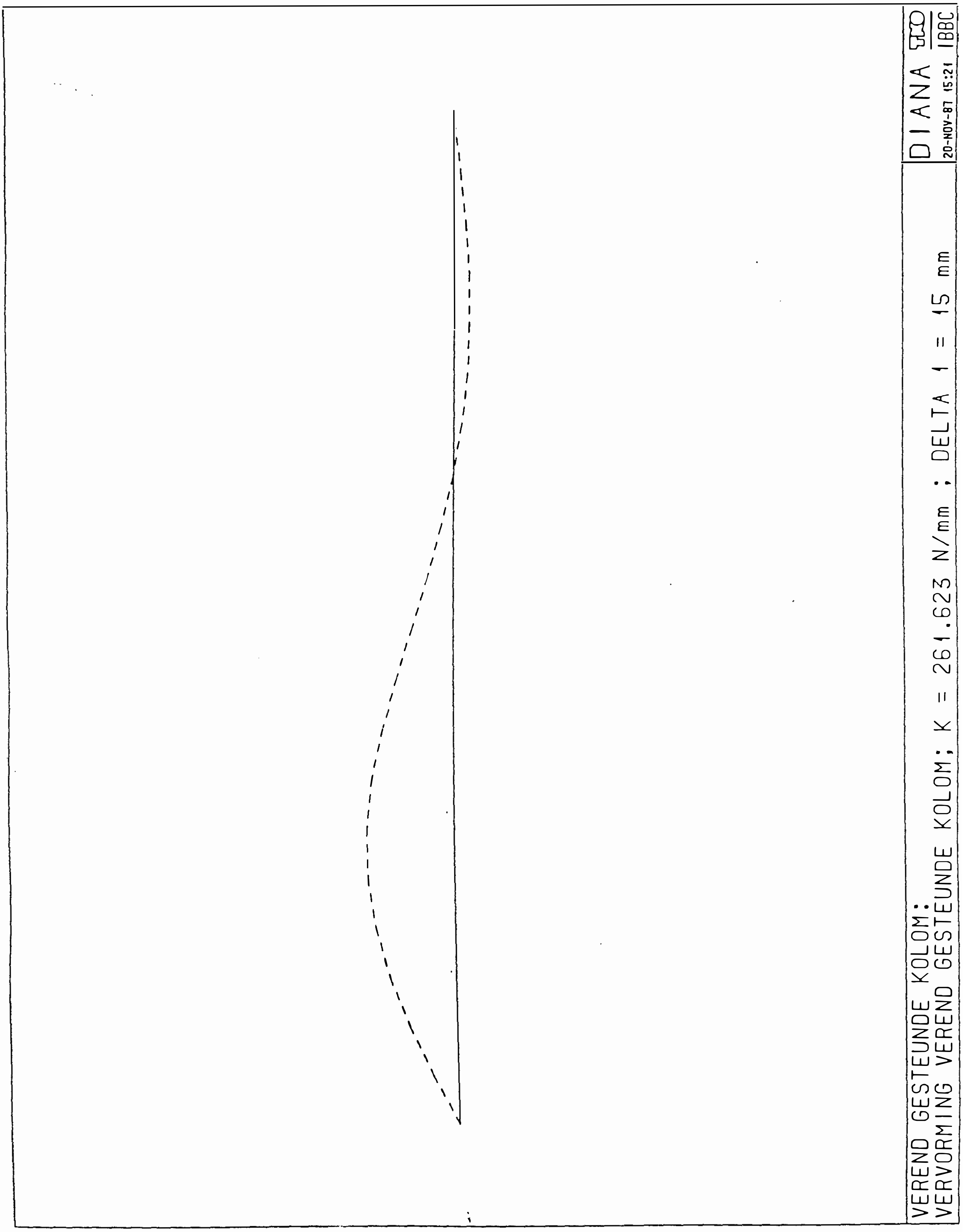
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
30.48	0.5	2.49	0.406	0.457
60.64	1.0	5.107	0.800	0.9301
90.44	1.5	7.859	1.178	1.420
148.8	2.5	13.79	1.864	2.448
205.4	3.5	20.36	2.418	3.543
285.8	5.0	31.47	2.859	5.303
359.7	6.5	44.21	2.596	7.176
425.6	8.0	58.50	1.328	9.107
499.3	10.0	79.45	-2.34	11.64
556.3	12.0	101.5	-8.405	13.94
587.9	13.5	118.1	-14.33	15.43
610.4	15.0	134.5	-21.05	16.68
618.5	16.0	145.4	-25.73	17.36
620.5	16.5	150.8	-28.03	17.66
622.4	17.0	156.1	-3o.31	17.94
623.2	17.5	161.4	-32.55	18.20
622.7	18.0	166.7	-34.73	18.43

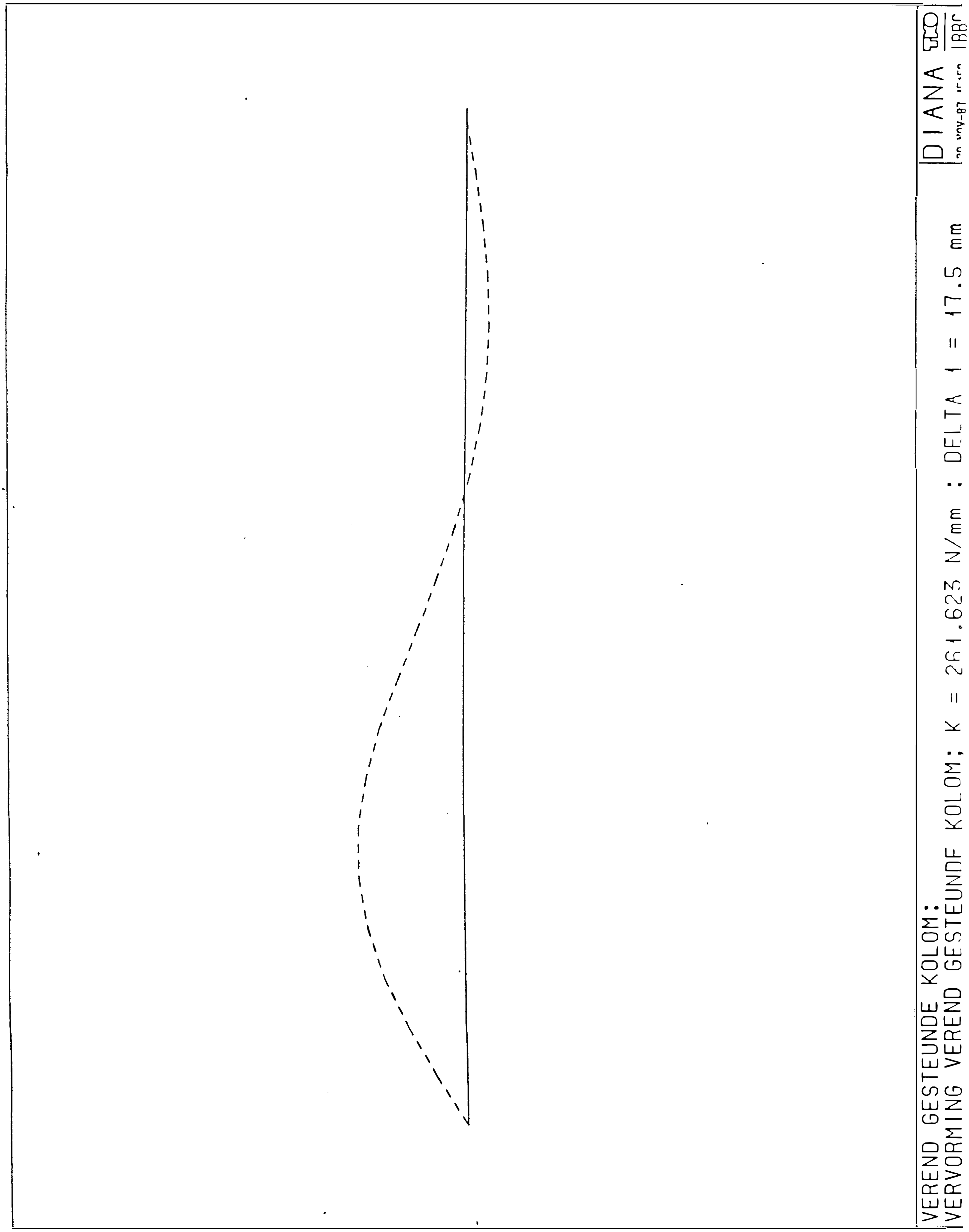
F_{DMAX} = 623.21 kN bij δ_1 = 17.56 mm.



DIANA
20-NOV-87 14:00
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 261.623 N/mm ; DELTA 1 = 5 mm

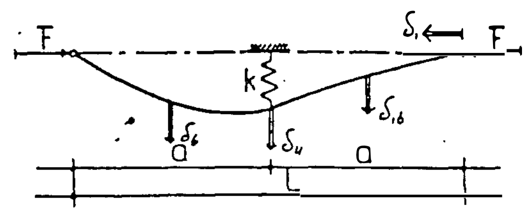

DIANA
VEREND GESTEUNDE KOLOM:


DIANA
20-NOV-87 15:21
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 261.623 N/mm ; DELTA 1 = 15 mm


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 261.623 N/mm ; DELTA 1 = 17.5 mm
DIANA
IBBC

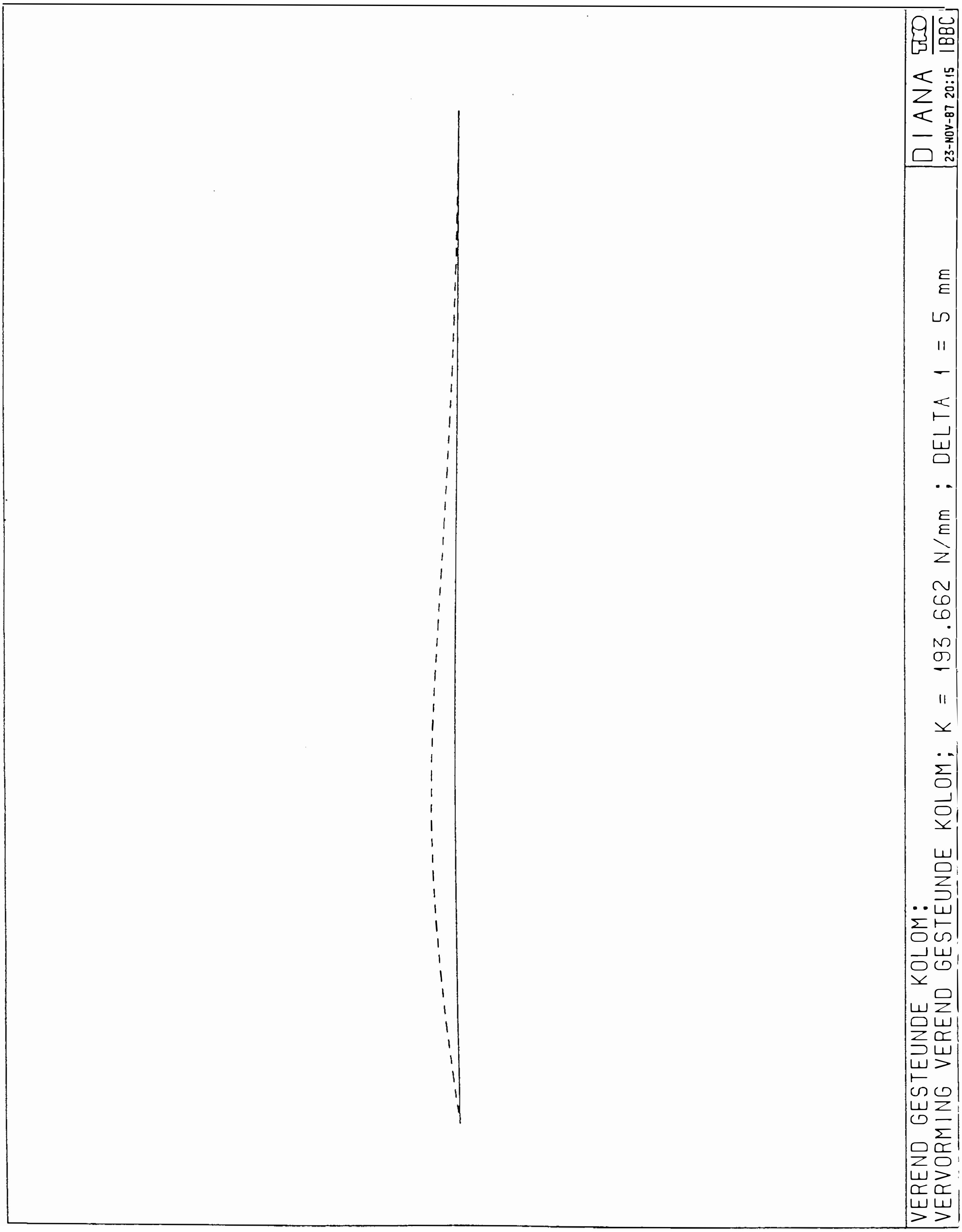
Tabel 1.5.4. :

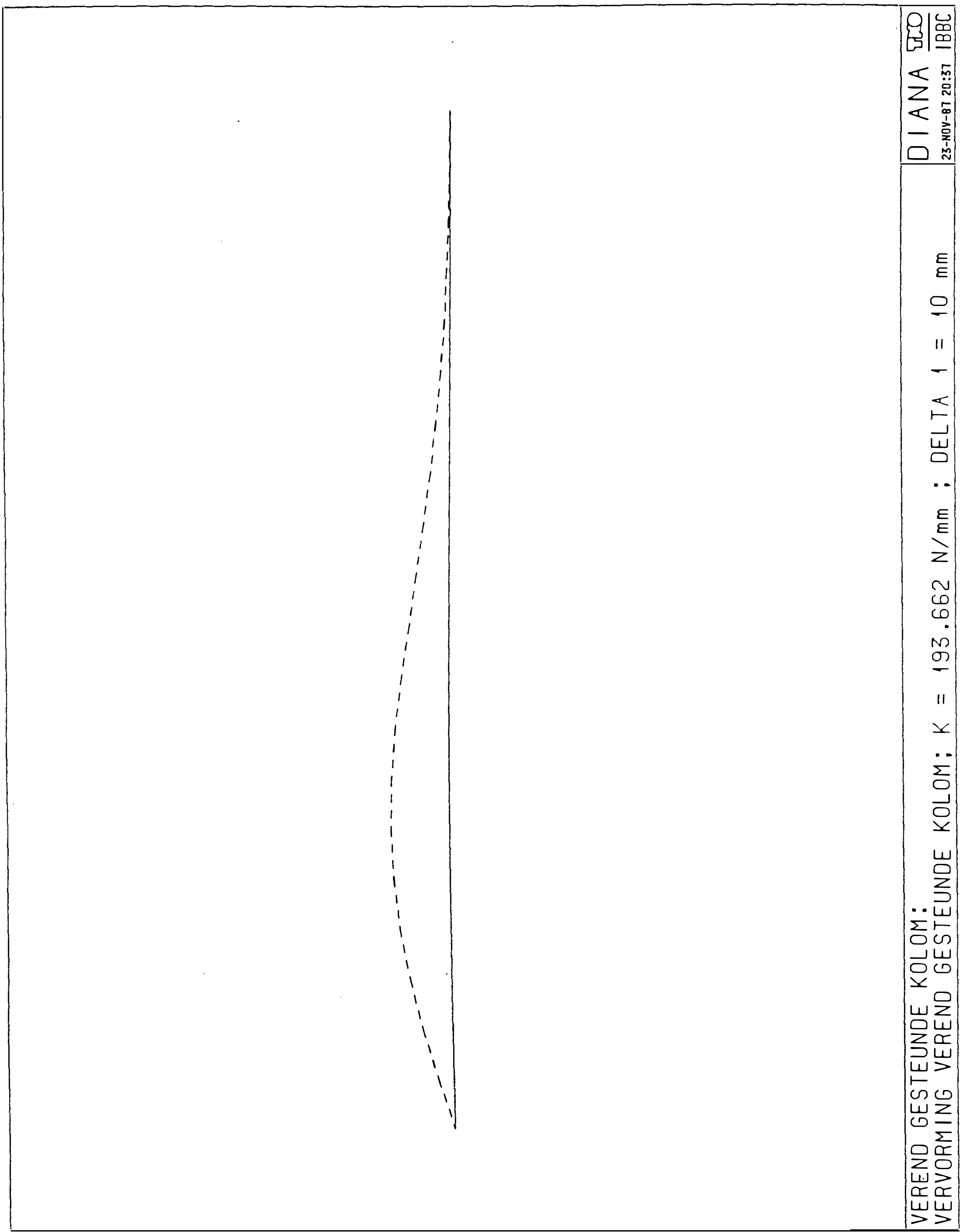
-Geg: -Verend gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- k = 193.662 N/mm.
- $w(x) = 83.632 \sin\frac{\pi x}{2a} + 27.617 \sin\frac{\pi x}{a}$

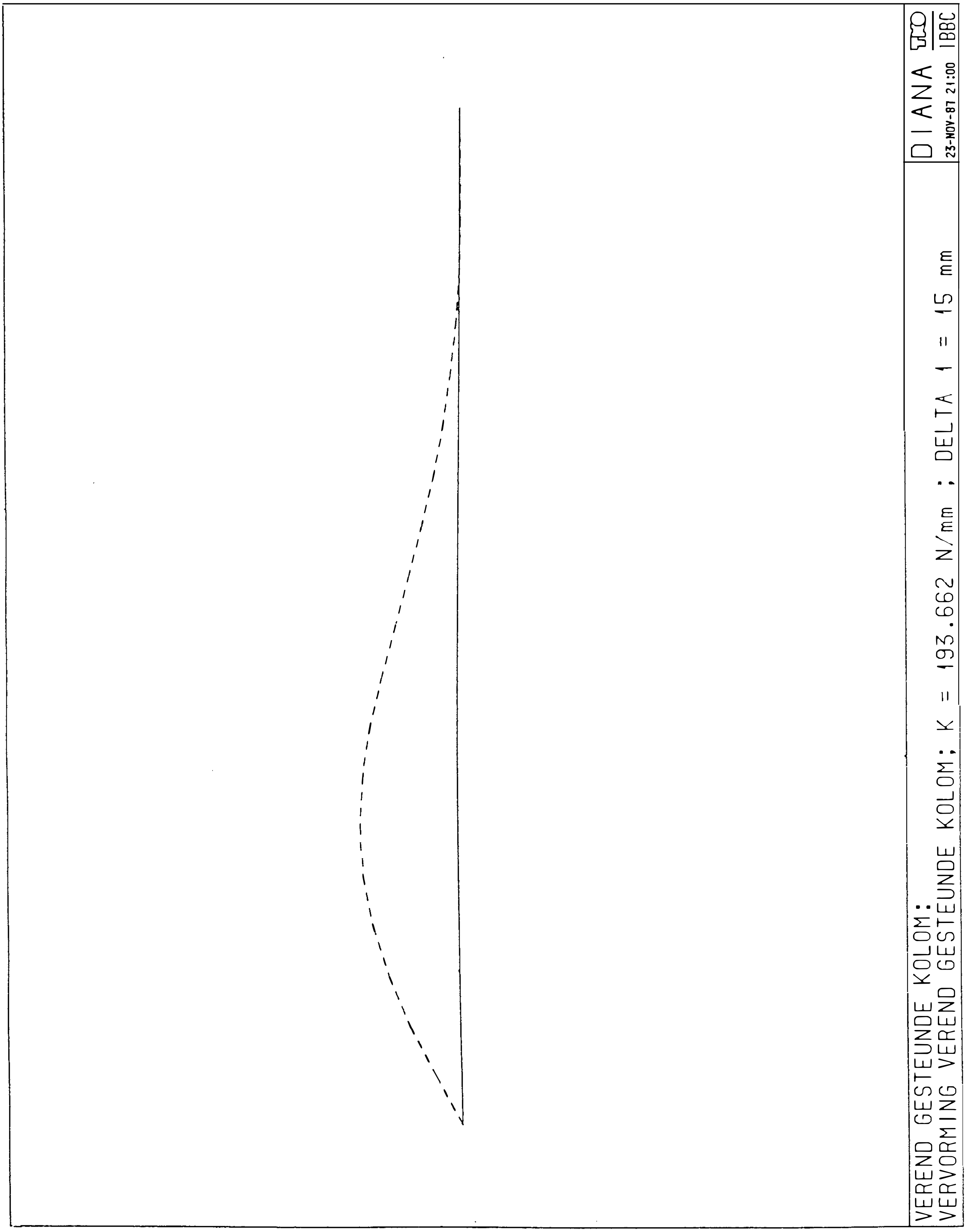


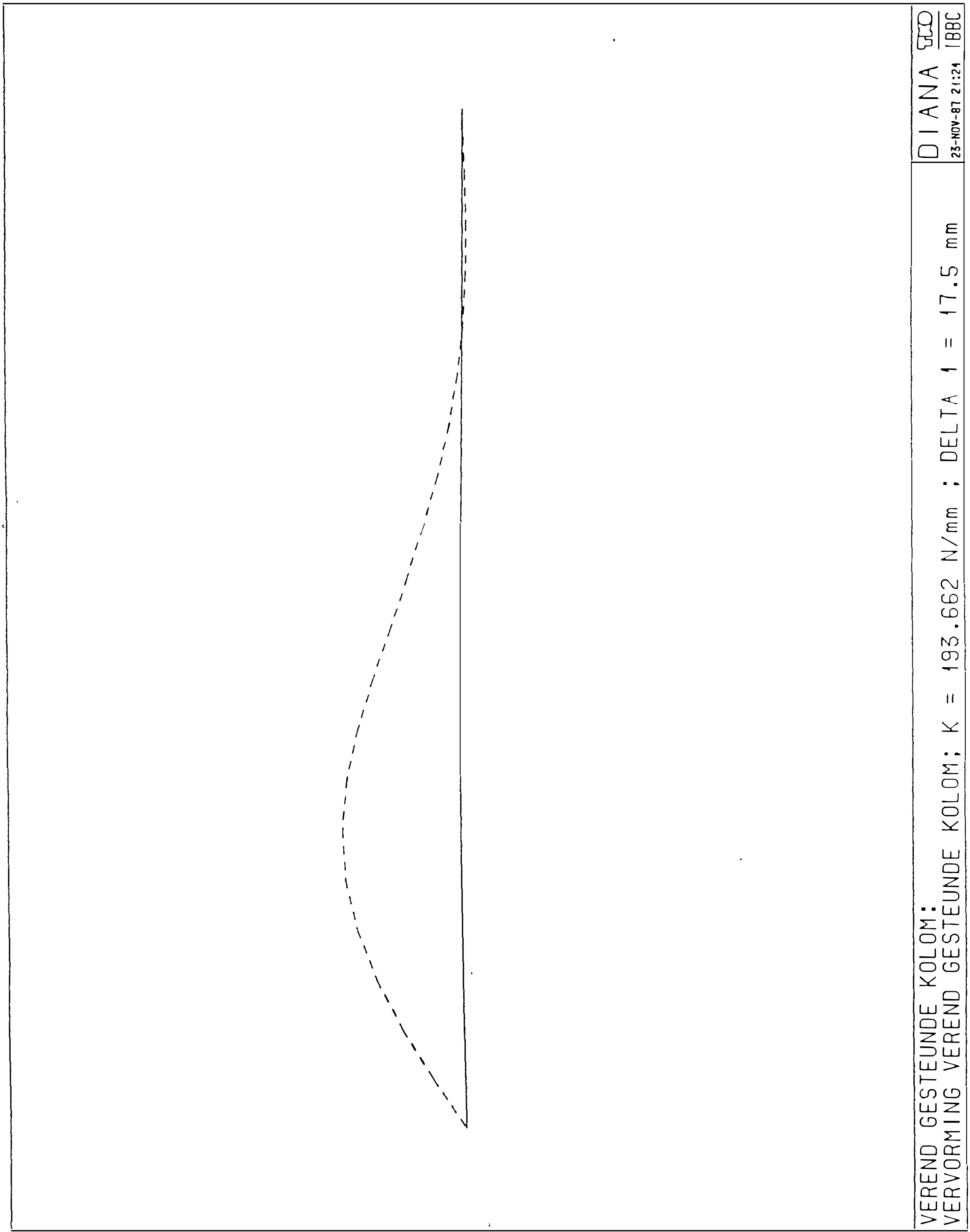
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
29.94	0.5	2.794	0.7484	0.4303
59.50	1.0	5.737	1.517	0.8796
88.63	1.5	8.836	2.304	1.348
145.5	2.5	15.53	3.928	2.347
200.1	3.5	22.93	5.599	3.429
277.1	5.0	35.44	8.199	5.206
347.1	6.5	49.63	10.51	7.150
409.0	8.0	65.36	12.57	9.218
478.2	10.0	88.13	14.42	12.05
532.9	12.0	111.9	14.90	14.83
564.5	13.5	129.9	14.14	16.76
588.9	15.0	147.7	12.39	18.51
599.0	16.0	159.4	10.37	19.49
602.3	16.5	165.2	9.14	19.91
605.5	17.0	170.9	7.899	20.33
607.7	17.5	176.5	6.551	20.70
608.8	18.0	182.1	5.101	21.04
608.9	18.5	187.7	3.576	21.34
607.4	19.0	193.2	1.929	21.58

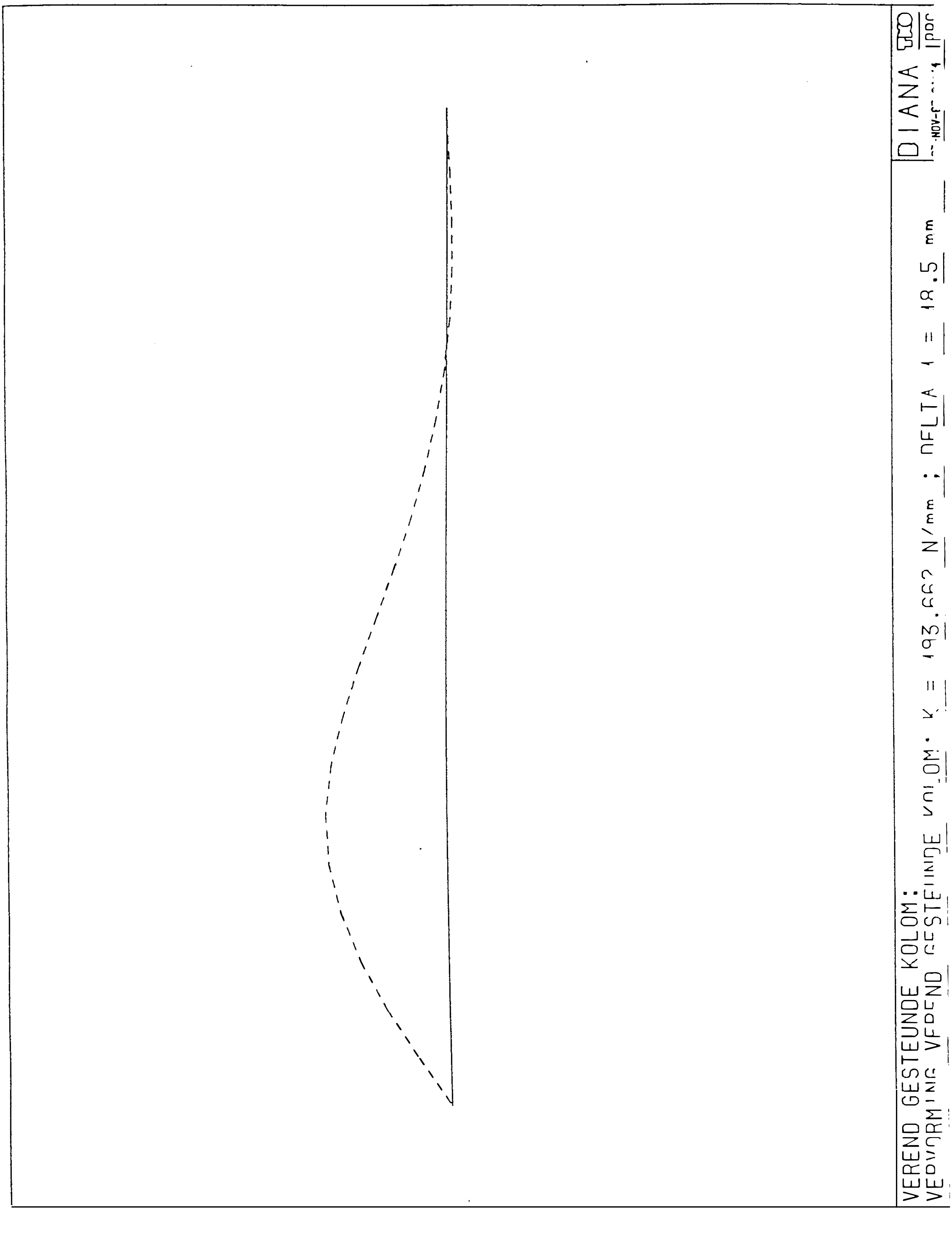
F_{DMAX} = 609.02 kN bij δ_1 = 18.29 mm.


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 193.662 N/mm ; DELTA 1 = 5 mm
DIANA
23-NOV-87 20:15
IBBC


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 193.662 N/mm ; DELTA 1 = 10 mm
DIANA
23-NOV-87 20:37
IBBC

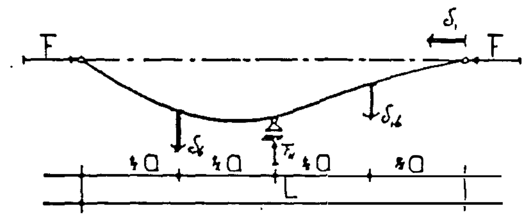

DIANA
23-NOV-87 21:00
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 193.662 N/mm ; DELTA 1 = 15 mm


DIANA
23-NOV-87 21:24
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 193.662 N/mm ; DELTA 1 = 17.5 mm


DIANA
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM: K = 193.662 N/mm ; DELTA 1 = 18.5 mm

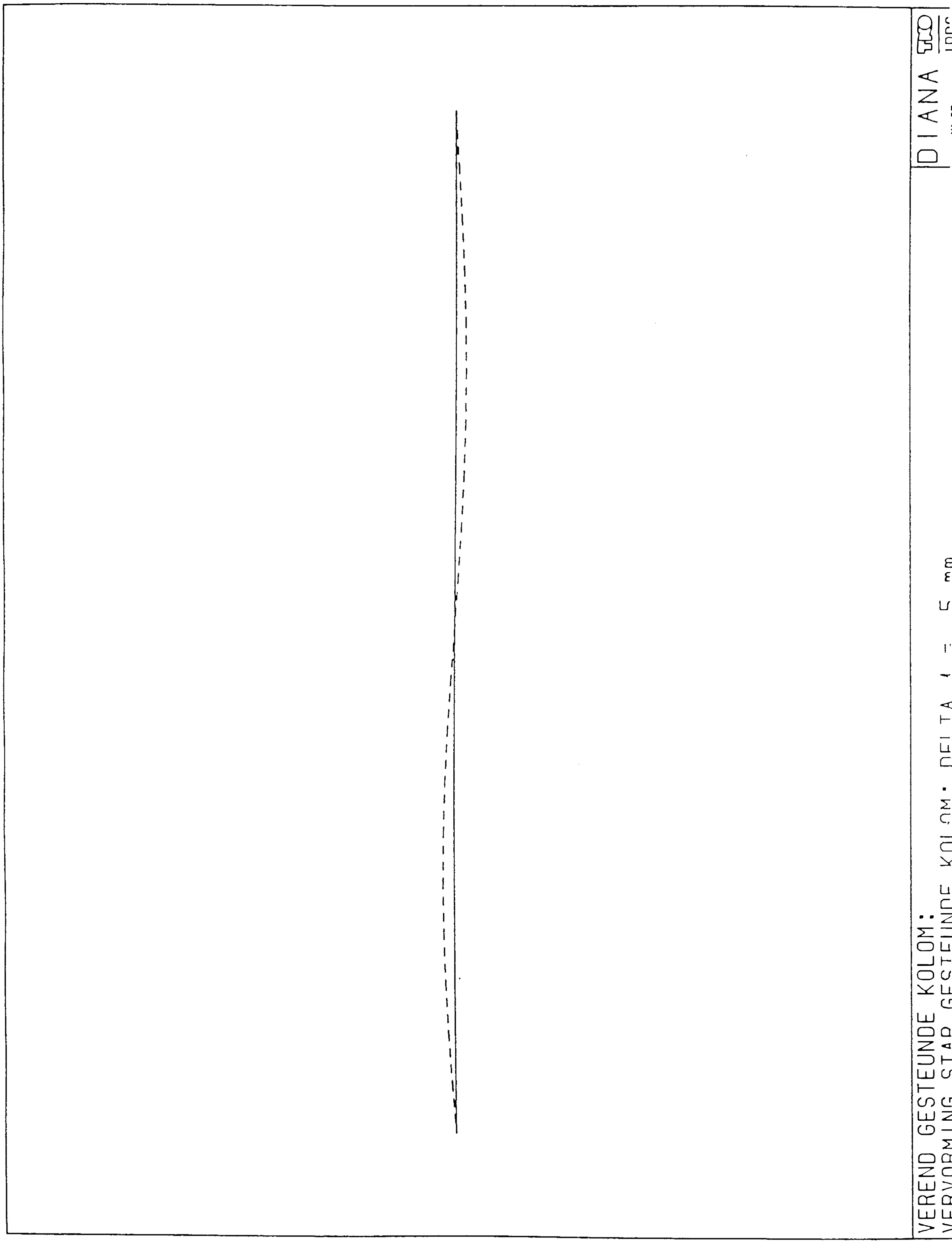
Tabel 2.2.1. :

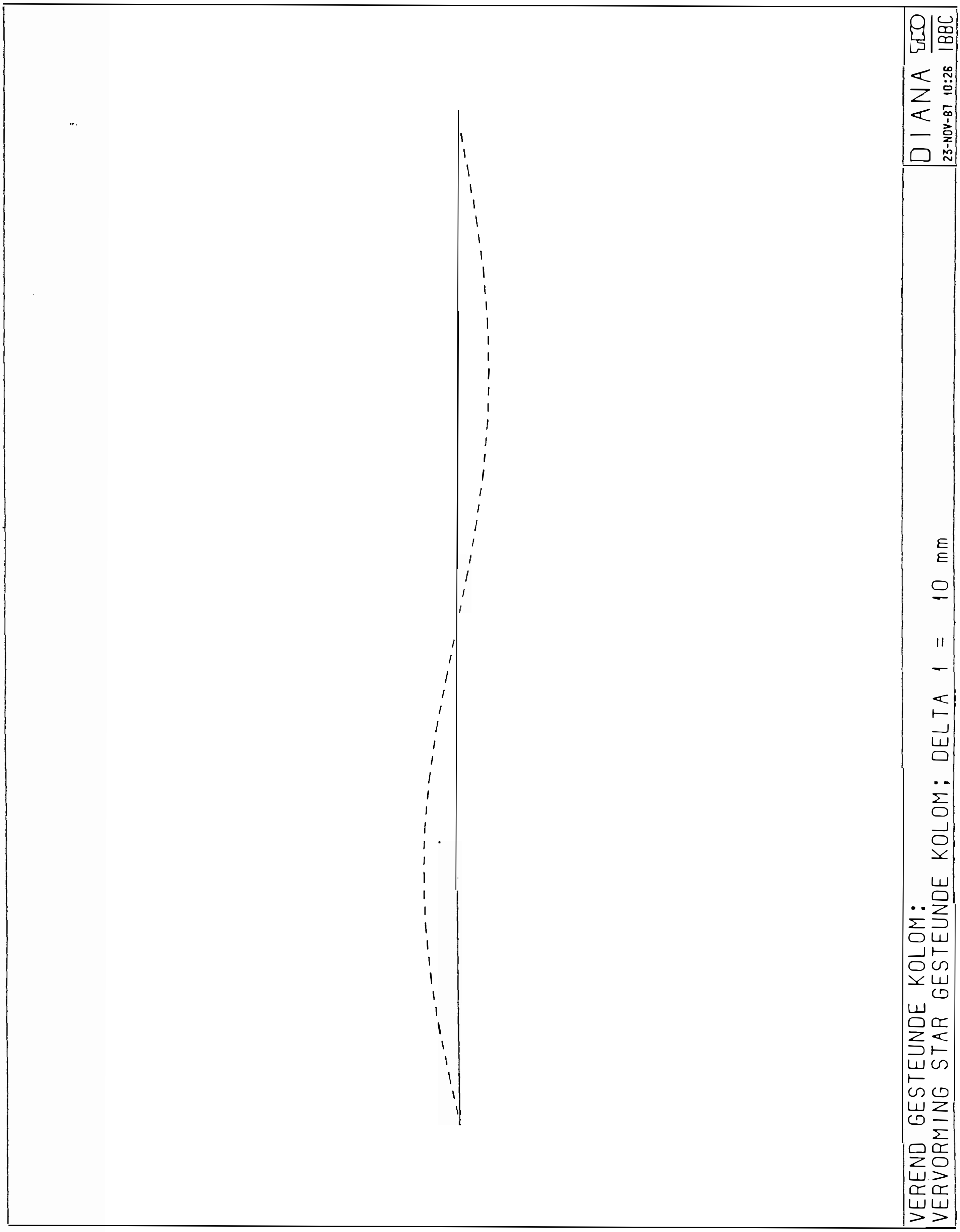
-Geg: -Star gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- $w(x) = 30.86 \sin \frac{\pi x}{2a} + 27.62 \sin \frac{\pi x}{a}$

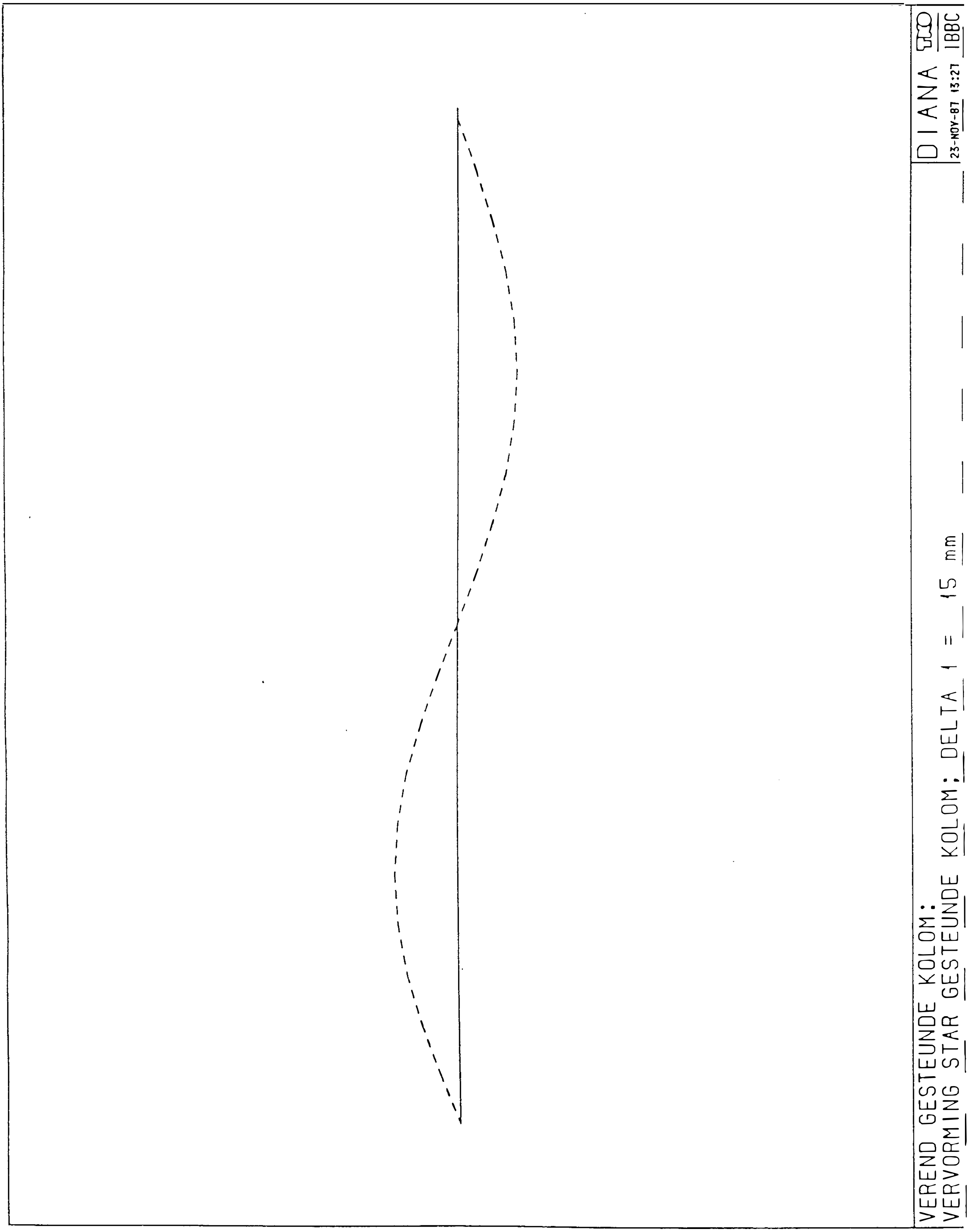


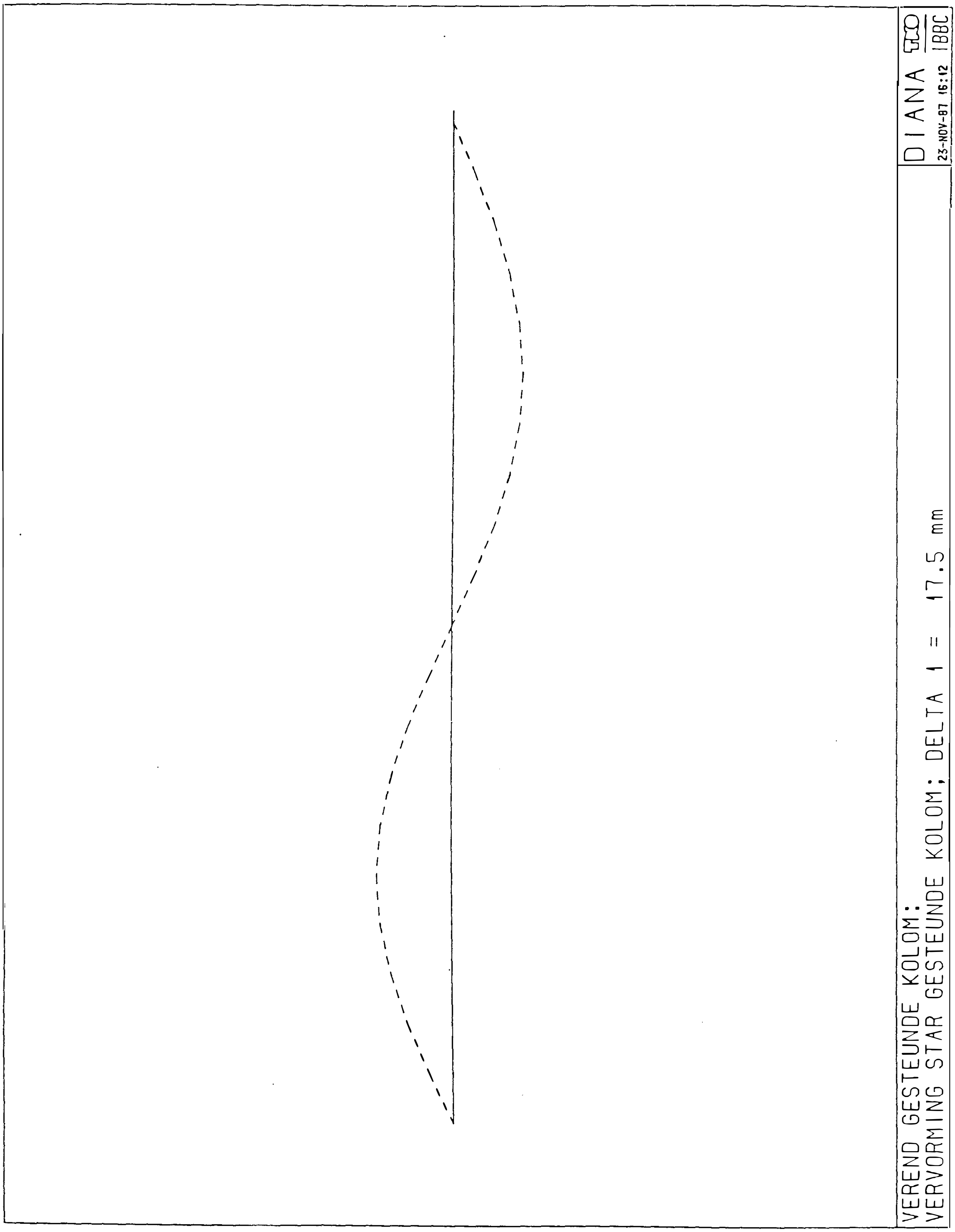
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
32.62	0.5	1.213	1.021	0.2056
65.03	1.0	2.515	2.125	0.4108
97.18	1.5	3.915	3.322	0.6125
160.6	2.5	7.049	6.031	1.021
222.4	3.5	10.70	9.240	1.421
311.0	5.0	17.38	15.21	2.002
392.3	6.5	25.79	22.89	2.545
463.5	8.0	36.07	32.46	3.029
538.9	10.0	52.22	47.77	3.553
592.5	12.0	69.76	64.62	3.936
619.7	13.5	83.06	77.43	4.143
638.0	15.0	96.11	89.80	4.314
642.6	16.0	104.7	97.92	4.389
643.5	16.5	109.0	101.8	4.426
644.4	17.0	113.1	105.7	4.455
644.7	17.5	117.2	109.4	4.49
644.2	18.0	121.2	113.0	4.525

F_{DMAX} = 644.70 kN bij δ_1 = 17.45 mm.

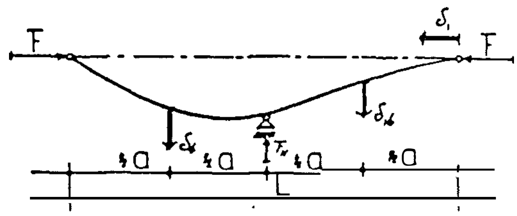

DIANA
VEREND GESTEUNDE KOLOM:


DIANA
23-NOV-87 10:26
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING STAR GESTEUNDE KOLOM; DELTA 1 = 10 mm


DIANA
23-NOV-87 13:27
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING STAR GESTEUNDE KOLOM; DELTA 1 = 15 mm


DIANA
23-NOV-87 16:12
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING STAR GESTEUNDE KOLOM; DELTA 1 = 17.5 mm

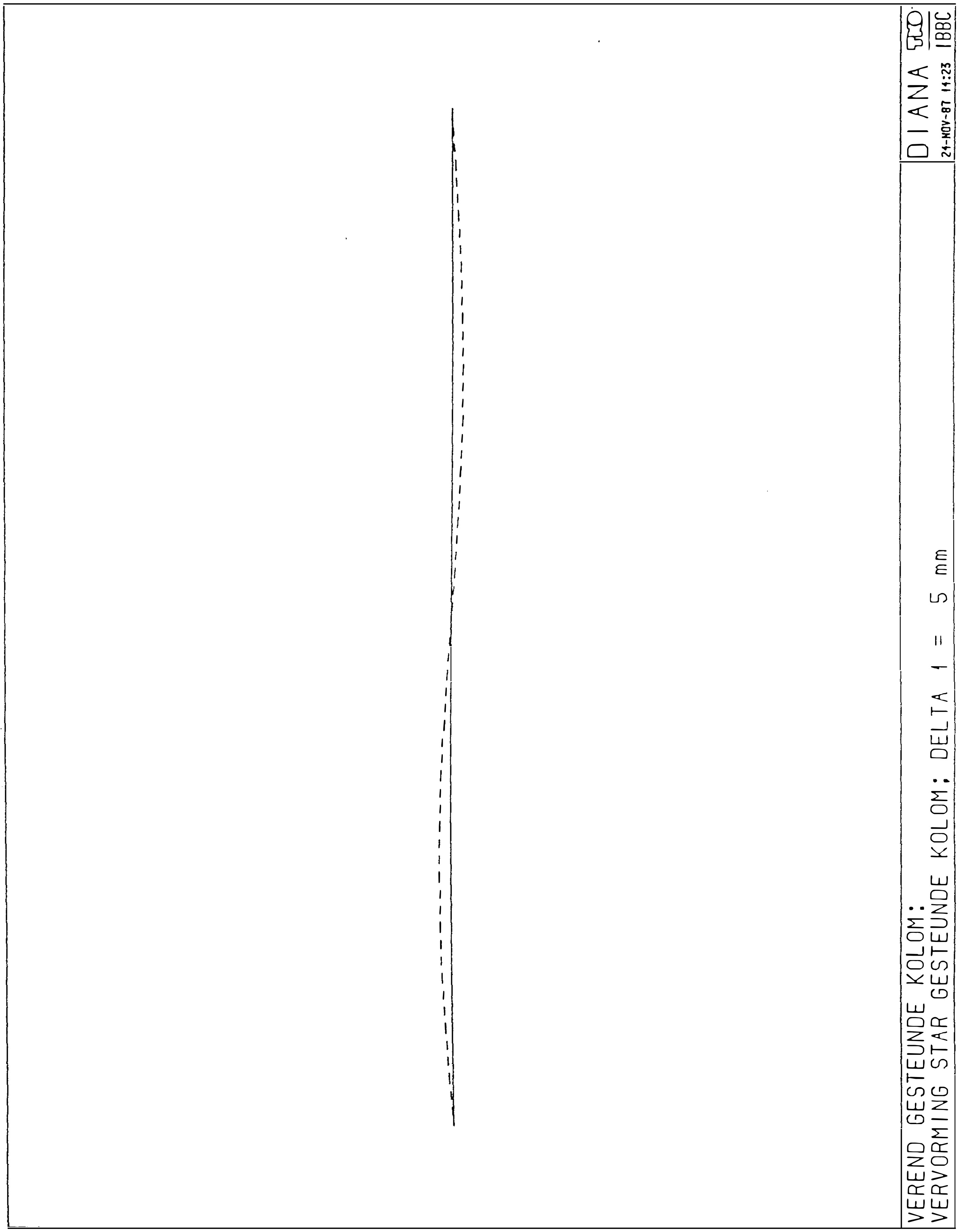
Tabel 2.2.2. :

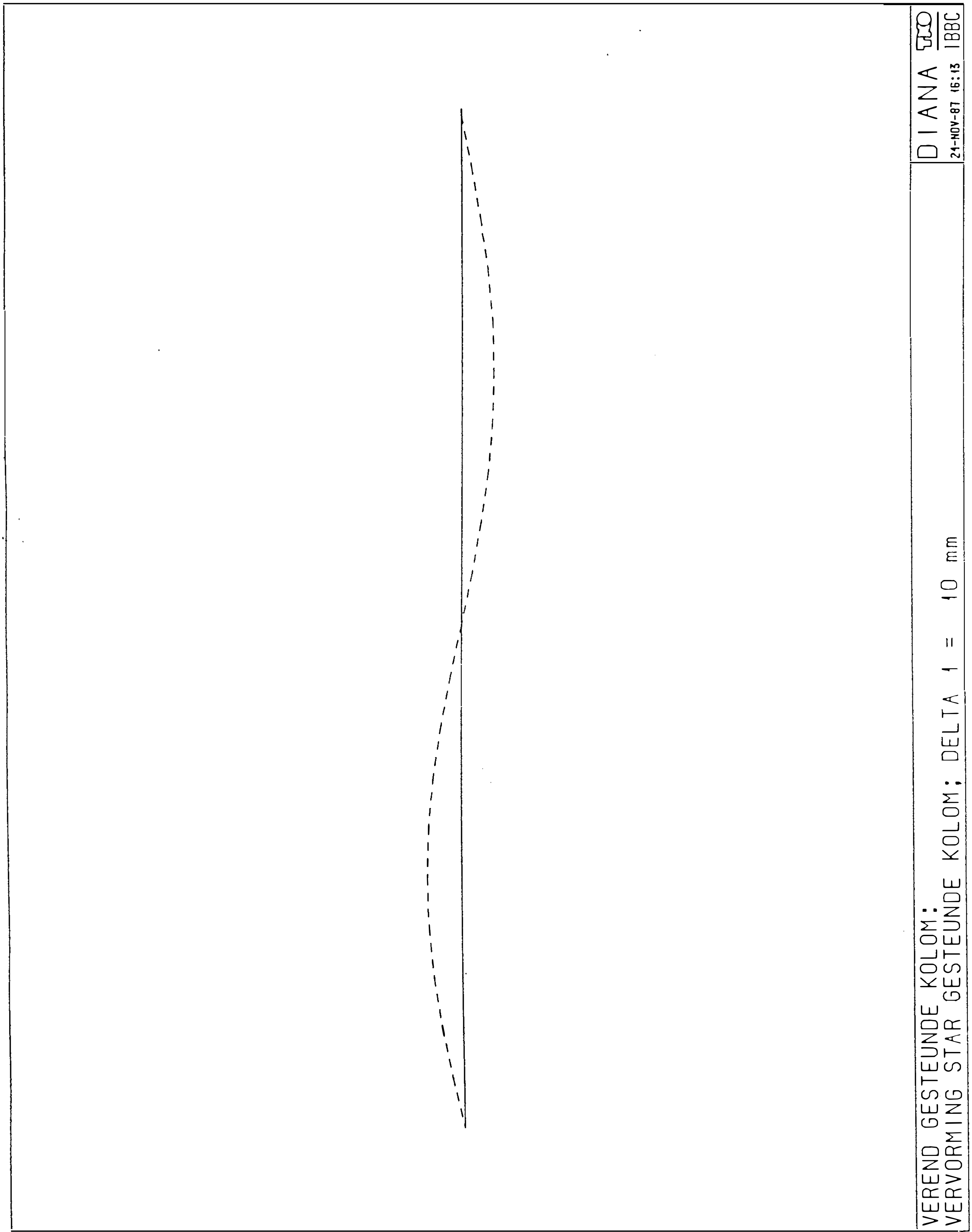


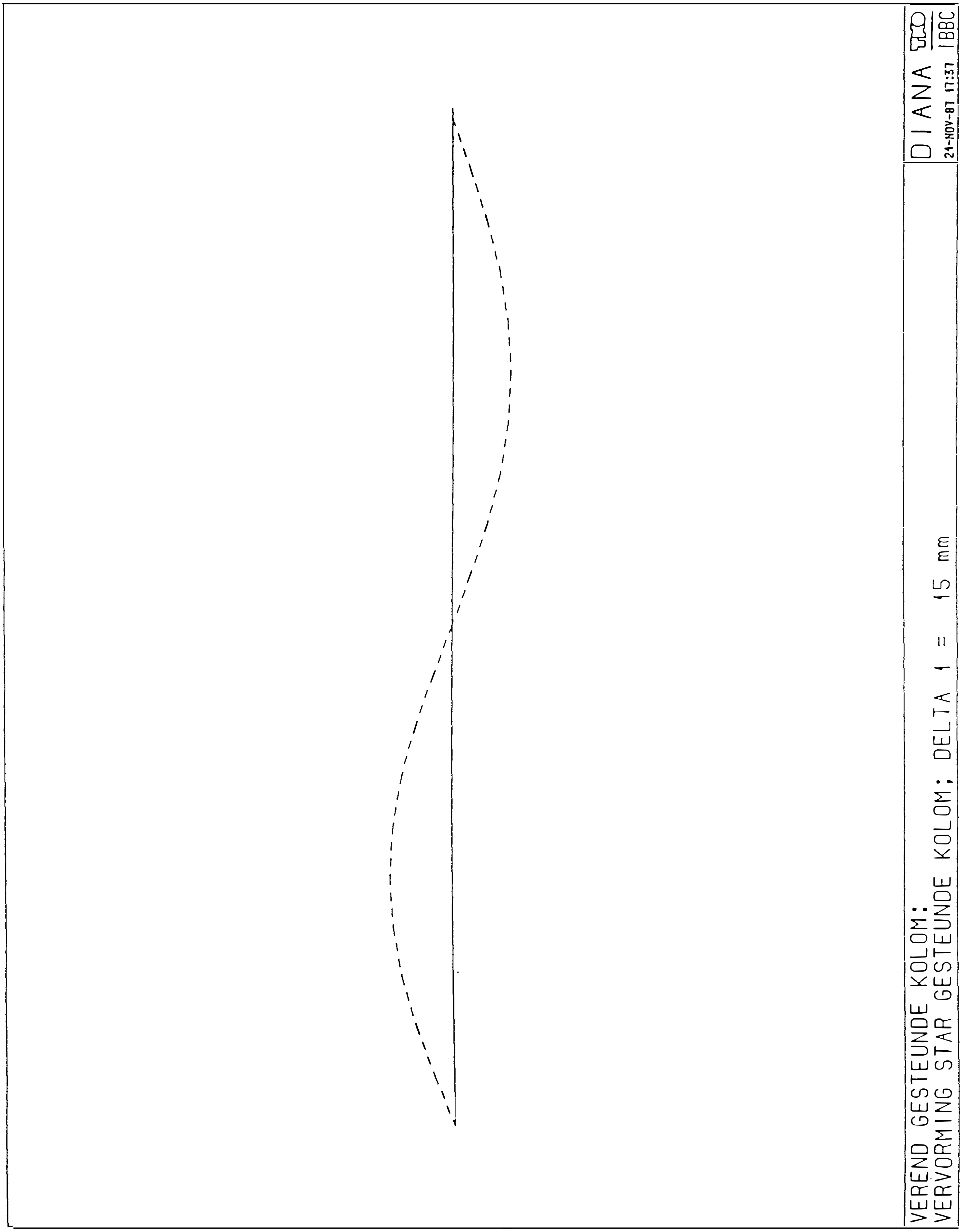
-Geg: -Star gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- $w(x) = 30.86 \sin\frac{\pi x}{2a} + 30 \sin\frac{\pi x}{a}$

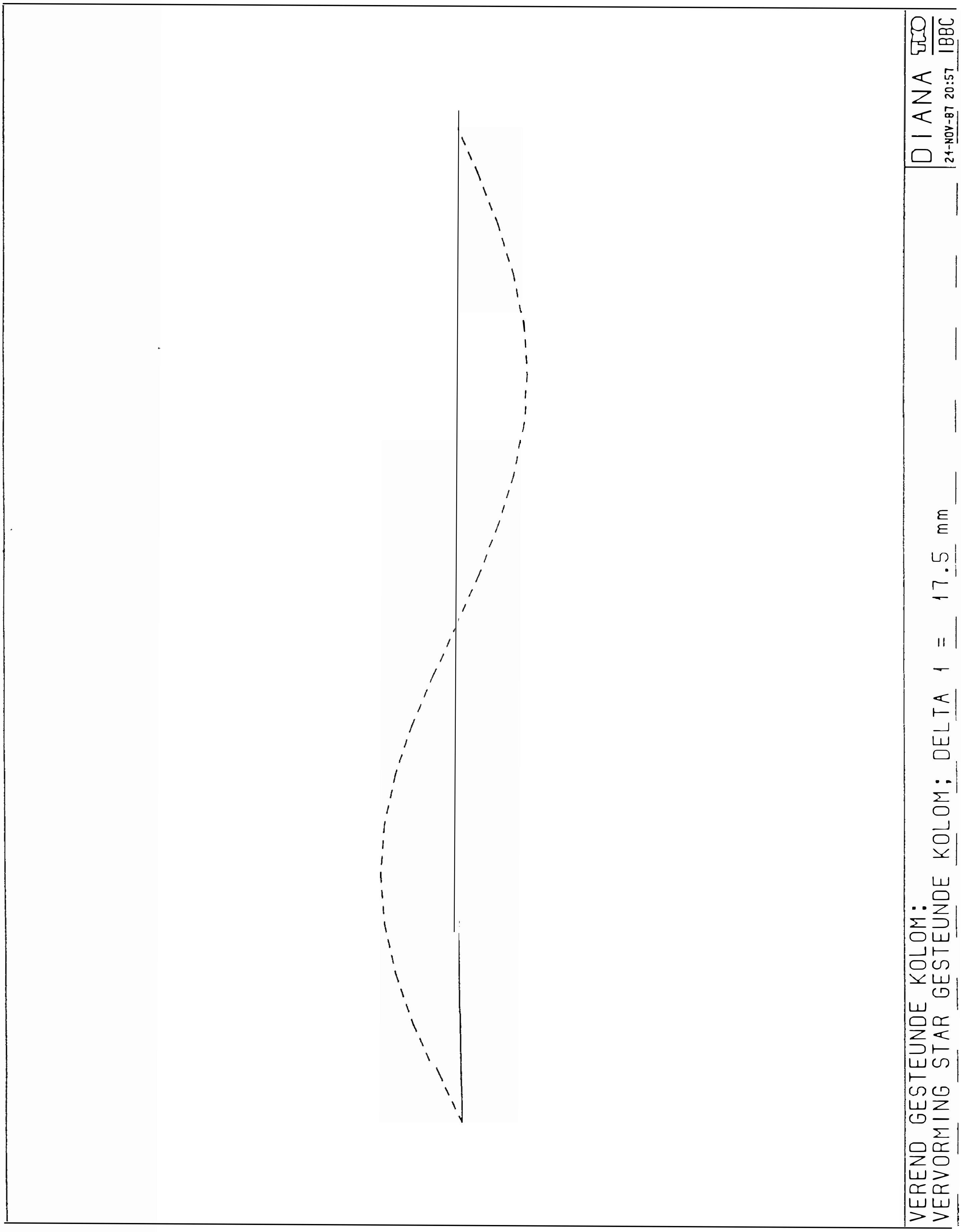
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
32.32	0.5	1.297	1.107	0.2037
64.40	1.0	2.686	2.301	0.4068
127.6	2.0	5.780	4.988	1.020
219.5	3.5	11.36	9.920	1.402
306.2	5.0	18.34	16.21	1.971
432.4	7.5	33.69	30.40	2.817
527.2	10.0	53.25	48.94	3.471
579.8	12.0	70.34	65.37	3.845
607.2	13.5	83.26	77.81	4.052
626.4	15.0	95.91	89.89	4.220
631.7	16.0	104.3	97.78	4.302
633.1	16.5	108.5	101.6	4.337
634.5	17.0	112.5	105.4	4.371
635.2	17.5	116.5	109.0	4.404
635.3	18.0	120.4	112.6	44.438
634.6	18.5	124.4	116.0	4.476

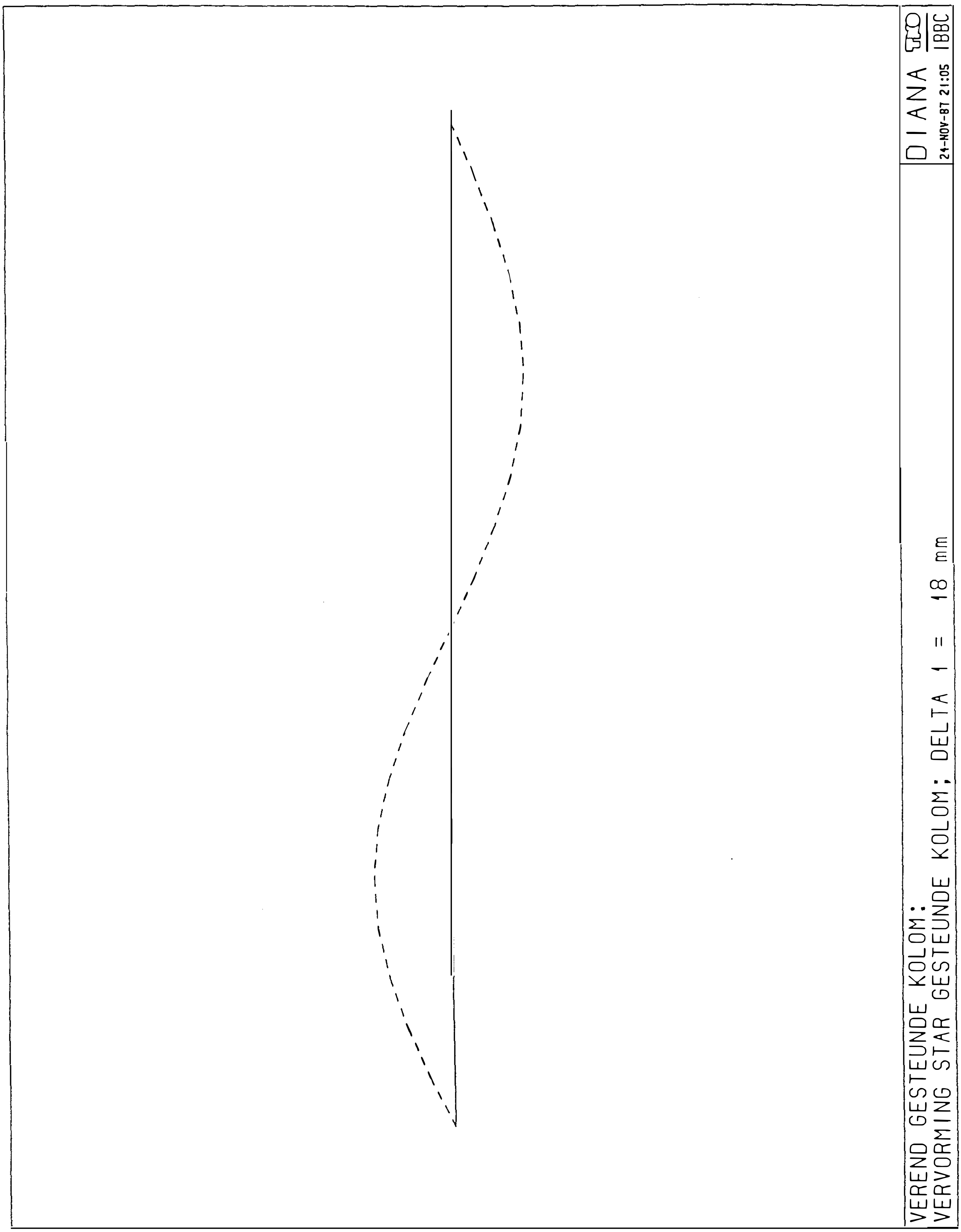
F_{DMAX} = 635.35 kN bij δ_1 = 17.82 mm.


DIANA
24-NOV-87 14:23
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING STAR GESTEUNDE KOLOM; DELTA 1 = 5 mm


DIANA
21-NOV-87 16:13
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING STAR GESTEUNDE KOLOM; DELTA 1 = 10 mm

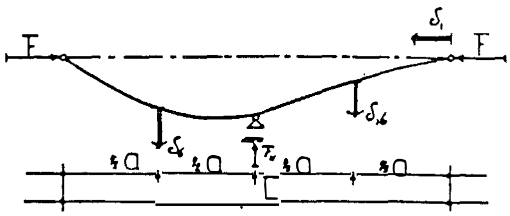

DIANA
24-NOV-87 17:37
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING STAR GESTEUNDE KOLOM; DELTA 1 = 15 mm


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING STAR GESTEUNDE KOLOM; DELTA 1 = 17.5 mm
DIANA
24-NOV-87 20:57
IBBC


DIANA
24-NOV-87 21:05
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING STAR GESTEUNDE KOLOM; DELTA 1 = 18 mm

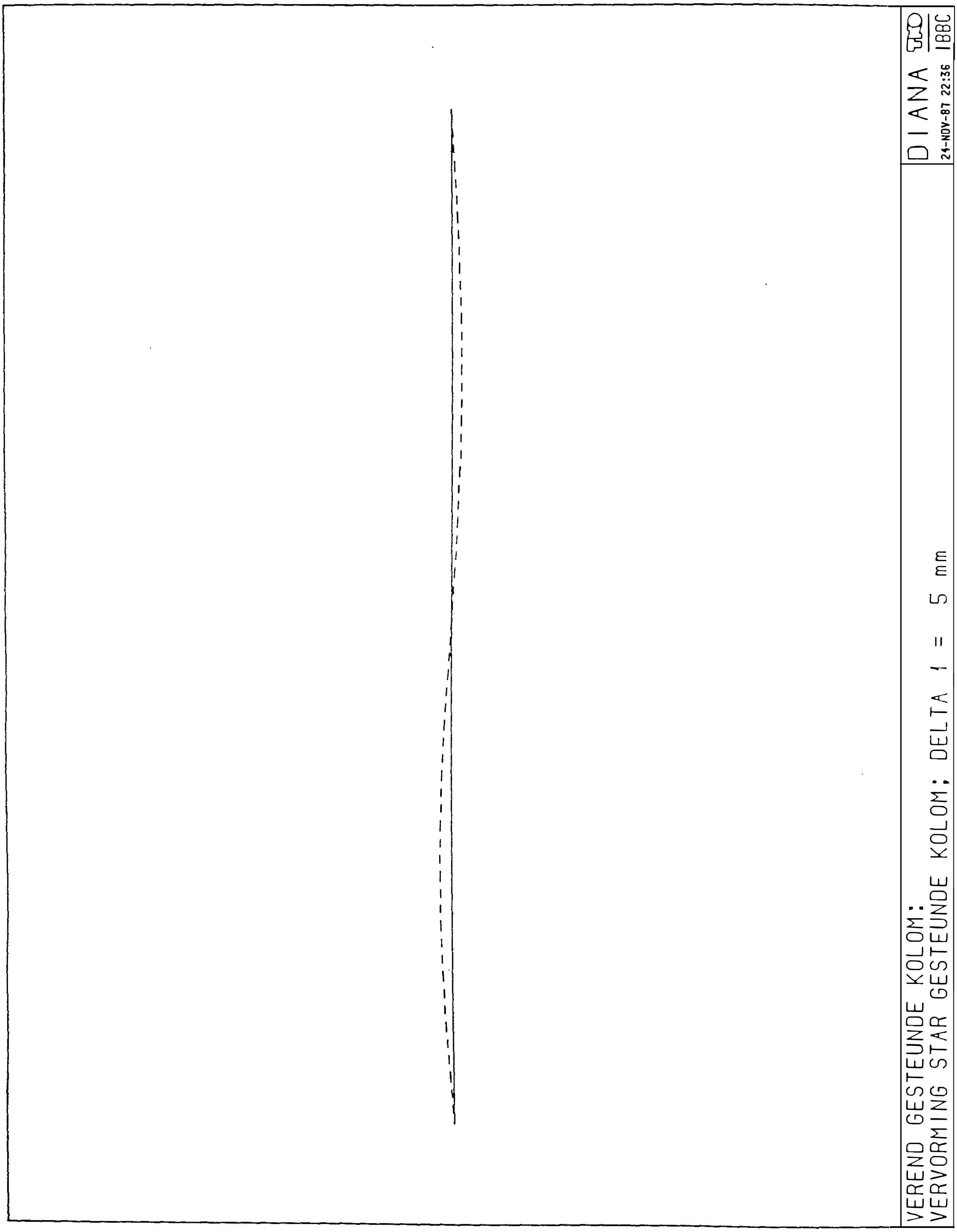
Tabel 2.2.3. :

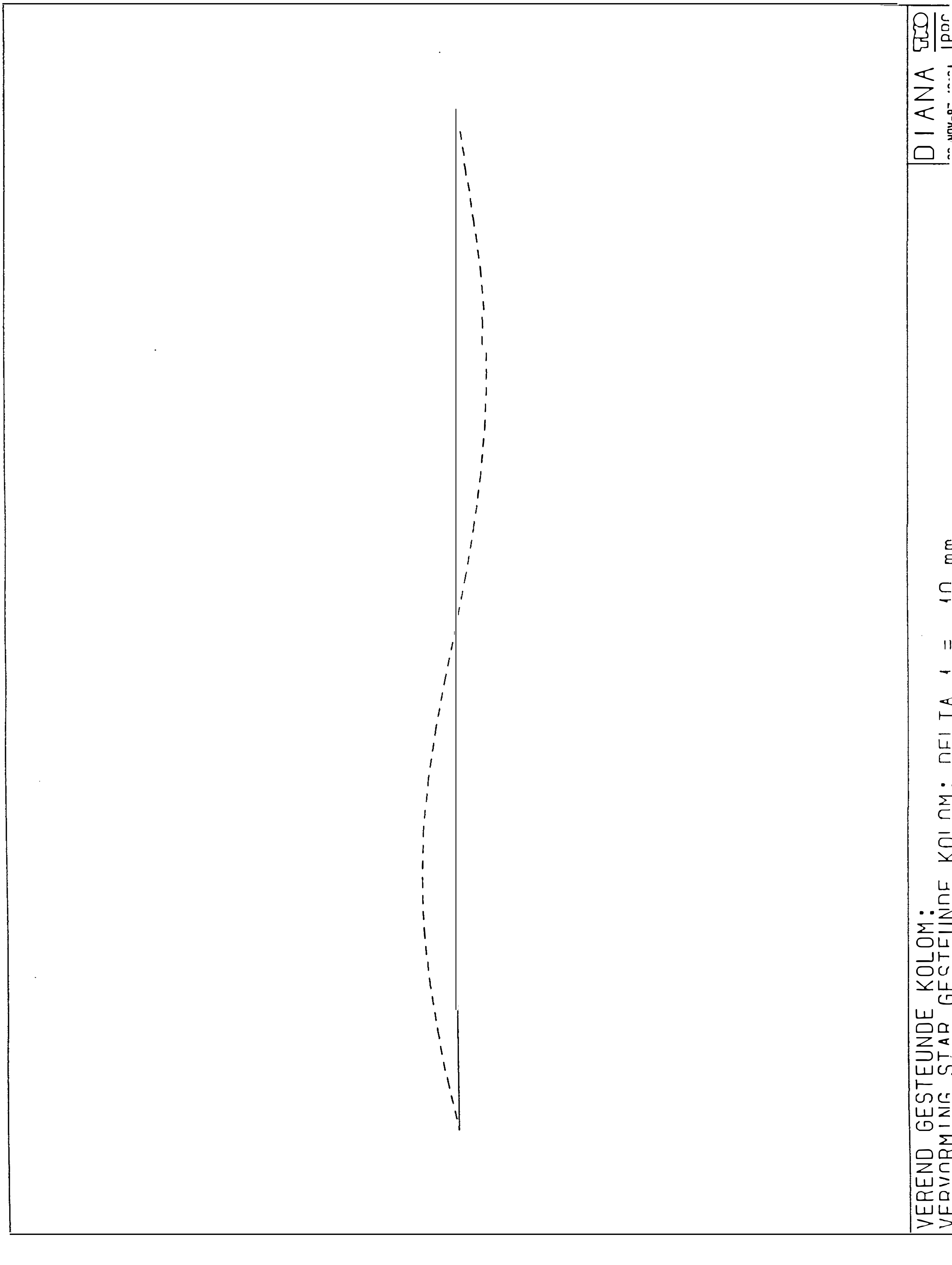
-Geg: -Star gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- $w(x) = 30.86 \sin\frac{\pi x}{2a} + 28.38 \sin\frac{\pi x}{a}$

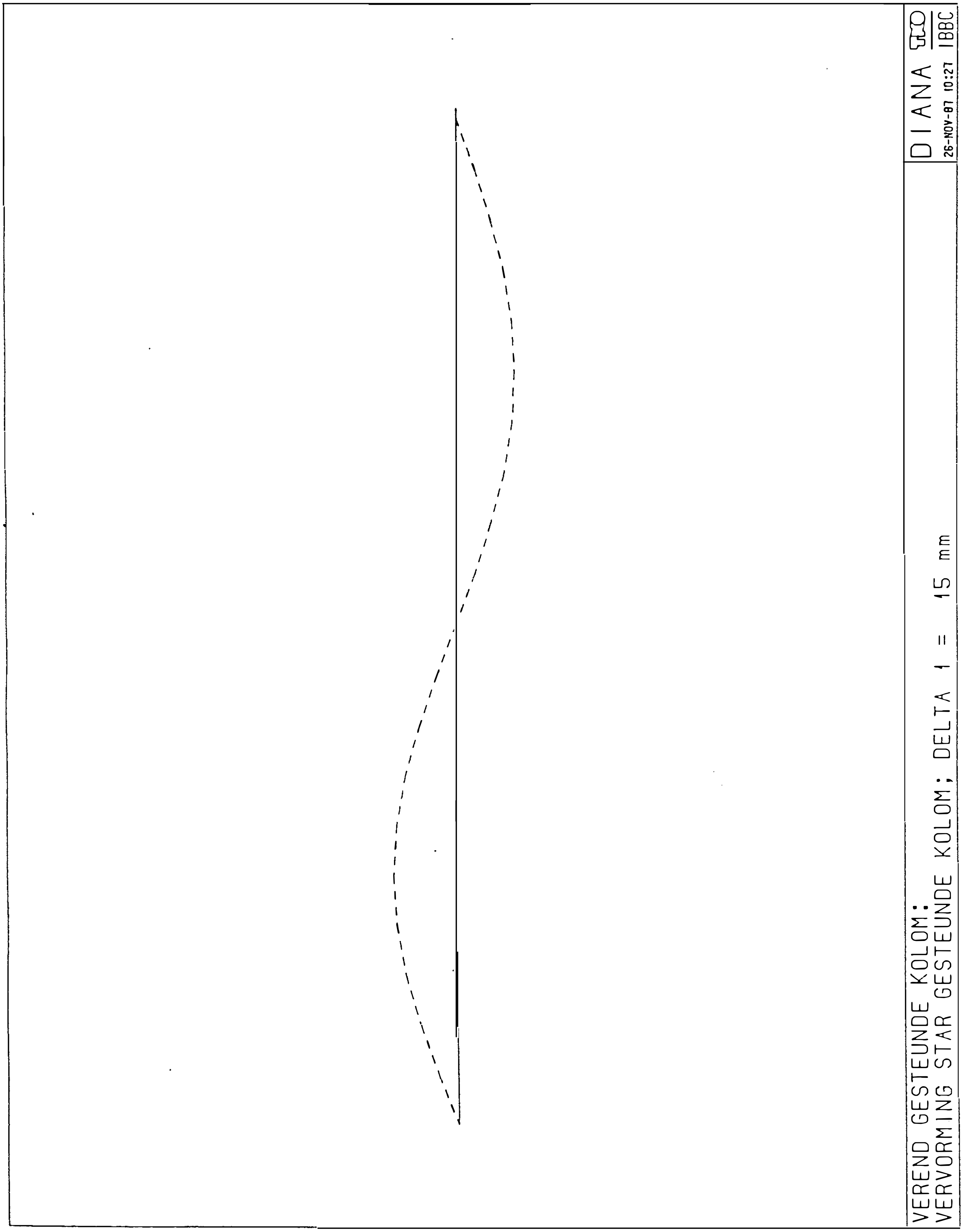


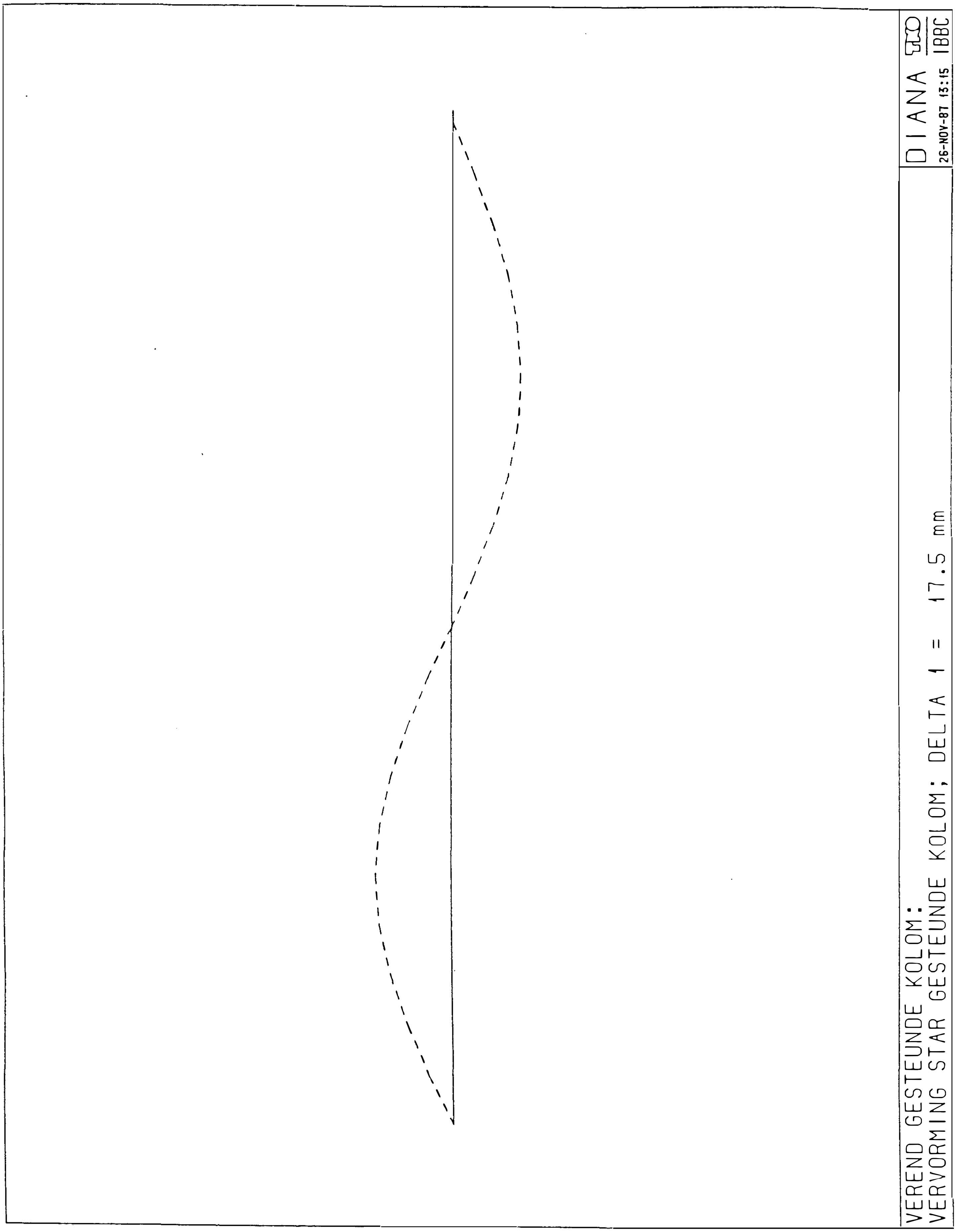
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_8 [mm]	δ_{18} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
32.53	0.5	1.240	-1.049	0.205
64.83	1.0	2.570	-2.182	0.4059
128.6	2.0	5.538	-4.739	0.816
221.5	3.5	10.92	-9.461	1.415
309.4	5.0	17.70	-15.54	1.992
438.3	7.5	32.85	-29.51	2.857
535.1	10.0	52.57	-48.16	3.526
588.4	12.0	69.96	-64.87	3.906
615.7	13.5	83.13	-77.56	4.114
634.3	15.0	96.05	-89.84	4.283
639.2	16.0	104.6	-97.88	4.361
640.1	16.5	108.8	-101.8	4.397
641.2	17.0	112.9	-105.6	4.428
641.6	17.5	117.0	-109.3	4.462
641.3	18.0	121.0	-112.9	4.498

F_{DMAX} = 641.60 kN bij δ_1 = 17.54 mm.


DIANA
24-NOV-87 22:36
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING STAR GESTEUNDE KOLOM; DELTA 1 = 5 mm

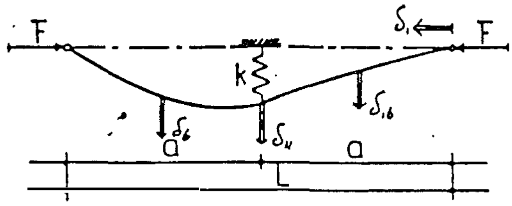

DIANA
VEREND GESTEUNDE KOLOM:


DIANA
26-NOV-87 10:27
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING STAR GESTEUNDE KOLOM; DELTA 1 = 15 mm


DIANA
26-NOV-87 13:15
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING STAR GESTEUNDE KOLOM; DELTA 1 = 17.5 mm

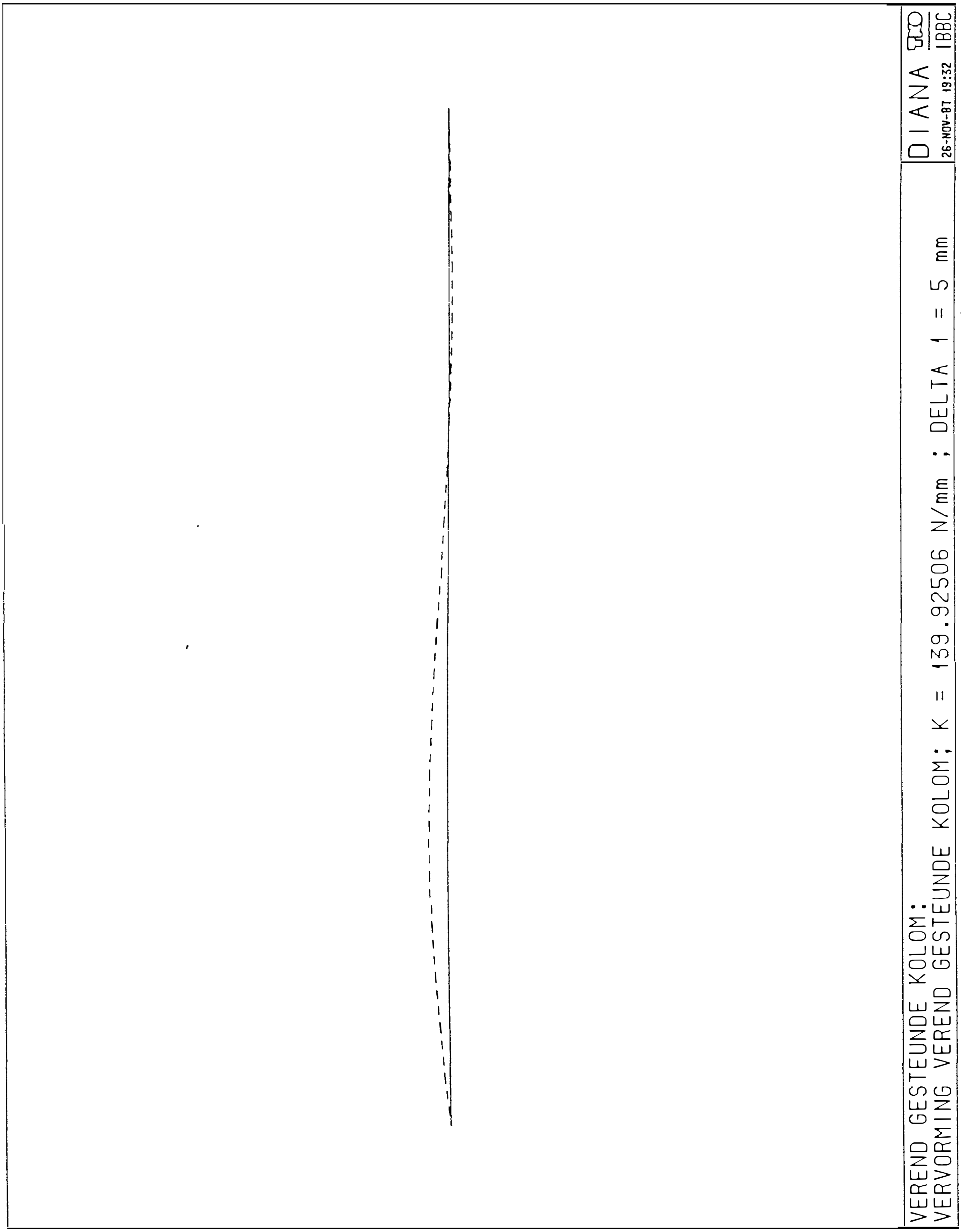
Tabel 2.3.1. :

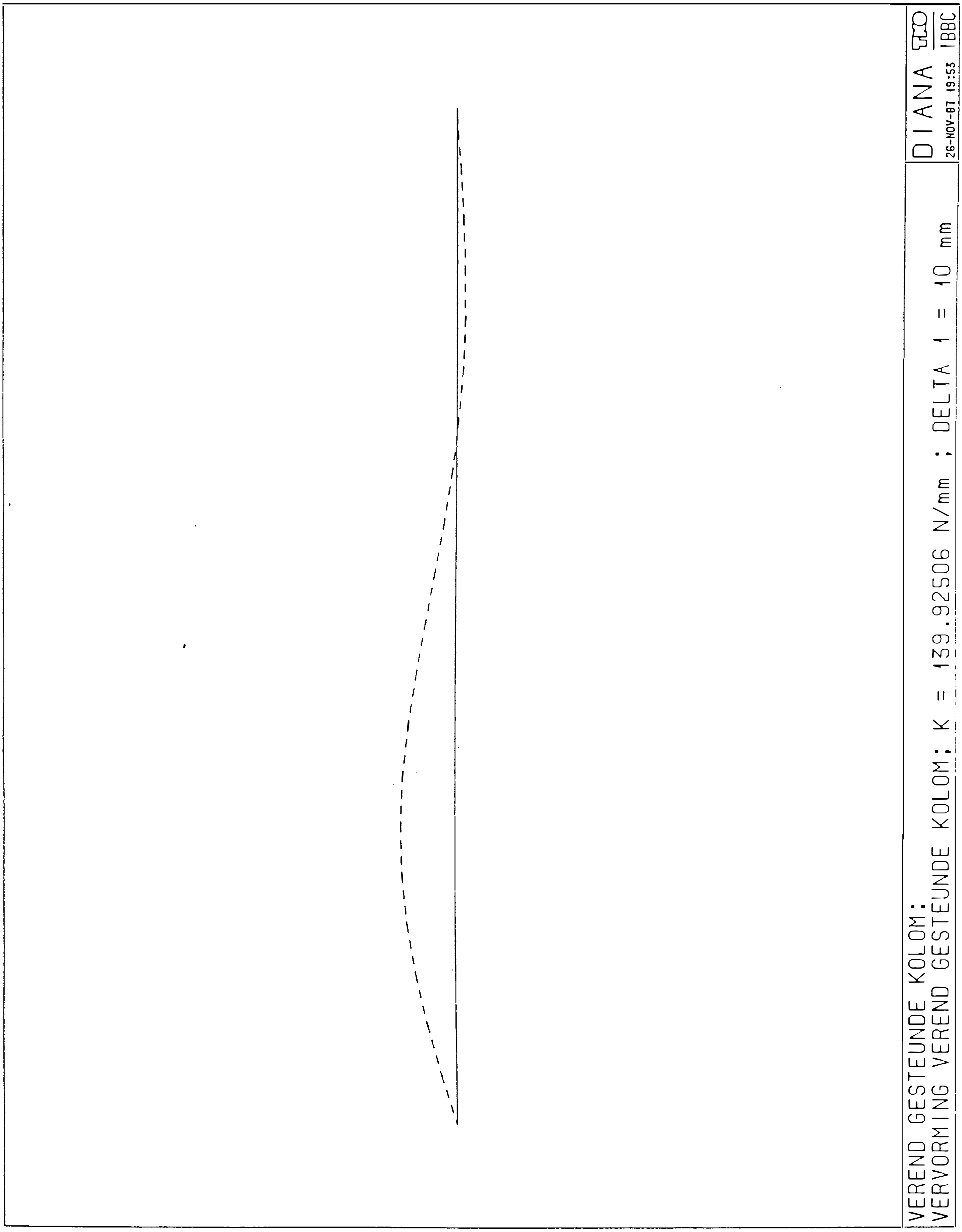
-Geg: -Verend gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- k = 139.925 N/mm.
- $w(x) = 30.86 \sin\frac{\pi x}{2a} + 28.38 \sin\frac{\pi x}{a}$

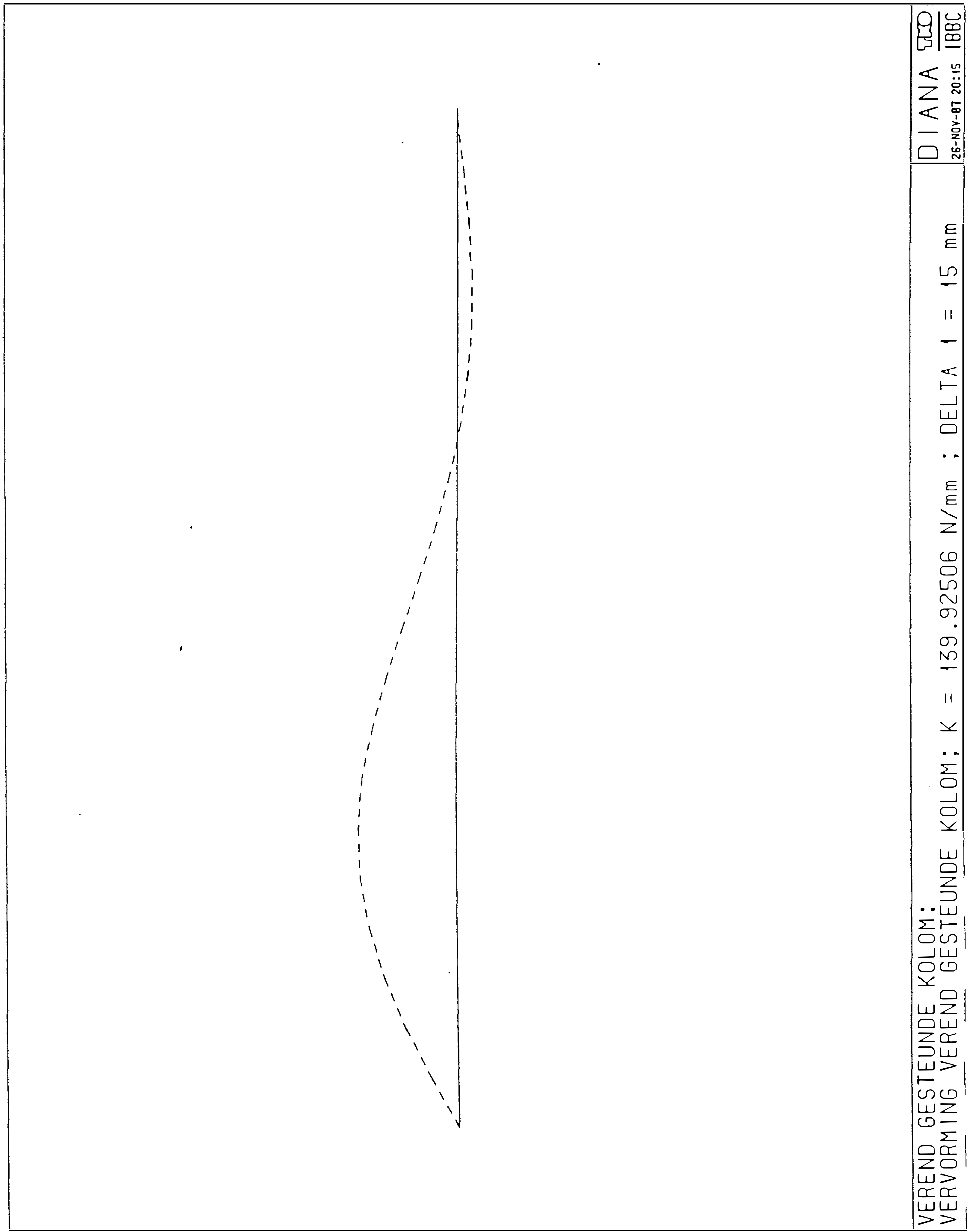


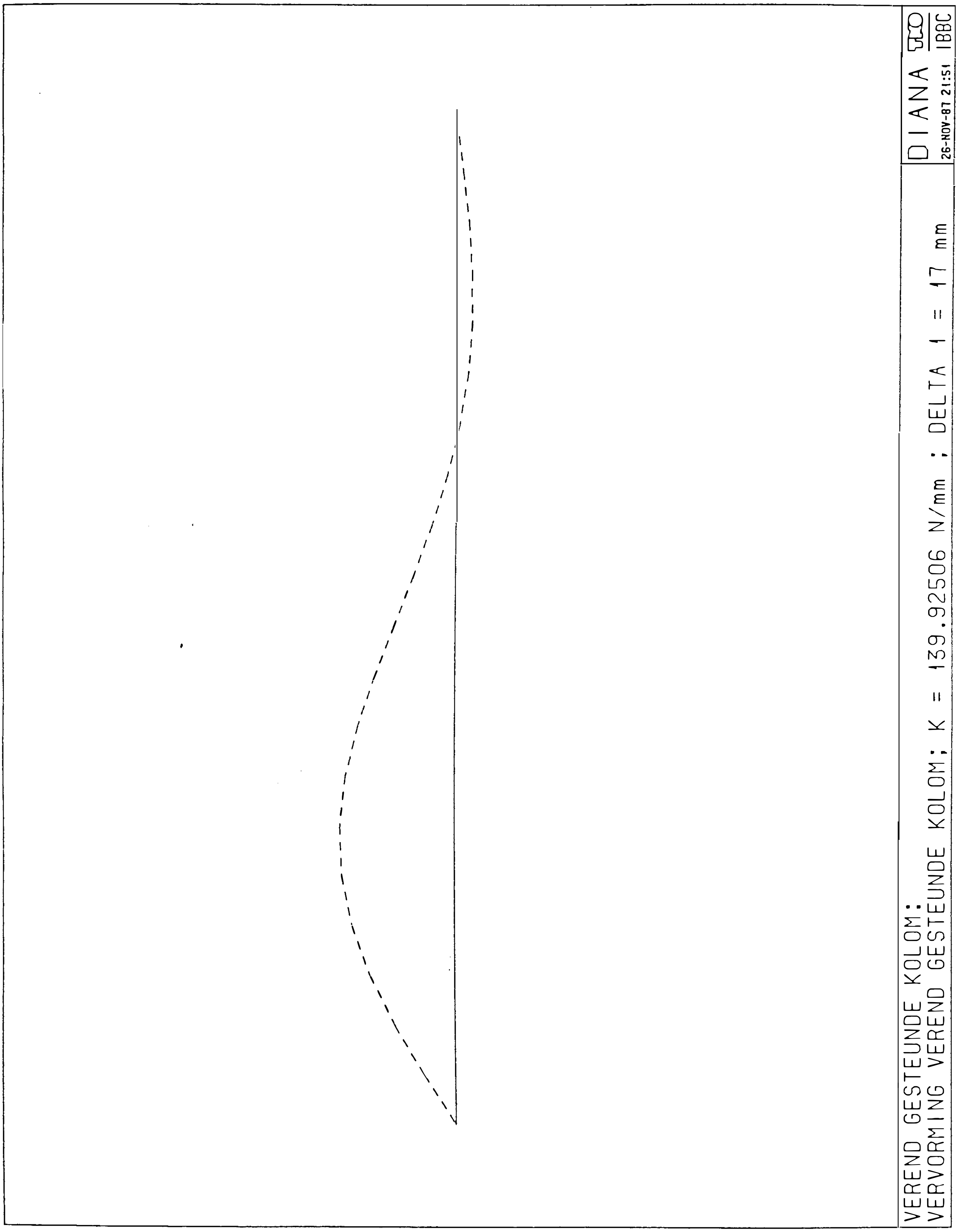
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
32.05	0.5	2.013	-2.403	0.1606
63.82	1.0	4.175	-0.4976	0.3327
95.27	1.5	6.498	-0.7732	0.5172
157.0	2.5	11.69	-1.386	0.9283
216.9	3.5	17.72	-2.093	1.403
301.9	5.0	28.60	-3.359	2.257
378.9	6.5	42.00	-4.901	3.301
445.7	8.0	57.93	-6.716	4.537
516.8	10.0	82.23	-9.452	6.416
568.2	12.0	108.3	-12.32	8.417
595.4	13.5	128.0	-14.40	9.913
612.9	15.0	147.6	-16.25	11.35
618.3	16.0	160.6	-17.24	12.26
619.0	16.5	167.2	-17.66	12.69
619.4	17.0	173.6	-18.07	13.11
619.1	17.25	176.8	-18.26	13.31
618.6	17.5	180.0	-18.44	13.50

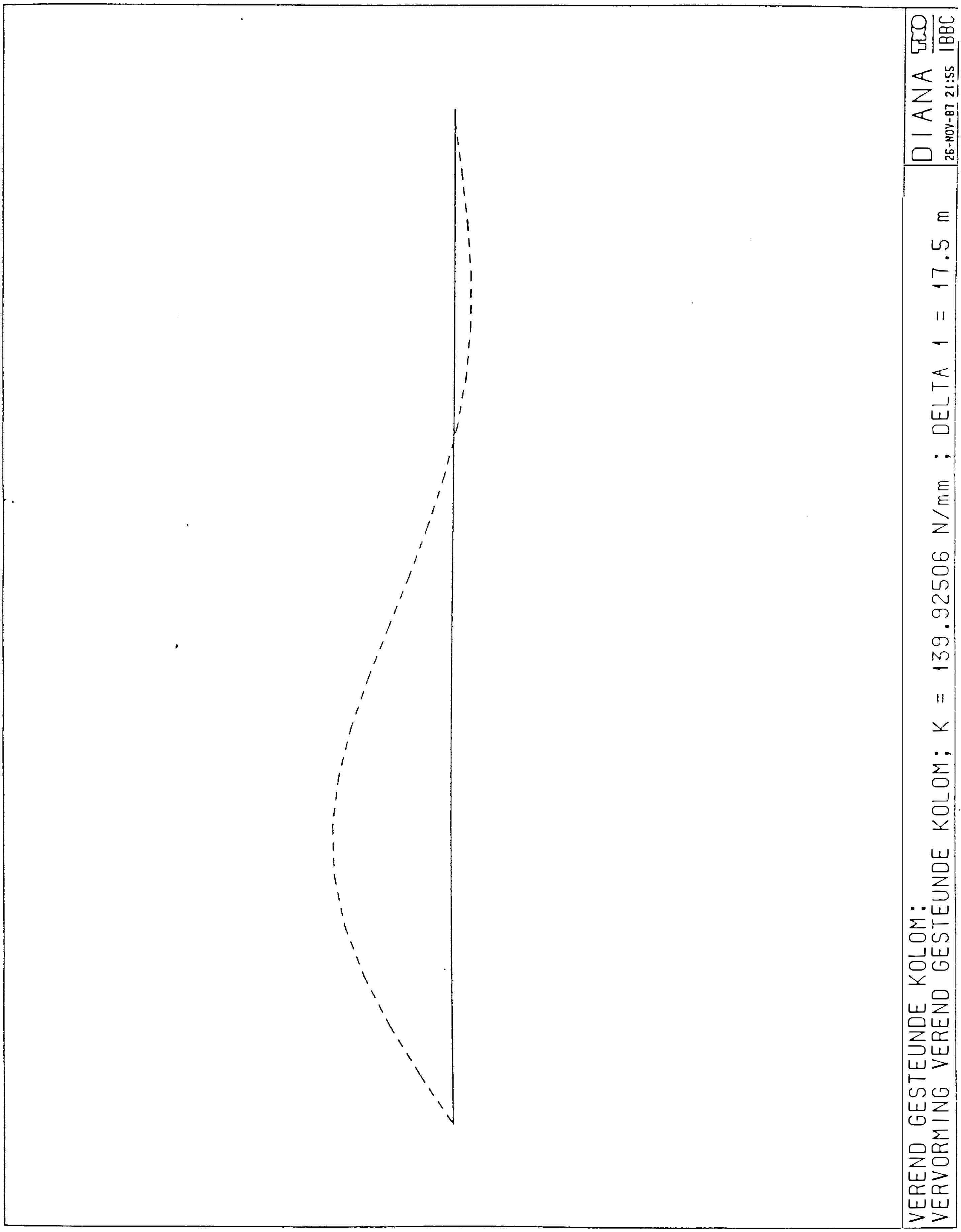
F_{DMAX} = 619.44 kN bij δ_1 = 16.87 mm.


DIANA
26-NOV-87 13:32
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 139.92506 N/mm ; DELTA 1 = 5 mm


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 139.92506 N/mm ; DELTA 1 = 10 mm
DIANA
26-NOV-87 19:53
IBBC

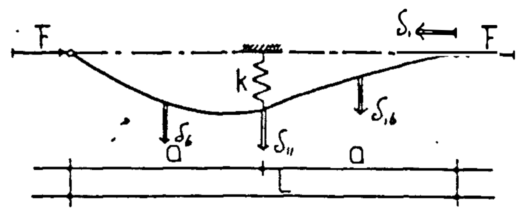

DIANA
26-NOV-87 20:15
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 139.92506 N/mm ; DELTA 1 = 15 mm


DIANA
26-NOV-87 21:51
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 139.92506 N/mm ; DELTA 1 = 17 mm


DIANA
26-NOV-87 21:55
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 139.92506 N/mm ; DELTA 1 = 17.5 m

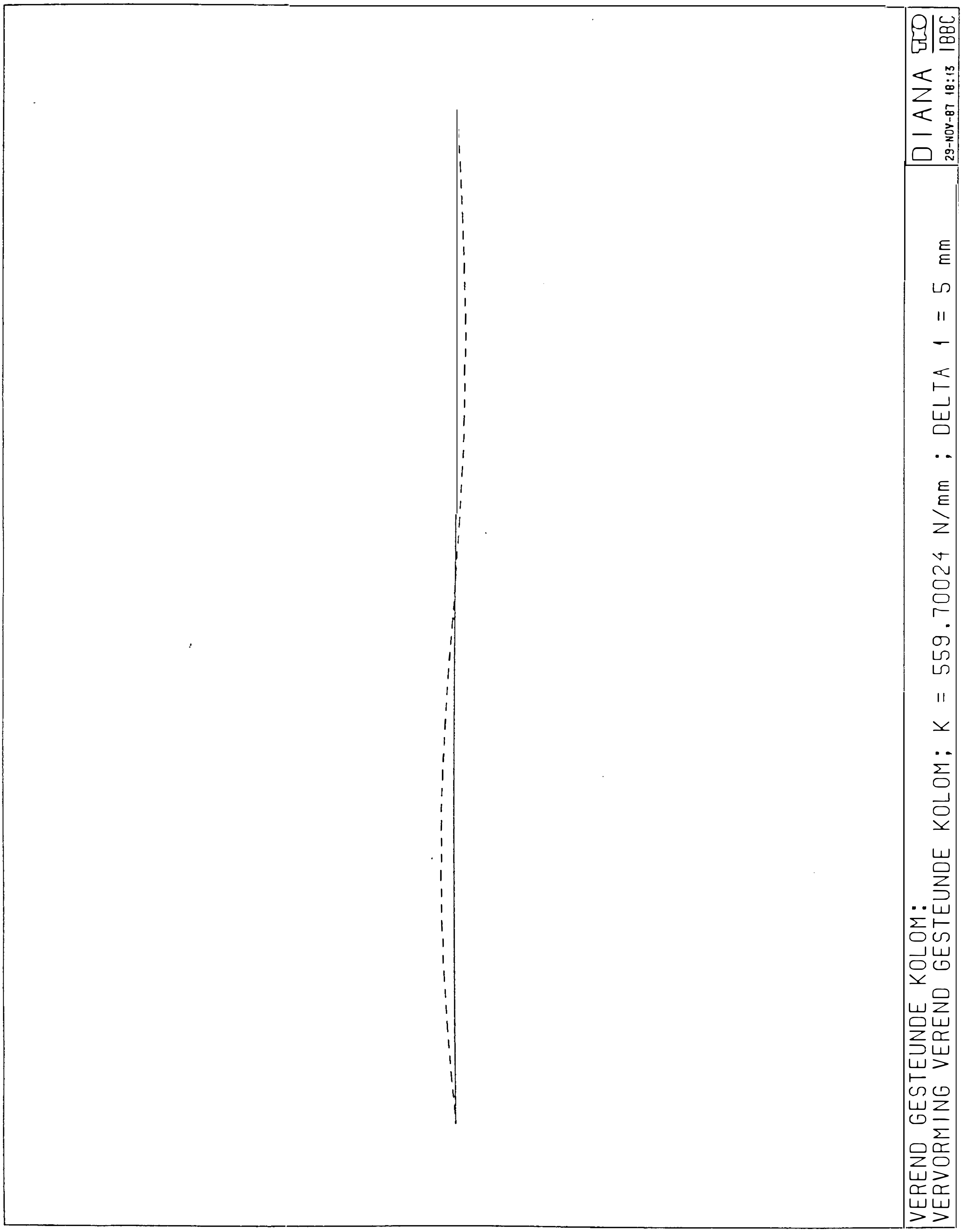
Tabel 2.3.2. :

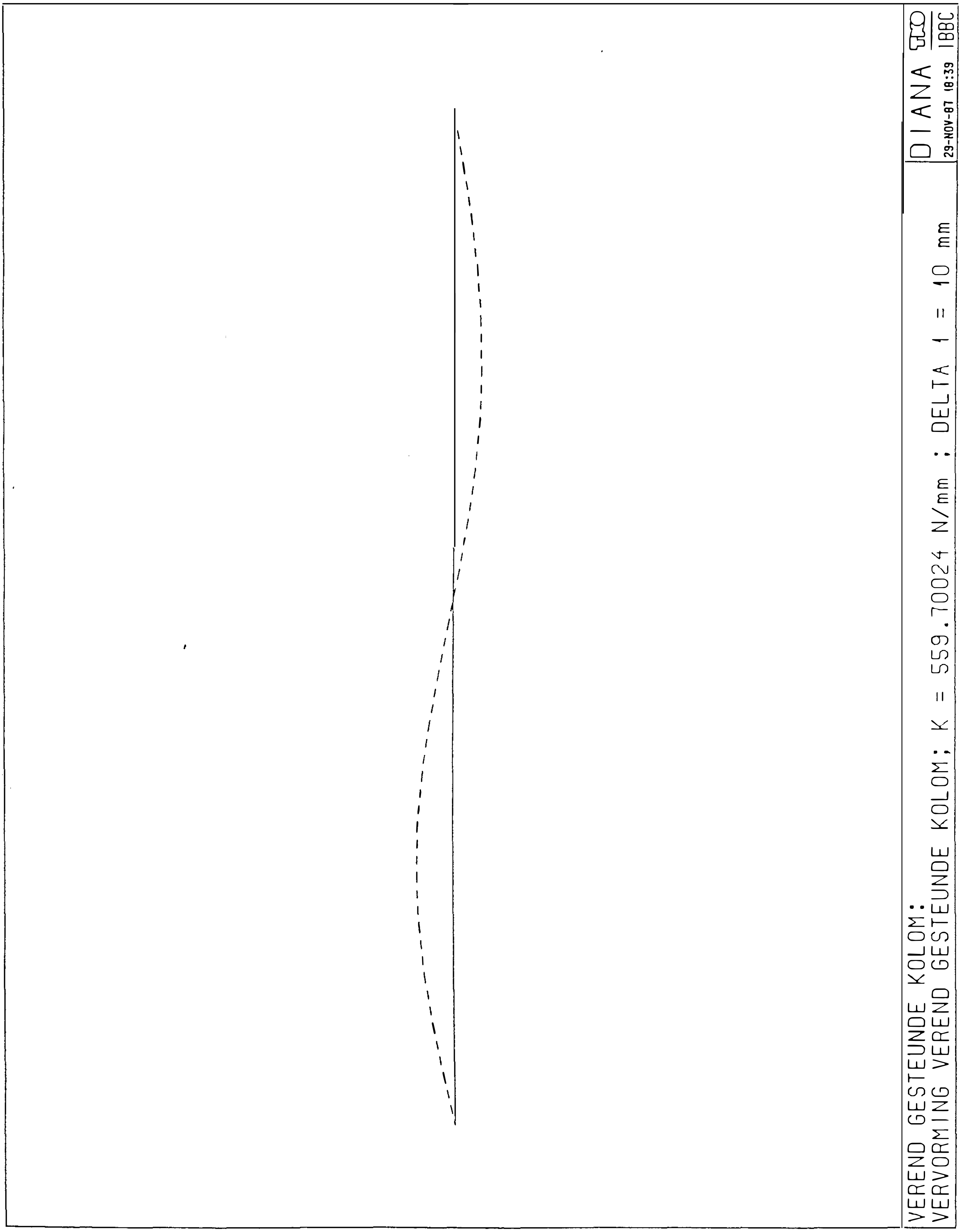
-Geg: -Verend gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- k = 559.7 N/mm.
- $w(x) = 30.86 \sin\frac{\pi x}{2a} + 28.38 \sin\frac{\pi x}{a}$

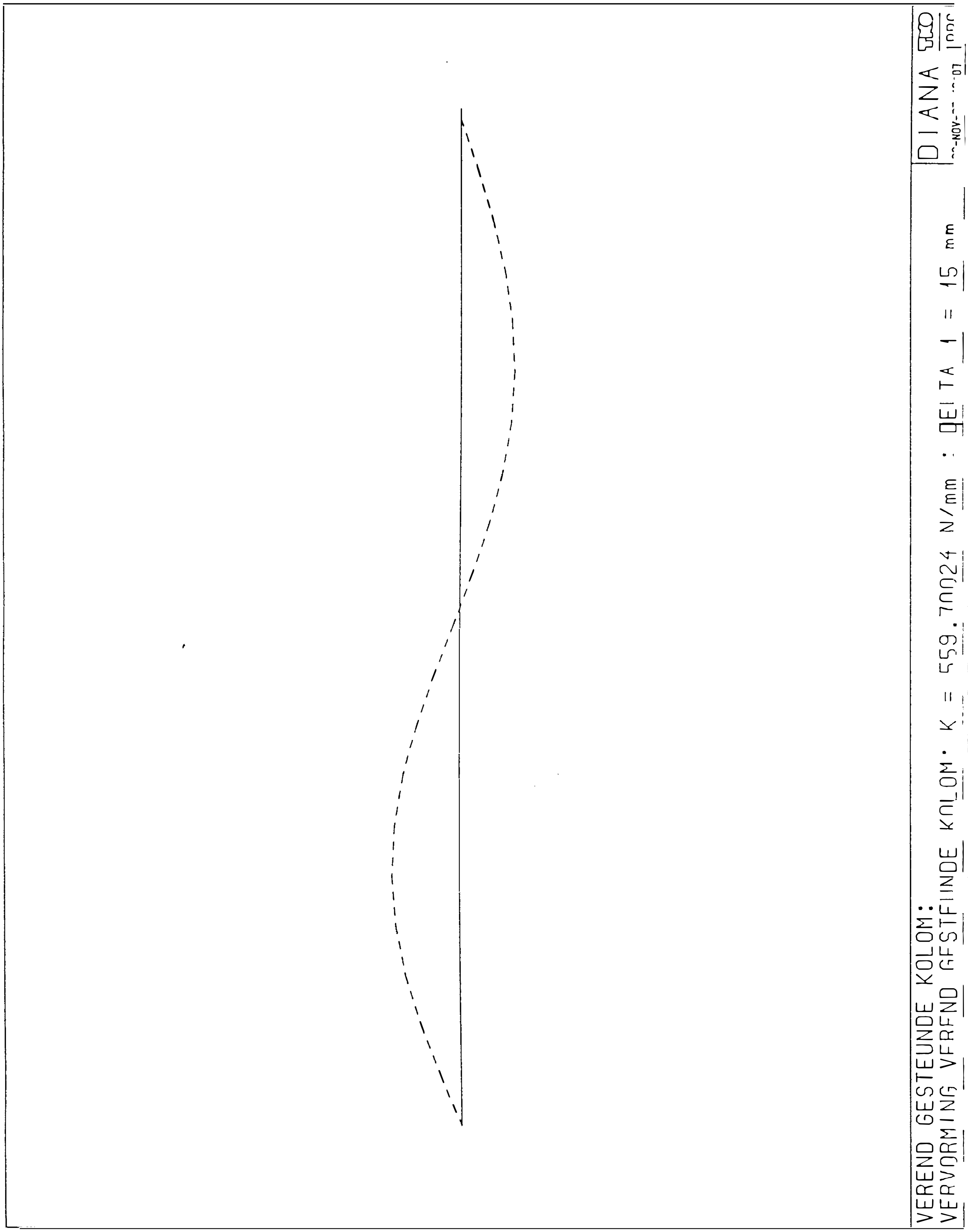


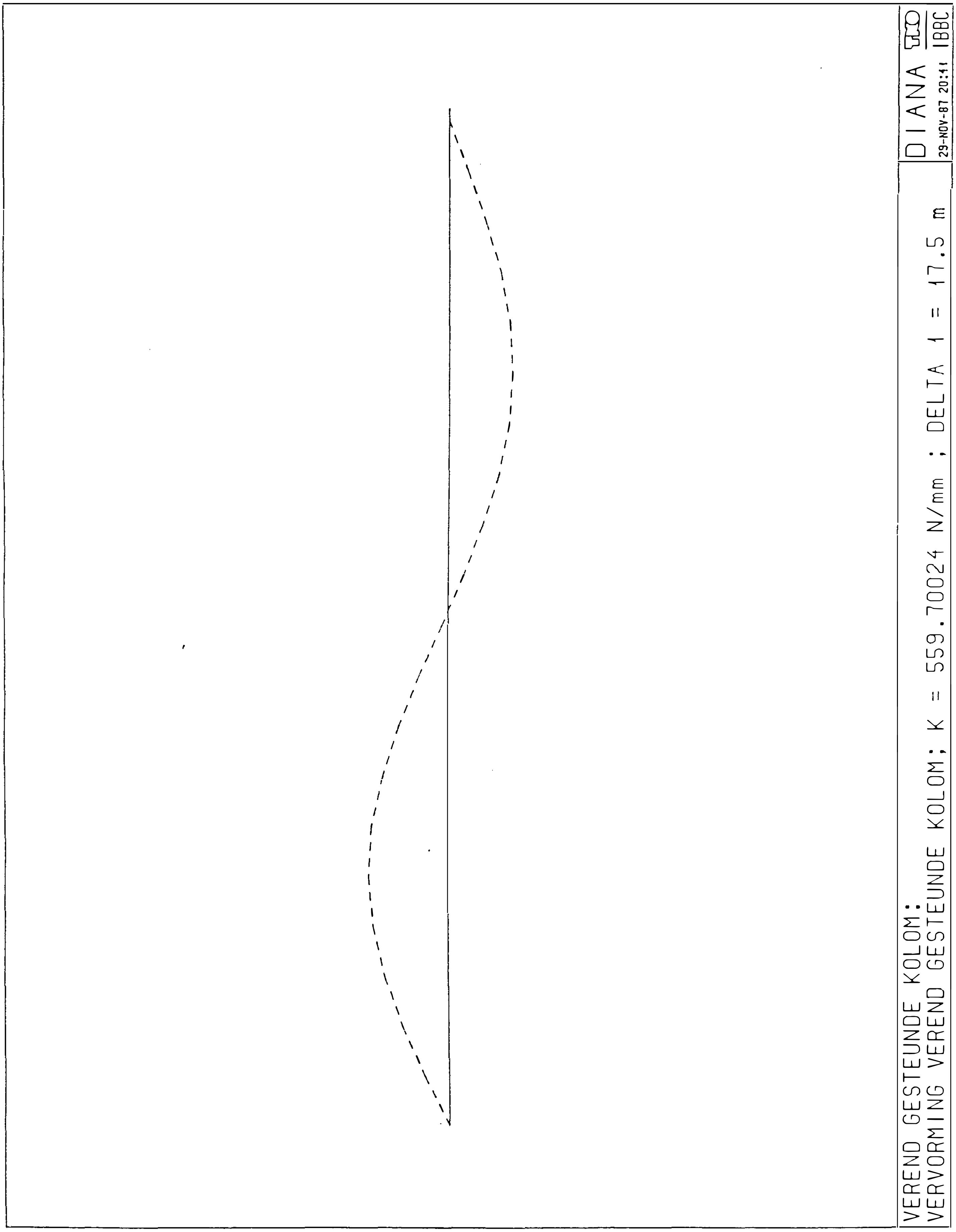
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
32.39	0.5	1.471	-0.8704	0.1918
64.54	1.0	3.037	-1.692	0.3873
96.43	1.5	4.709	-2.662	0.5864
159.3	2.5	8.404	-4.900	0.9947
220.4	3.5	12.64	-7.609	1.415
308.0	5.0	20.21	-12.78	2.059
388.3	6.5	29.48	-19.59	2.701
458.5	8.0	40.53	-28.24	3.309
533.3	10.0	57.48	-42.33	4.012
586.9	12.0	75.59	-58.12	4.560
614.5	13.5	89.23	-70.23	4.881
627.3	14.5	98.28	-78.13	5.067
631.3	15.0	102.8	-81.99	5.159
634.7	15.5	107.3	-85.85	5.232
637.4	16.0	111.6	-89.63	5.302
638.2	16.25	113.8	-91.49	5.335
639.1	16.50	116.0	-93.34	5.368
639.7	16.75	118.1	-95.16	5.401
640.2	17.00	120.2	-96.95	5.432
640.2	17.10	121.1	-97.66	5.445
640.3	17.20	121.9	-98.37	5.459
640.4	17.30	122.8	-99.06	5.473
640.4	17.40	123.6	-99.75	5.487
640.4	17.50	124.5	-100.4	5.502
640.4	17.60	125.4	-101.1	5.516
640.3	17.70	126.2	-101.8	5.531

F_{DMAX} = 640.40 kN bij δ_1 = 17.45 mm.


DIANA
29-NOV-87 18:13
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 559.70024 N/mm ; DELTA 1 = 5 mm

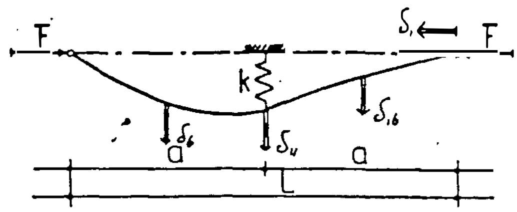

DIANA
IBBC
29-NOV-87 18:39
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 559.70024 N/mm ; DELTA 1 = 10 mm


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM. K = 559.70024 N/mm : DELTA 1 = 15 mm
DIANA


DIANA
29-NOV-87 20:11
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 559.70024 N/mm ; DELTA 1 = 17.5 m

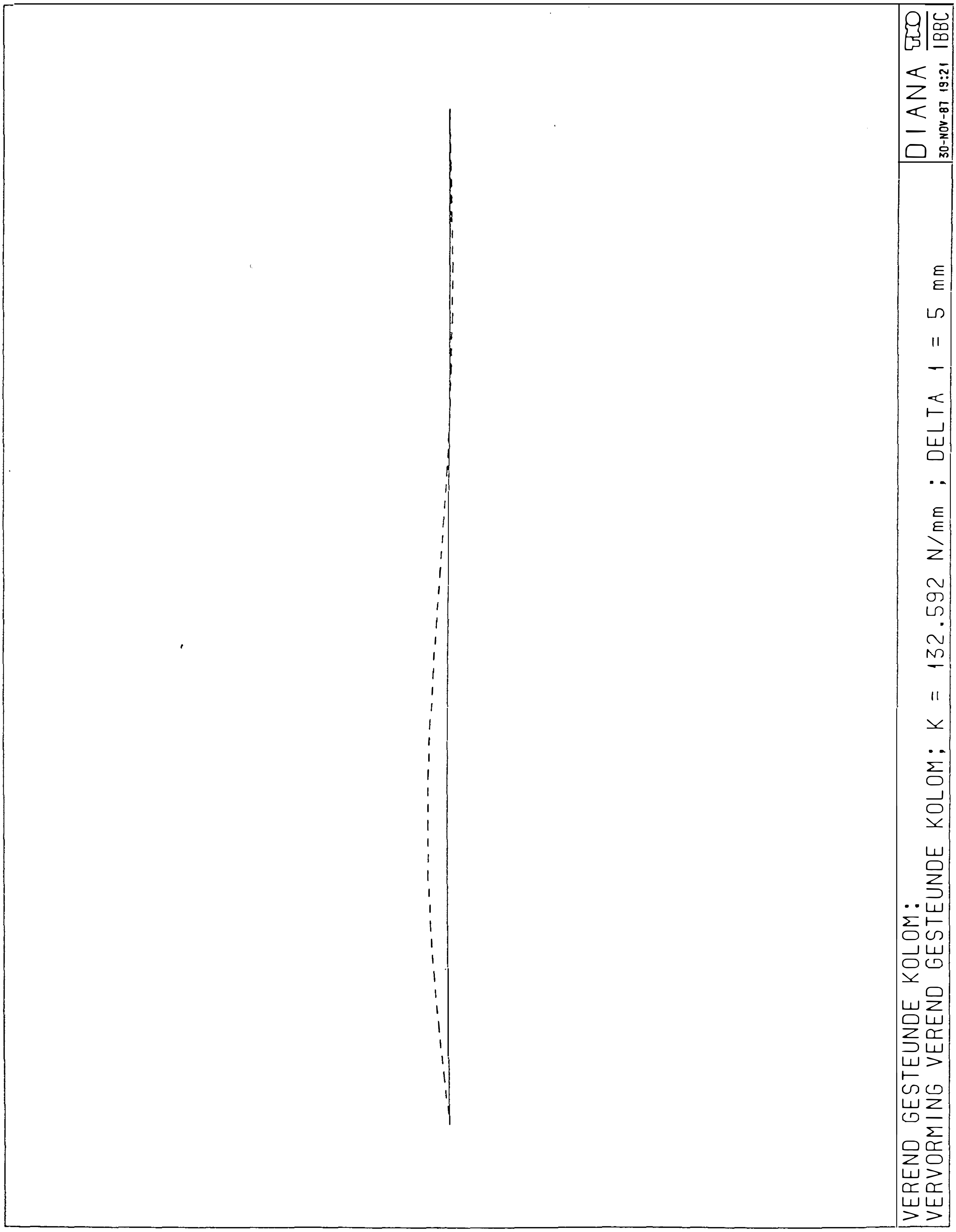
Tabel 2.3.3. :

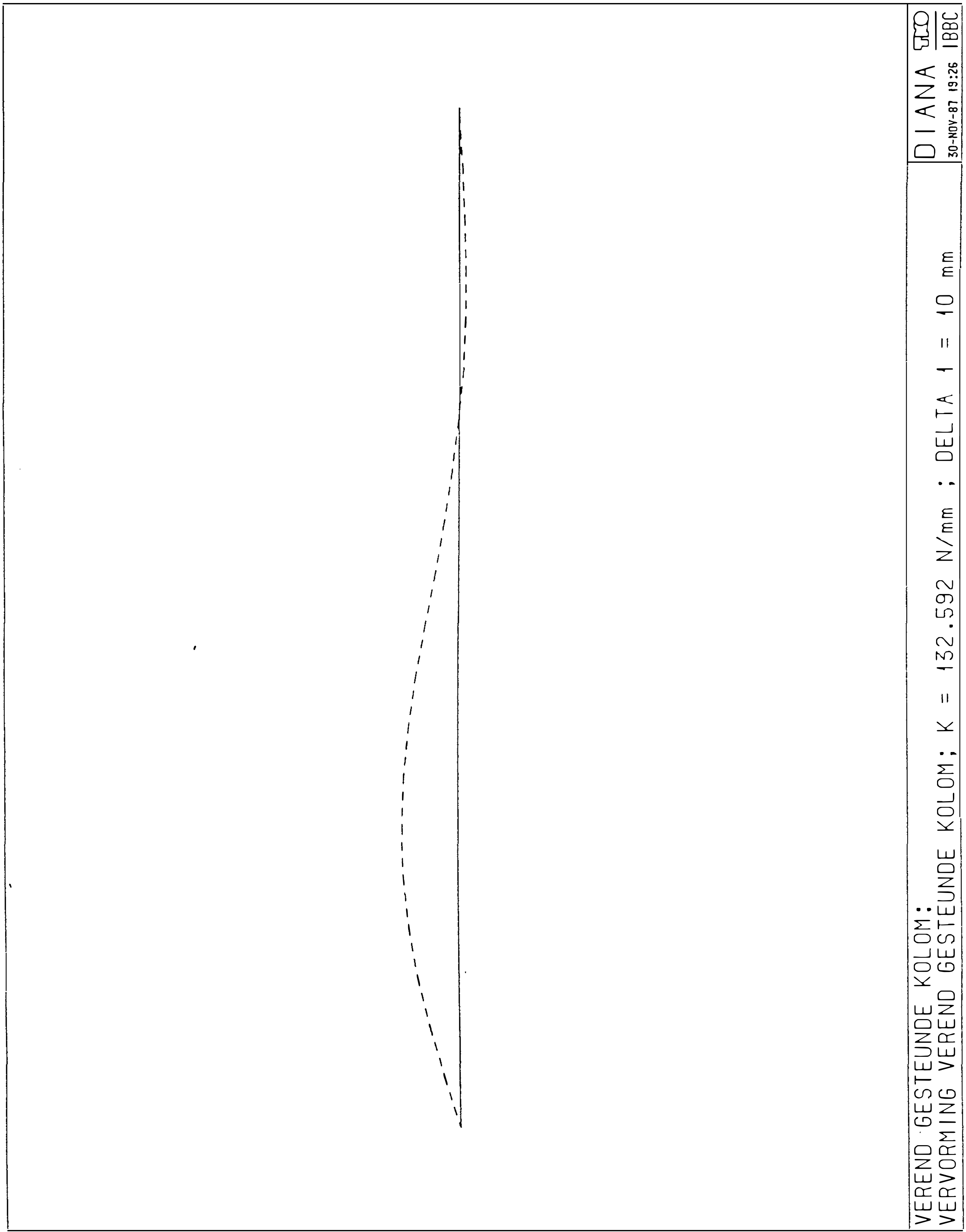
-Geg: -Verend gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- k = 132.592 N/mm.
- $w(x) = 30.86 \sin \frac{\pi x}{2a} + 28.38 \sin \frac{\pi x}{a}$

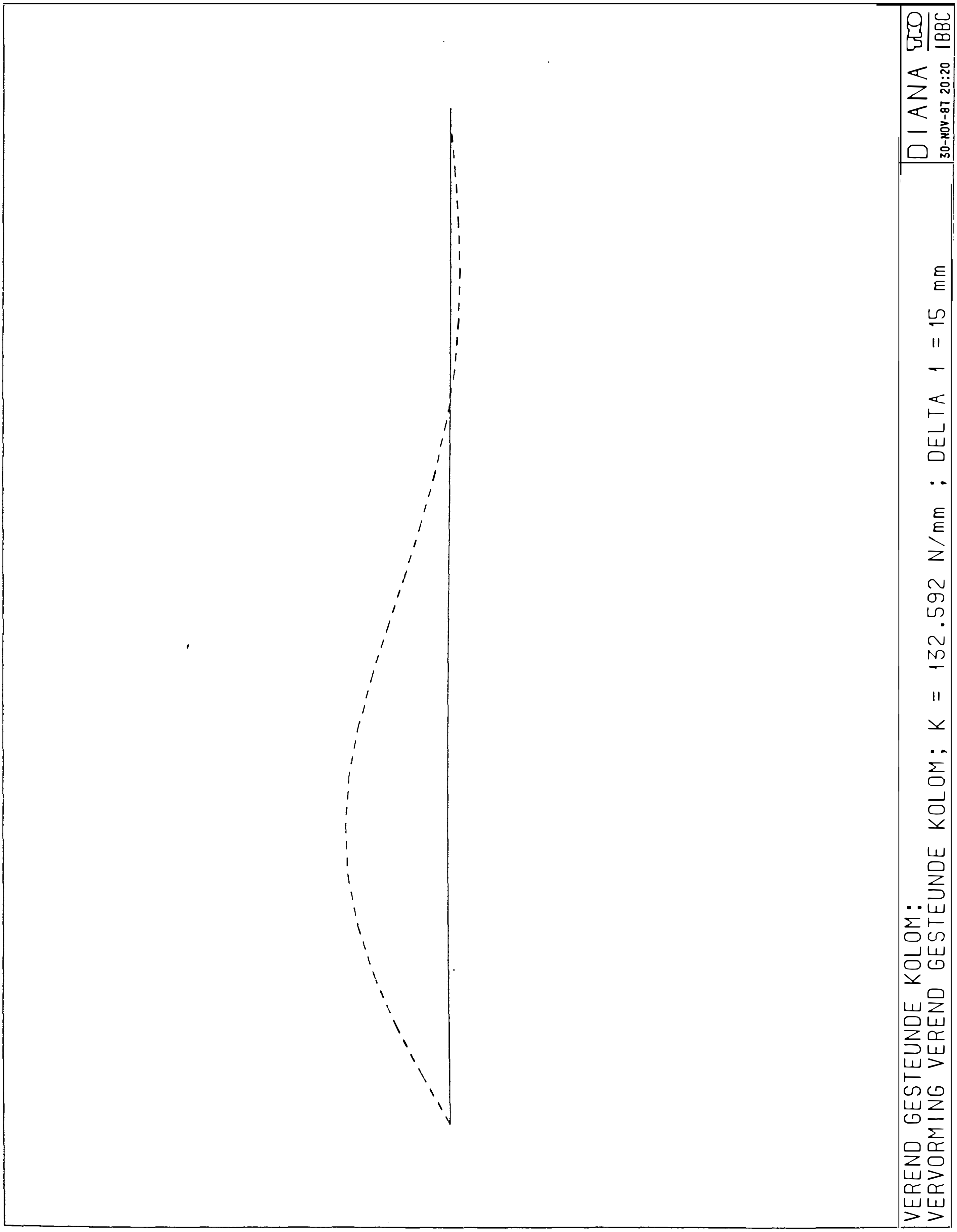


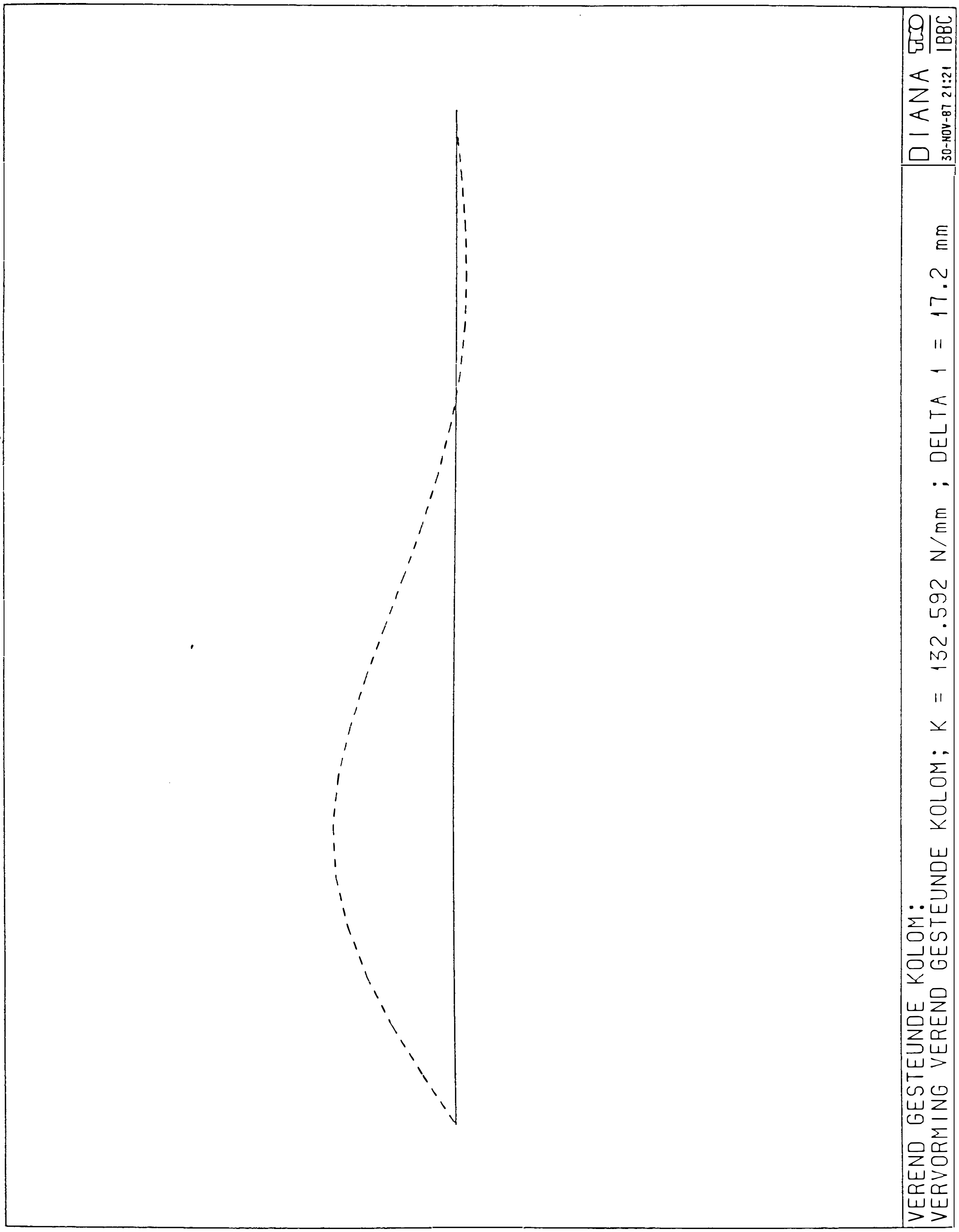
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
32.03	0.5	2.046	-0.2058	0.1587
	1.0			
	1.5			
	2.5			
	3.5			
	5.0			
	6.5			
	8.0			
564.5	12.0	112.0	-6.263	8.842
591.2	13.5	132.5	-6.368	10.51
602.8	14.5	146.3	-6.318	11.58
606.5	15.0	153.2	-6.283	12.10
610.0	15.5	159.9	-6.232	12.61
612.6	16.0	166.6	-6.184	13.10
613.3	16.25	169.9	-6.168	13.34
614.0	16.50	173.2	-6.151	13.57
614.3	16.70	175.8	-6.142	13.75
614.5	16.90	178.4	-6.135	13.93
614.5	17.00	179.7	-6.135	14.02
614.5	17.10	181.0	-6.135	14.11
614.5	17.20	182.3	-6.135	14.19
614.4	17.30	183.6	-6.137	14.28
614.2	17.40	184.9	-6.140	14.36

F_{DMAX} = 614.50 kN bij δ_1 = 17.00 mm.


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 132.592 N/mm ; DELTA 1 = 5 mm
DIANA
30-NOV-87 19:21
IBBC

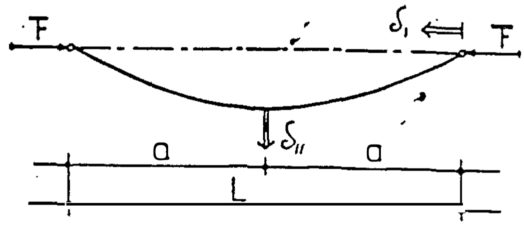

VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 132.592 N/mm ; DELTA 1 = 10 mm
DIANA
30-NOV-87 19:26
IBBC


DIANA
30-NOV-87 20:20
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 132.592 N/mm ; DELTA 1 = 15 mm


DIANA
30-NOV-87 21:21
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 132.592 N/mm ; DELTA 1 = 17.2 mm

Tabel 3.1.1. :

-Geg: -Pin-ended kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 1587.237 mm.
- $w(x) = 5.1 \sin\frac{\pi x}{2a}$

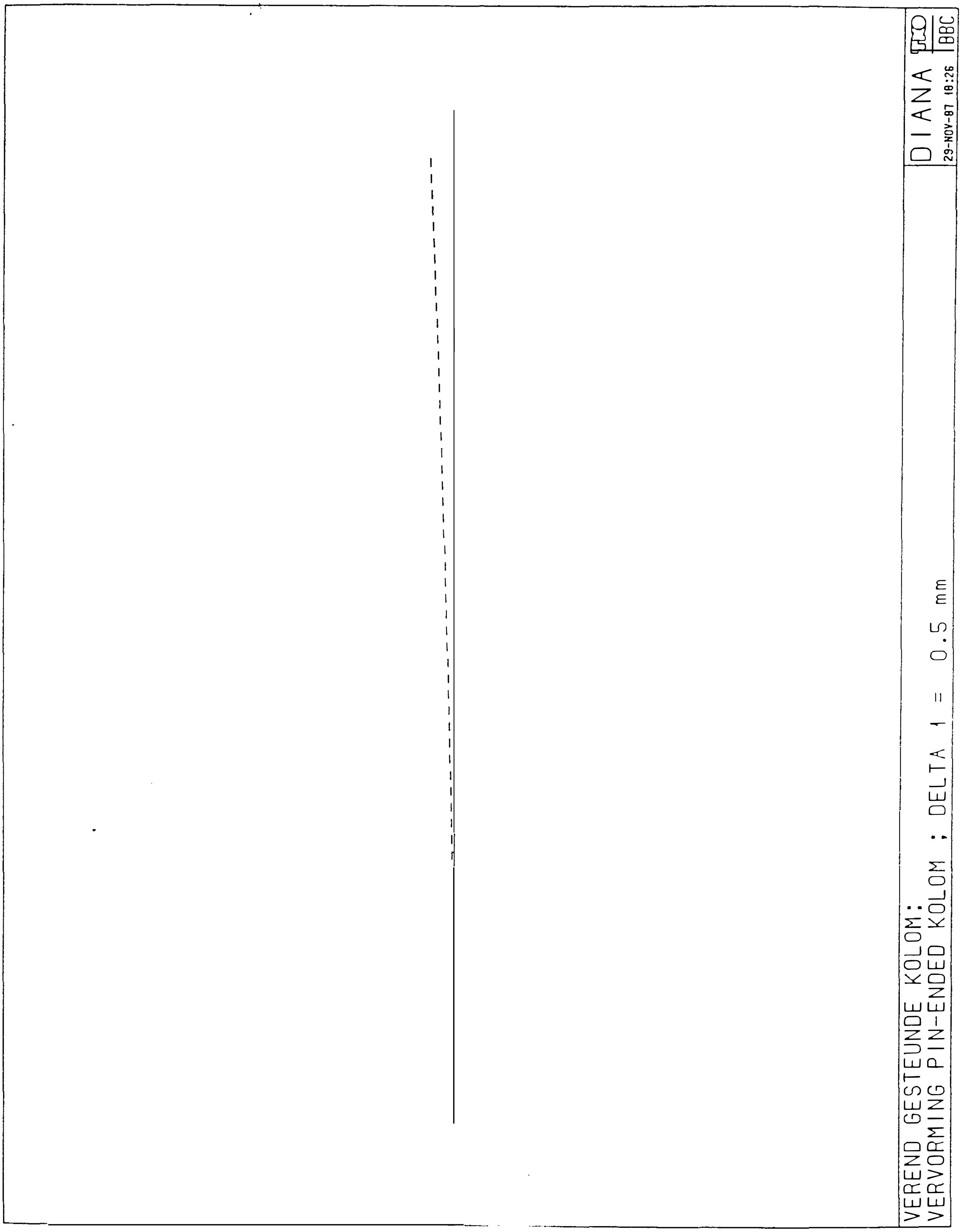


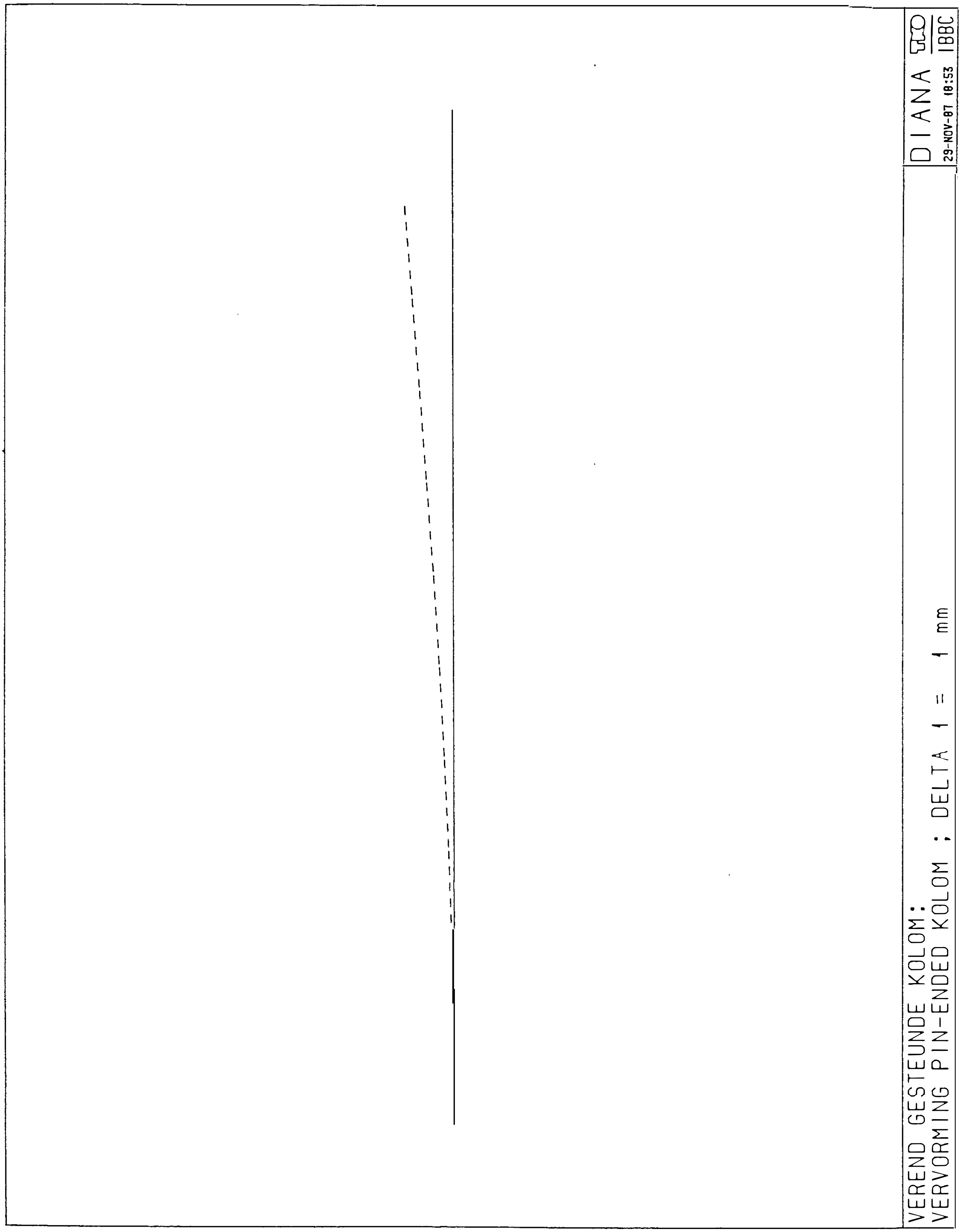
DIANA		
F [kN]	δ_I [mm]	δ_{II} [mm]
0.0	0.0	0.0
51.56	0.05	0.02234
103.1	0.10	0.04488
206.2	0.20	0.09055
360.9	0.35	0.1606
515.5	0.50	0.2326
670.2	0.65	0.3065
876.3	0.85	0.4084
1031	1.00	0.4873
1186	1.15	0.5686
1337	1.30	0.6902
1434	1.40	0.7701
1522	1.50	0.9606
1562	1.55	1.062
1600	1.60	1.203
1637	1.65	1.320
1670	1.70	1.490
1684	1.725	1.607
1698	1.75	1.722
1707	1.77	1.863
1715	1.79	2.014
1722	1.81	2.168
1725	1.82	2.266
1725	1.825	2.341

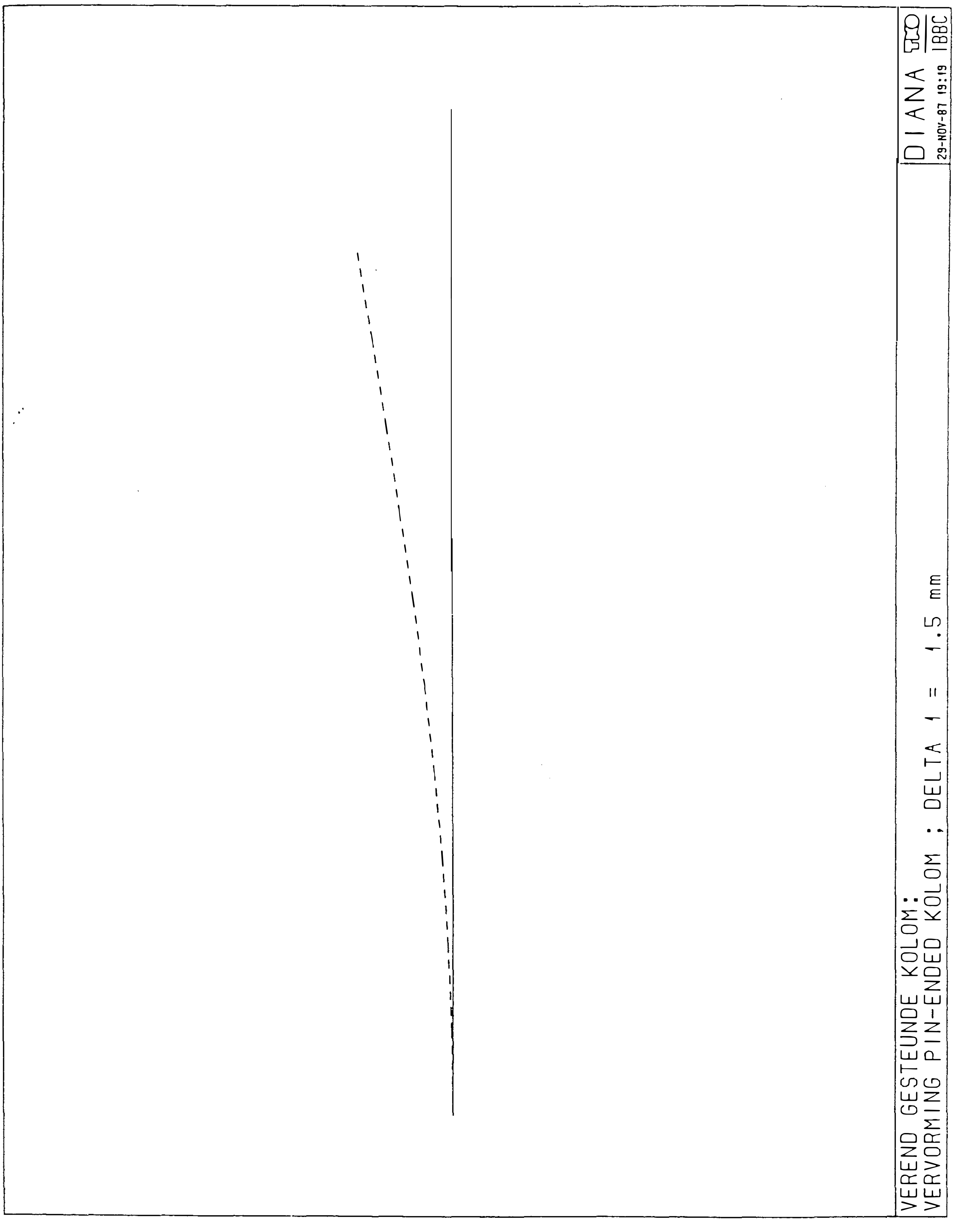
Vervolg tabel 3.1.1.:

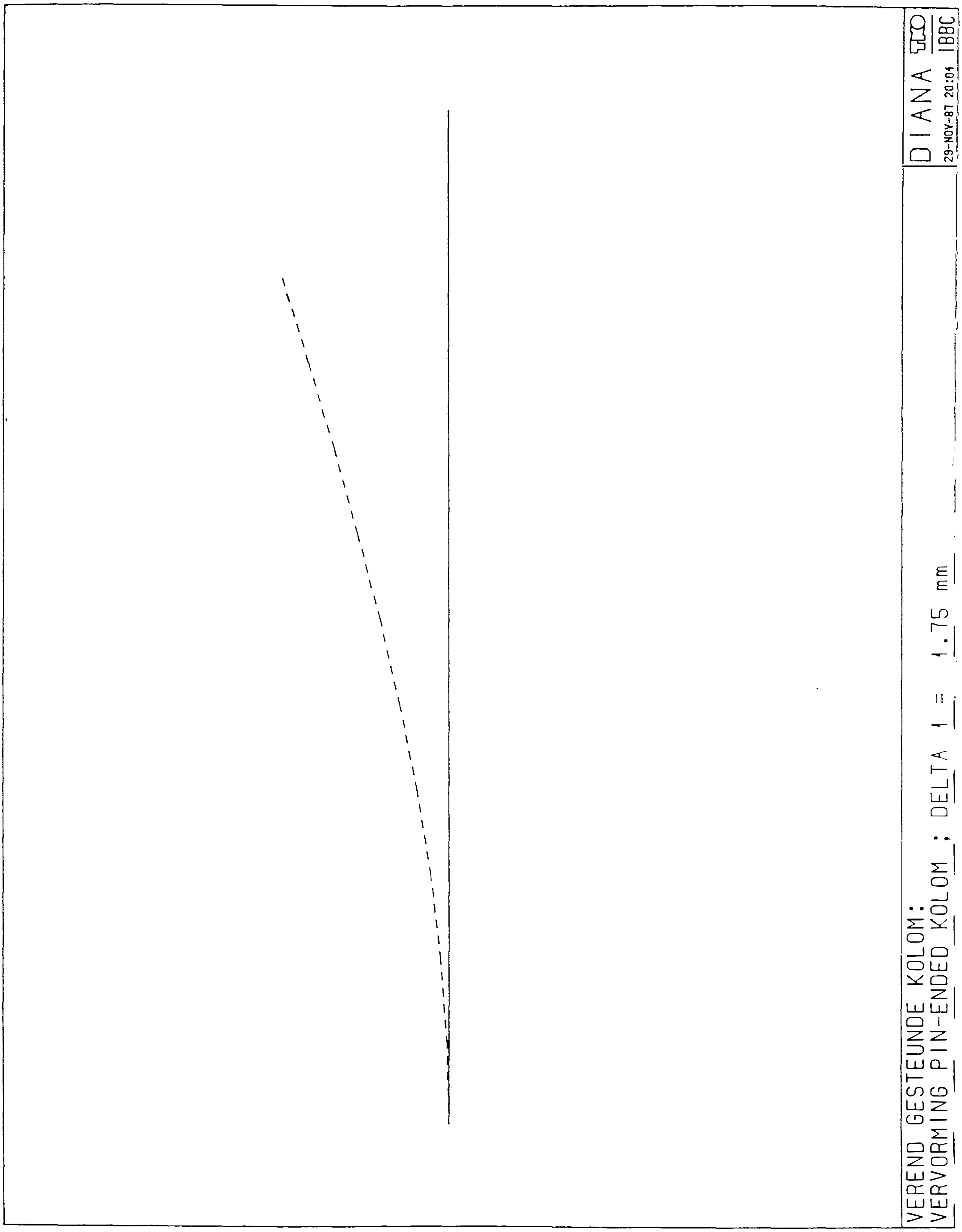
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_{11} [mm]
1726	1.8275	2.375
1726	1.83	2.406
1727	1.8325	2.438
1727	1.835	2.469
1727	1.8375	2.501
1728	1.84	2.535
1728	1.8425	2.569
1728	1.845	2.604

F_{DMAX} = 1728 kN bij δ_1 = 1.85 mm.


DIANA
29-NOV-87 18:26
BBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING PIN-ENDED KOLOM ; DELTA 1 = 0.5 mm

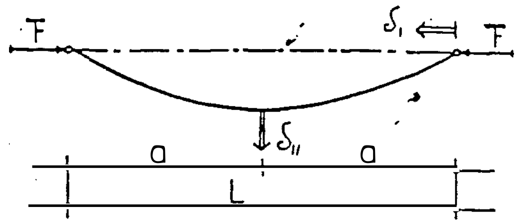

DIANA
29-NOV-87 18:53
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING PIN-ENDED KOLOM ; DELTA 1 = 1 mm


DIANA
29-NOV-87 19:19
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING PIN-ENDED KOLOM ; DELTA 1 = 1.5 mm


DIANA
29-NOV-87 20:04
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING PIN-ENDED KOLOM ; DELTA 1 = 1.75 mm

Tabel 3.1.2. :

-Geg: -Pin-ended kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 1587.237 mm.
- $w(x) = 4.5 \sin \frac{\pi x}{2a}$

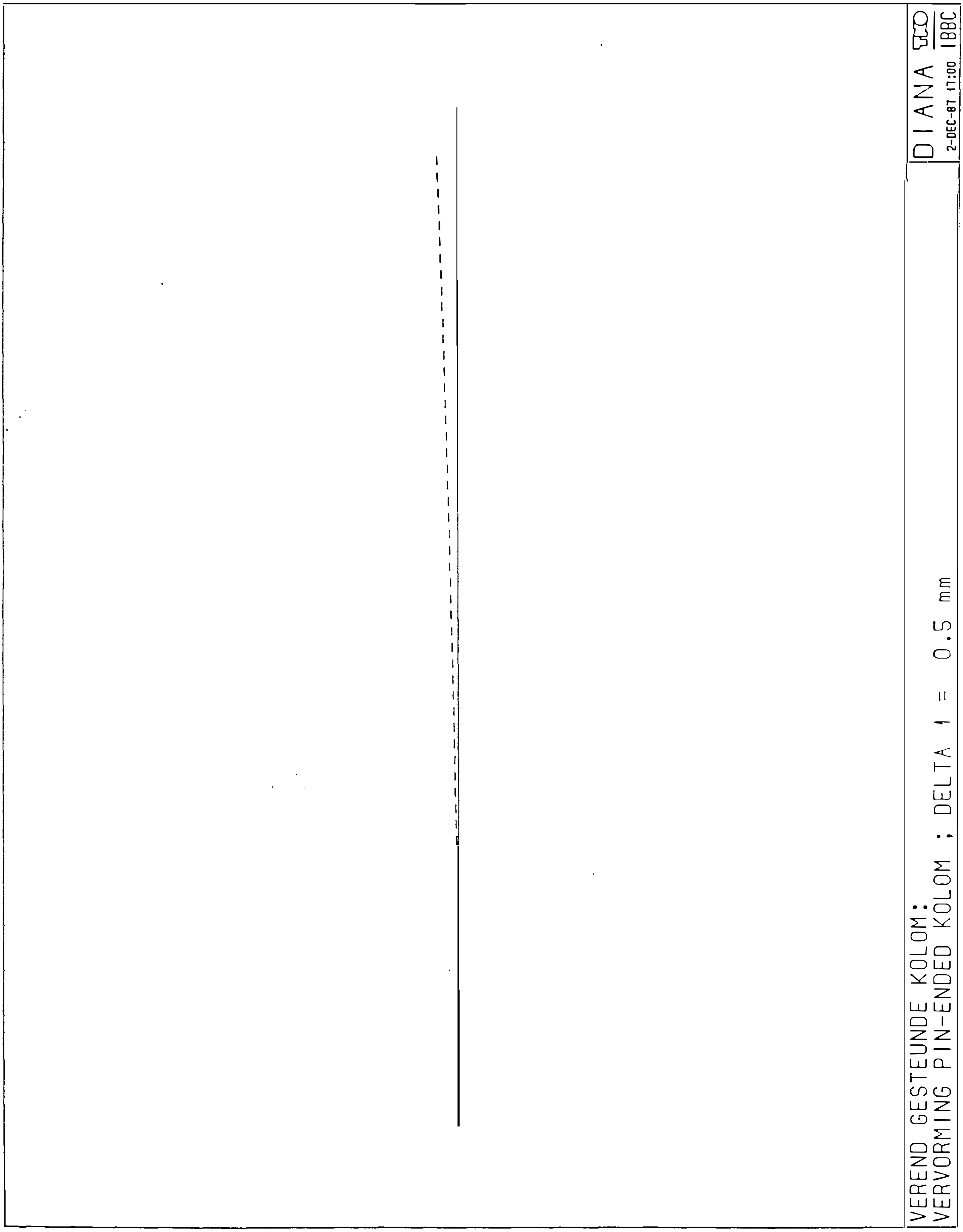


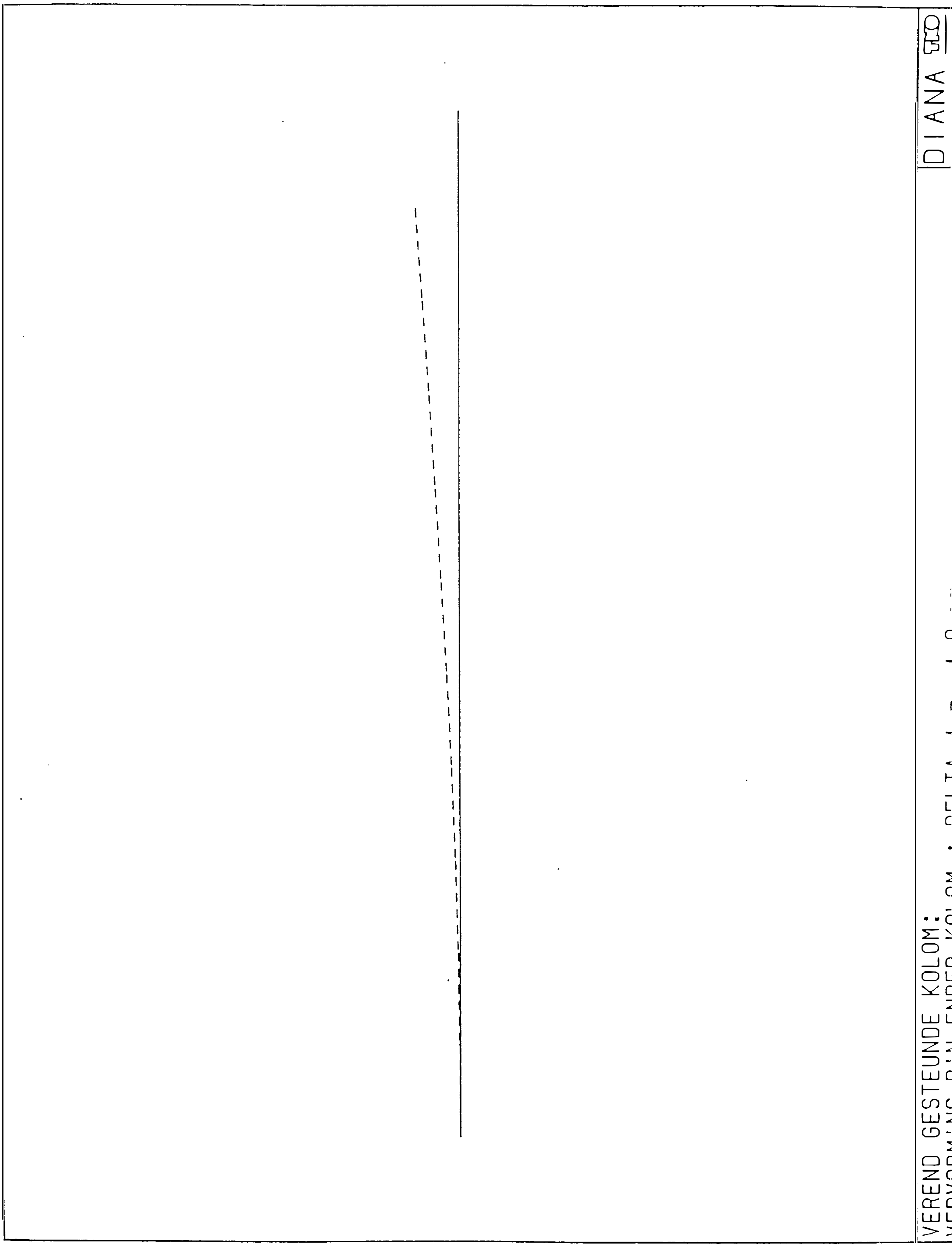
DIANA		
F [kN]	δ_I [mm]	δ_{II} [mm]
0.0	0.0	0.0
51.58	0.05	0.01972
154.7	0.15	0.05968
309.5	0.30	0.1210
515.8	0.50	0.2053
773.6	0.75	0.3151
1031	1.00	0.4302
1135	1.10	0.4778
1238	1.20	0.5268
1288	1.25	0.5668
1338	1.30	0.6109
1387	1.35	0.6519
1435	1.40	0.6804
1470	1.44	0.7649
1496	1.47	0.8131
1522	1.50	0.8587
1543	1.525	0.8946
1563	1.55	0.9538
1583	1.575	1.013
1602	1.60	1.068
1620	1.625	1.116
1639	1.65	1.159
1656	1.675	1.219
1672	1.70	1.314

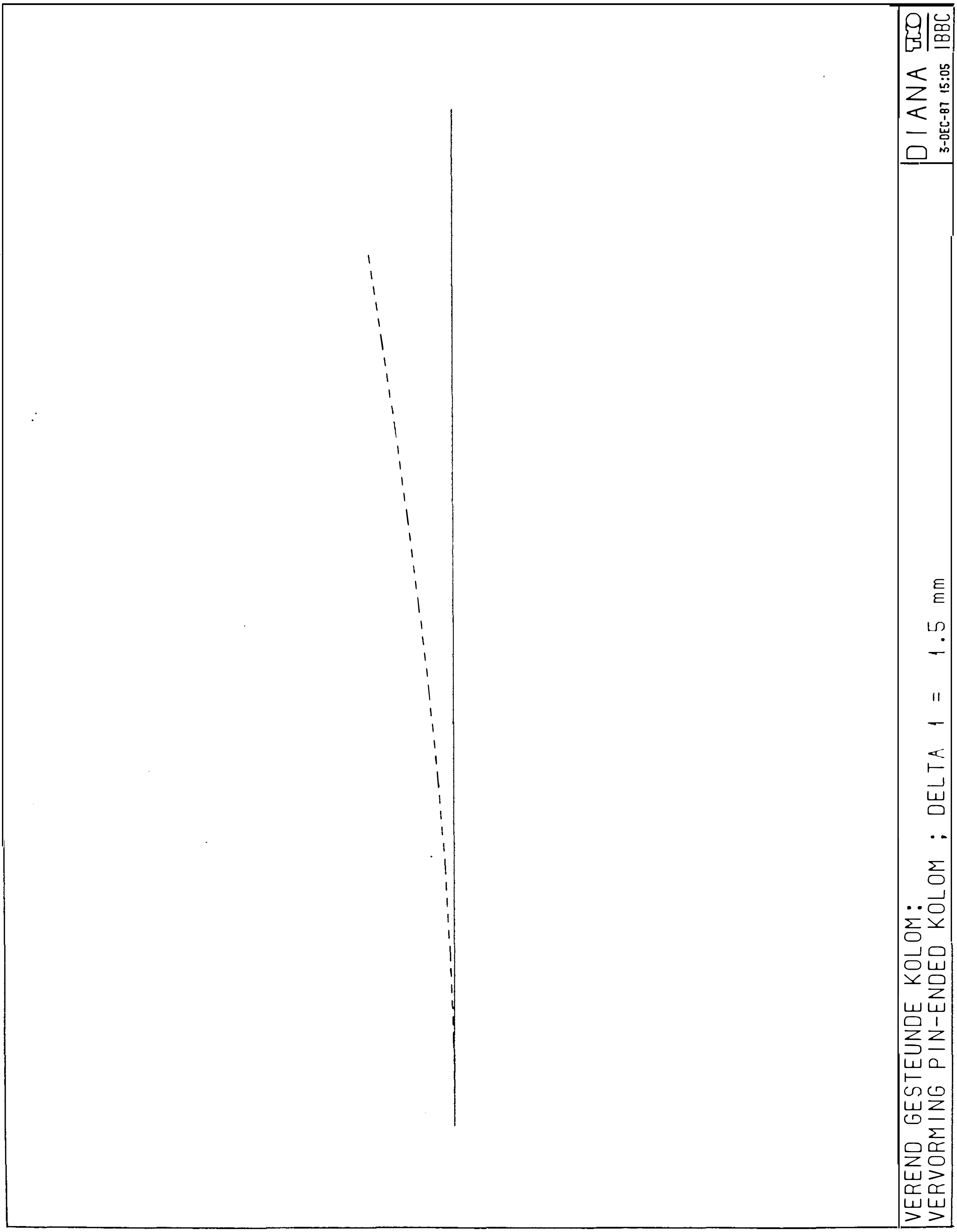
Vervolg tabel 3.1.2.:

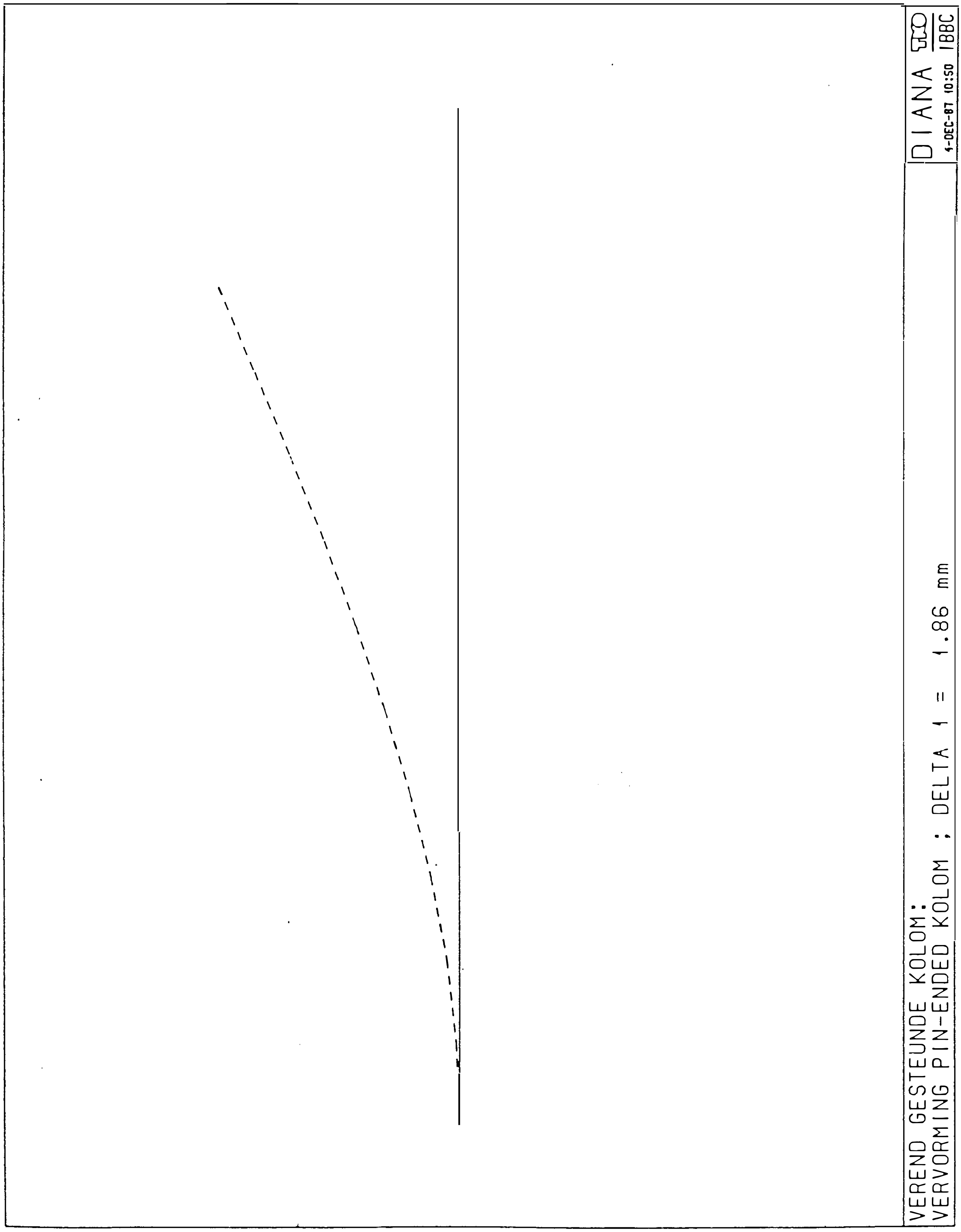
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_{11} [mm]
1684	1.72	1.396
1696	1.74	1.481
1702	1.75	1.525
1707	1.76	1.573
1712	1.77	1.632
1717	1.78	1.702
1721	1.79	1.773
1725	1.80	1.846
1729	1.81	1.921
1730	1.815	1.959
1732	1.82	1.997
1734	1.825	2.036
1736	1.83	2.080
1737	1.835	2.131
1738	1.84	2.192
1739	1.845	2.254
1740	1.85	2.317
1740	1.855	2.382
1741	1.86	2.448
1741	1.8625	2.488
1740	1.865	2.548
1740	1.866	2.560

F_{DMAX} = 1740 kN bij δ_1 = 1.87 mm.


DIANA TNO IBBC
2-DEC-87 17:00
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING PIN-ENDED KOLOM ; DELTA 1 = 0.5 mm

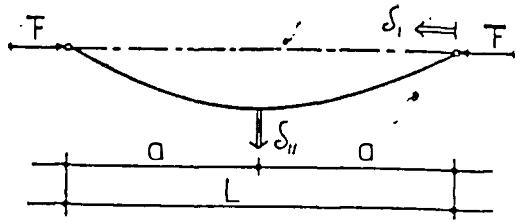

VEREND GESTEUNDE KOLOM:
DIANA


DIANA
3-DEC-87 15:05
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING PIN-ENDED KOLOM ; DELTA 1 = 1.5 mm


DIANA
4-DEC-87 10:50
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING PIN-ENDED KOLOM ; DELTA 1 = 1.86 mm

Tabel 3.1.3. :

-Geg: -Pin-ended kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 1587.237 mm.
- $w(x) = 4.74 \sin \frac{\pi x}{2a}$



DIANA		
F [kN]	δ_I [mm]	δ_{II} [mm]
0.0	0.0	0.0
51.57	0.05	0.02077
154.7	0.10	0.06286
309.4	0.30	0.1274
515.7	0.50	0.2162
773.5	0.75	0.3319
1031	1.00	0.4531
1134	1.10	0.5032
1237	1.20	0.5554
1337	1.30	0.6427
1386	1.35	0.6854
1435	1.40	0.7190
1478	1.45	0.8209
1521	1.50	0.9019
1564	1.55	0.9801
1601	1.60	1.124
1604	1.604	1.130
1606	1.607	1.136
1608	1.61	1.142
1610	1.6125	1.147
1612	1.615	1.152
1616	1.62	1.162
1638	1.65	1.221
1655	1.675	1.293

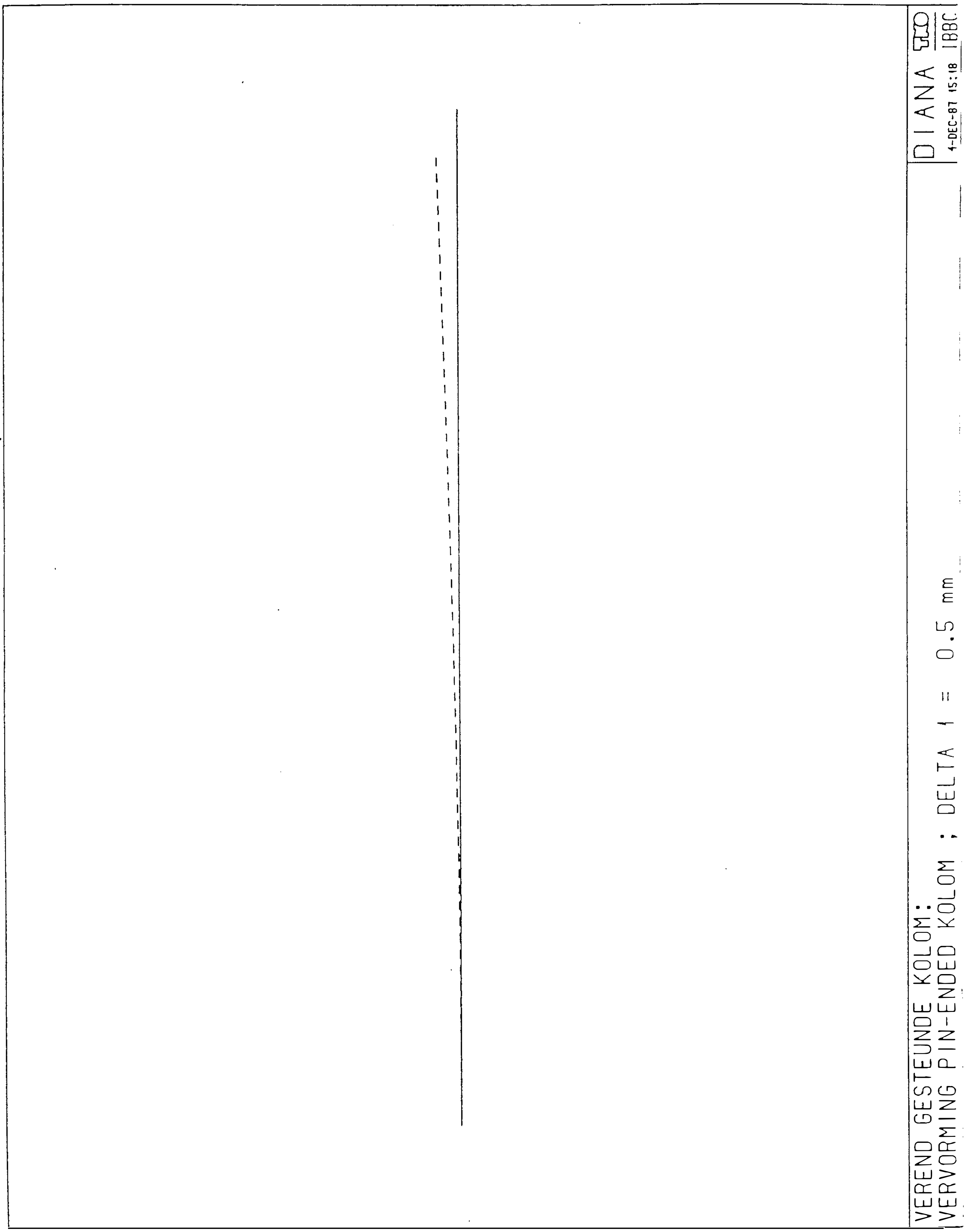
Vervolg tabel 3.1.3.:

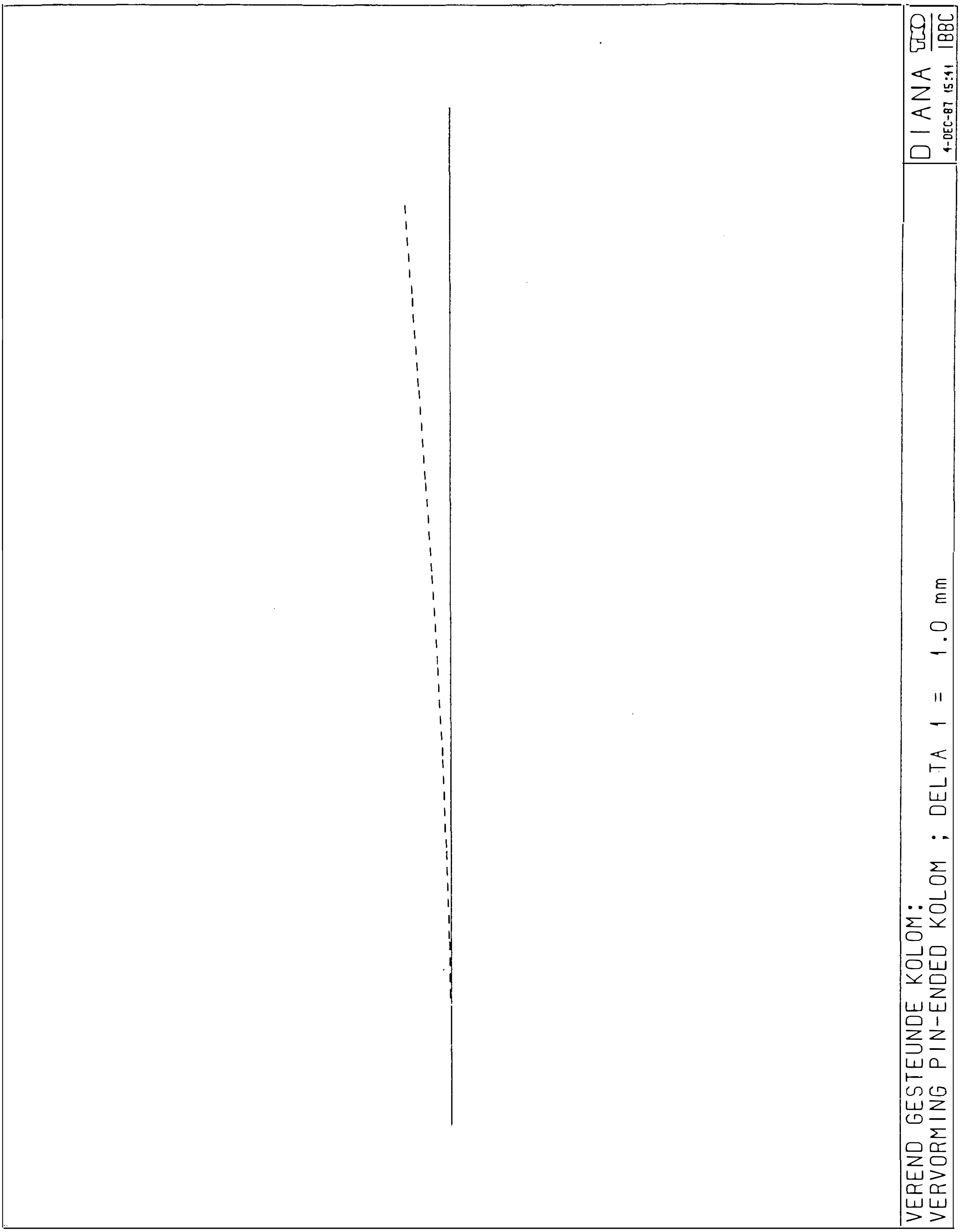
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_{11} [mm]
1671	1.70	1.388
1683	1.72	1.473
1695	1.74	1.559
1706	1.76	1.651
1715	1.78	1.790
1718	1.79	1.871
1722	1.80	1.946
1724	1.805	1.984
1726	1.81	2.022
1728	1.815	2.060
1730	1.82	2.101
1730	1.8225	2.126
1731	1.825	2.151
1732	1.8275	2.180
1732	1.831	2.2092
1732	1.832	2.233
1733	1.834	2.257
1733	1.836	2.282
1733	1.837	2.294
1734	1.838	2.307
1734	1.839	2.319
1734	1.840	2.332
1734	1.841	2.334
1734	1.842	2.357
1734	1.843	2.369
1734	1.844	2.382
1735	1.845	2.395
1735	1.846	2.408
1735	1.847	2.421

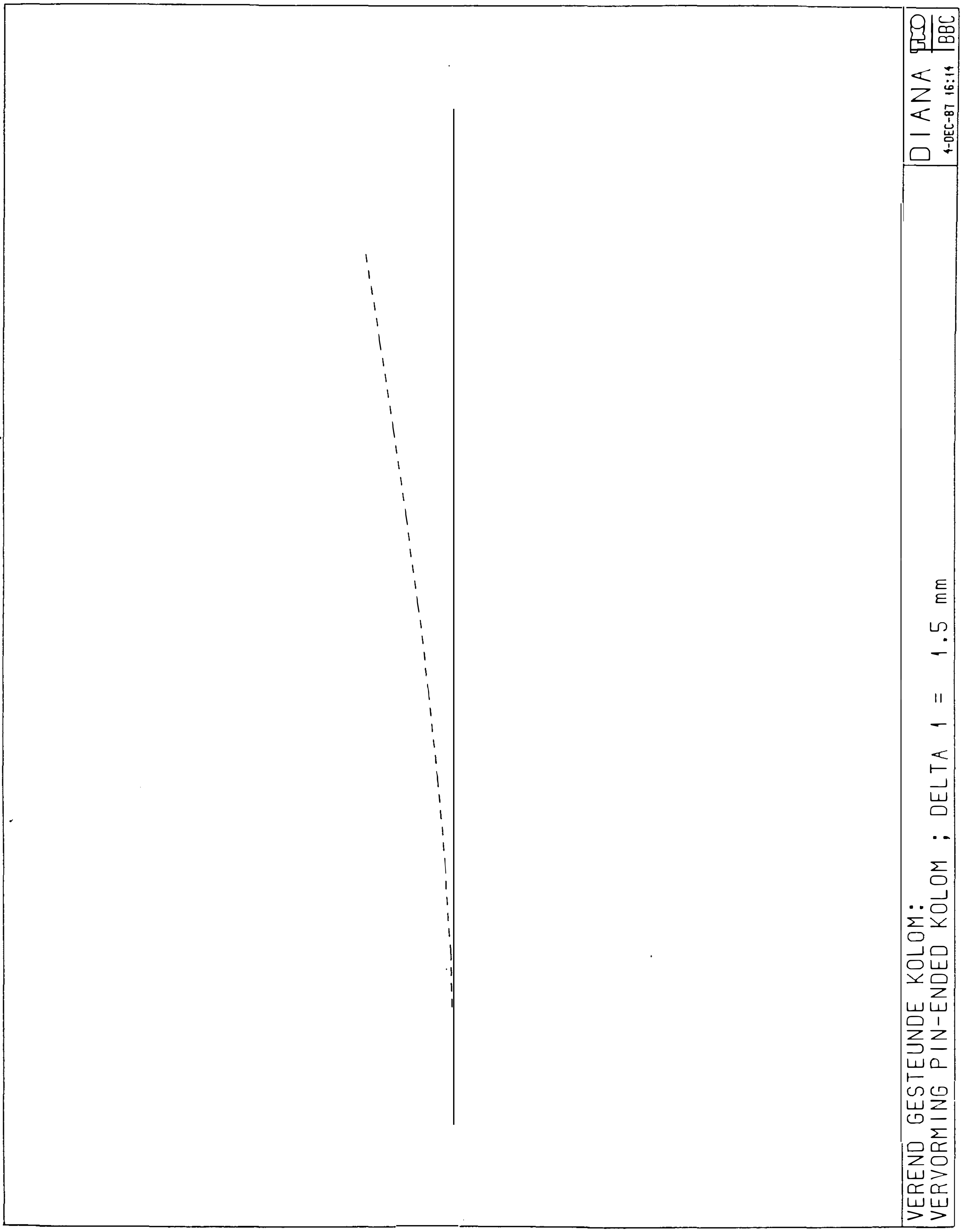
Vervolg tabel 3.1.3.

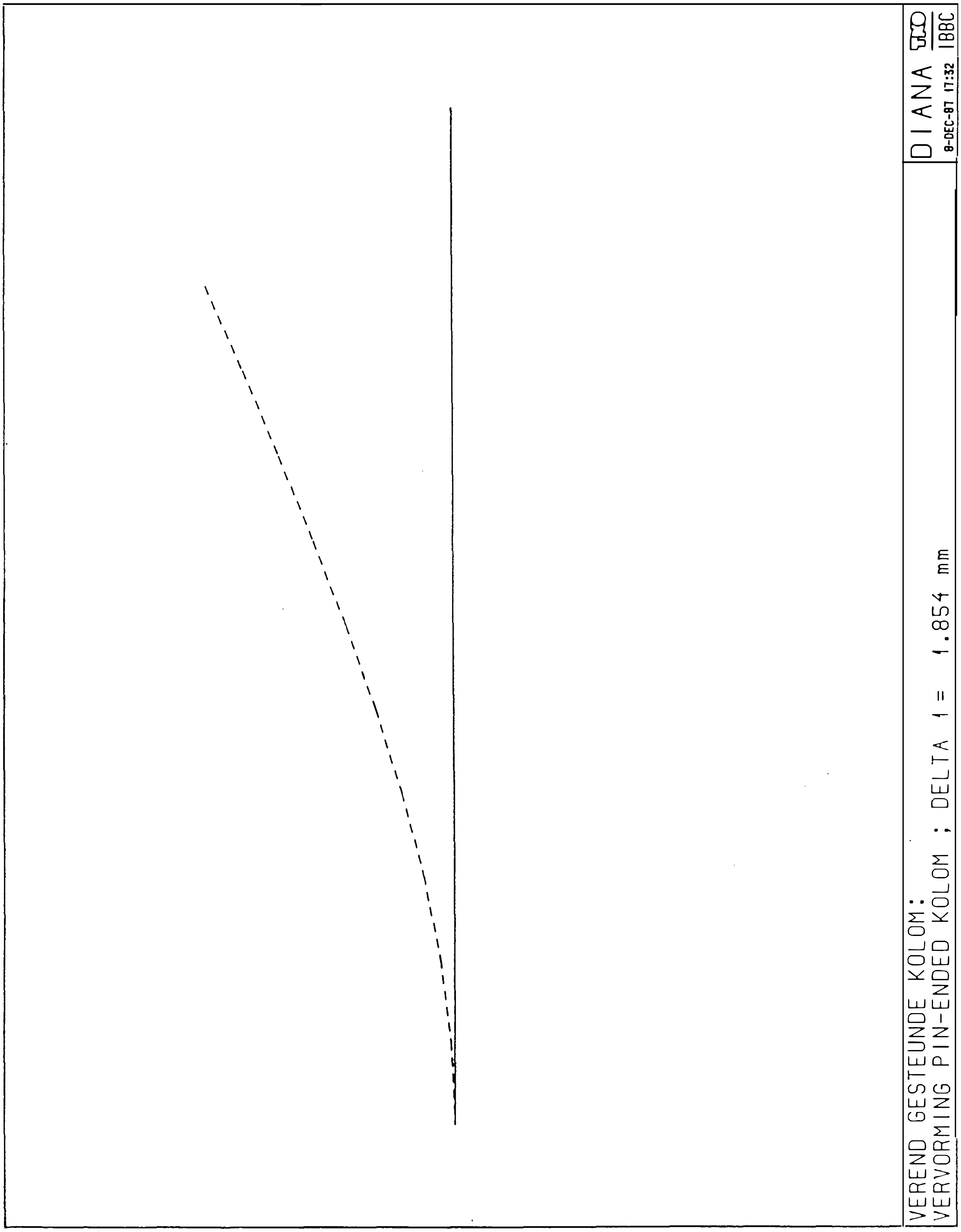
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
1735	1.848	2.434		
1735	1.849	2.447		
1735	1.850	2.460		
1735	1.851	2.474		
1735	1.852	2.488		
1735	1.853	2.503		
1735	1.854	2.519		
1735	1.855	2.538		
1735	1.856	2.558		
1735	1.857	2.585		

F_{DMAX} = 1735 kN bij δ_1 = 1.86 mm.


DIANA
4-DEC-87 15:18
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING PIN-ENDED KOLOM ; DELTA 1 = 0.5 mm

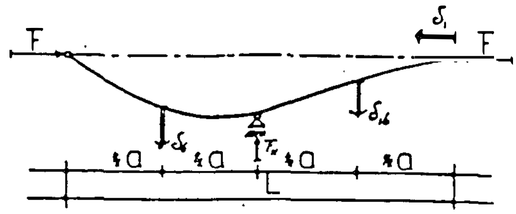

DIANA
4-DEC-87 15:11
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING PIN-ENDED KOLOM ; DELTA 1 = 1.0 mm


DIANA
4-DEC-87 16:14
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING PIN-ENDED KOLOM ; DELTA 1 = 1.5 mm


DIANA
8-DEC-87 17:32
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING PIN-ENDED KOLOM ; DELTA 1 = 1.854 mm

Tabel 3.2.1. :

-Geg: -Star gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 1587.237 mm.
- $w(x) = 4.74 \sin \frac{\pi x}{2a}$

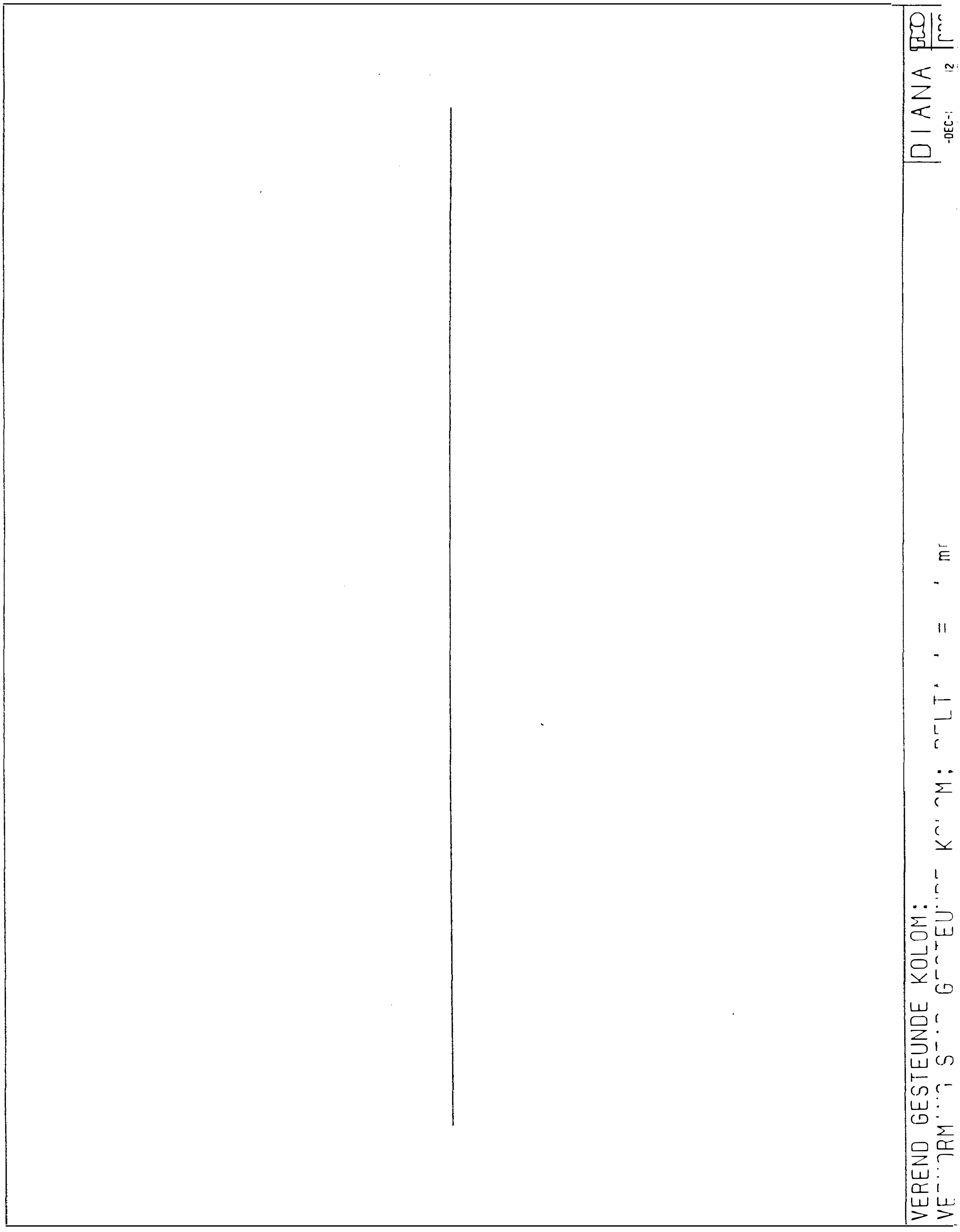


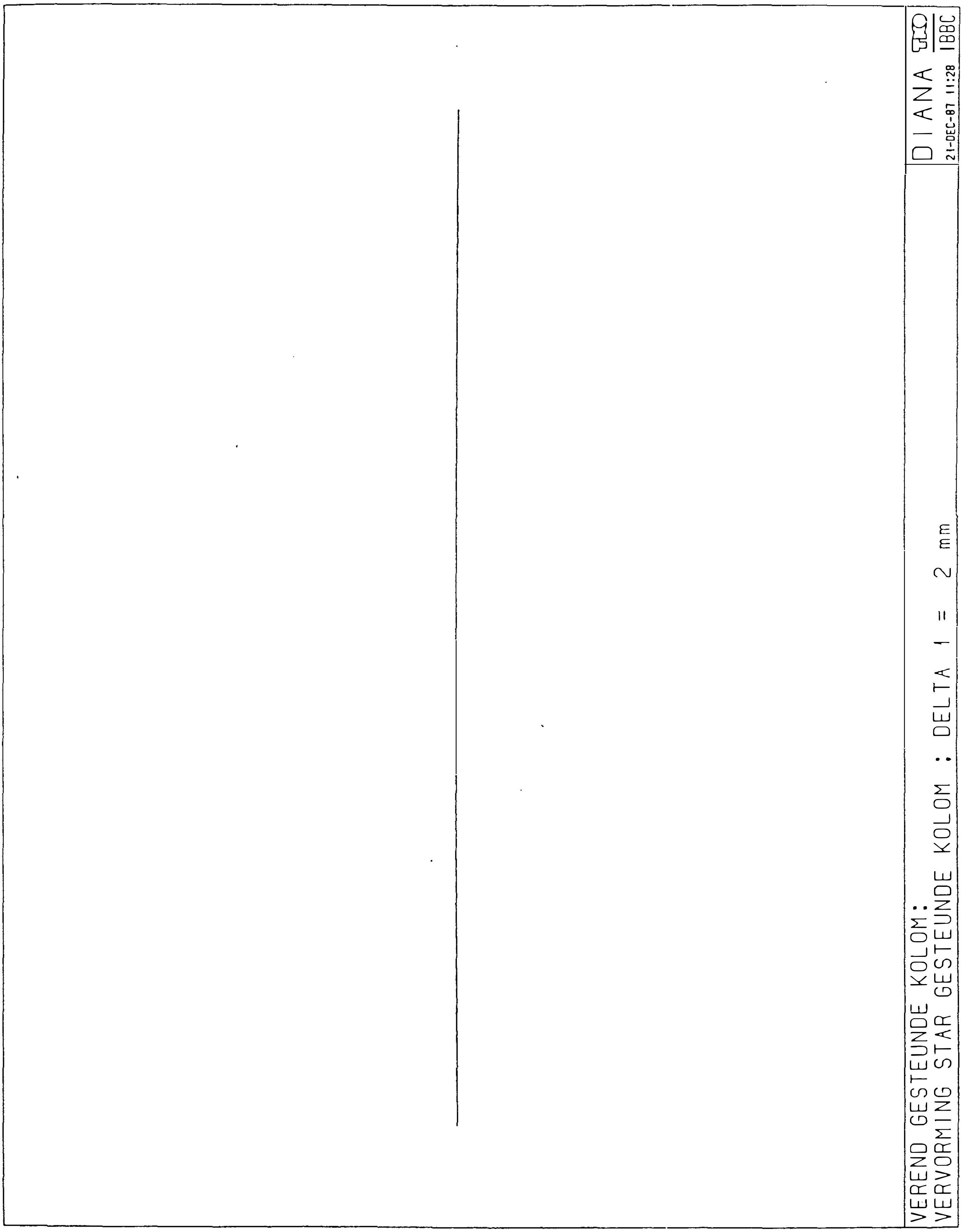
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_8 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
51.65	0.1	0.0004953	0.000178	0.3717
155.0	0.3	0.001487	0.0005351	1.115
309.9	0.6	0.002978	0.001074	2.231
516.5	1.0	0.004971	0.001797	3.720
774.8	1.5	0.007471	0.002711	5.582
1033	2.0	0.00998	0.003634	7.446
1188	2.3	0.01149	0.004192	8.565
1341	2.6	0.01388	0.005632	9.677
1437	2.8	0.01491	0.006020	10.37
1534	3.0	0.01593	0.006410	11.07
1609	3.2	0.01982	0.009661	11.63
1691	3.4	0.02088	0.01009	12.23
1717	3.5	0.02584	0.01473	12.44
1751	3.6	0.02657	0.01515	12.71
1765	3.65	0.03506	0.02347	12.47
1774	3.70	0.04276	0.03102	13.12
1782	3.75	0.04148	0.02958	13.39
1791	3.80	0.04127	0.02922	12.91
1799	3.85	0.04146	0.02924	13.08
1808	3.90	0.04169	0.02932	13.15
1817	3.95	0.04292	0.03039	11.96
1823	4.00	0.05391	0.04121	15.15
1829	4.05	0.0648	0.05195	14.17

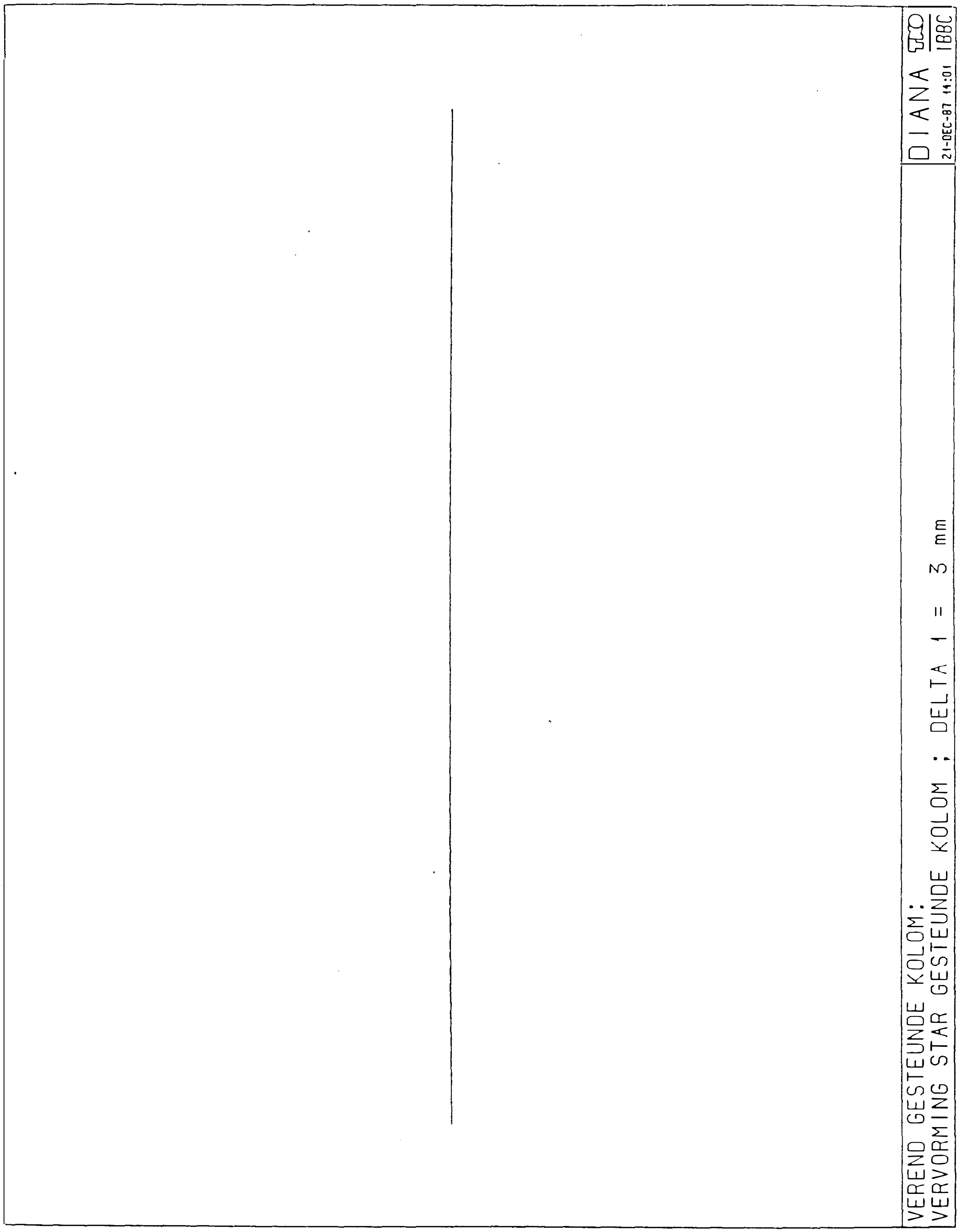
Vervolg tabel 3.2.1.:

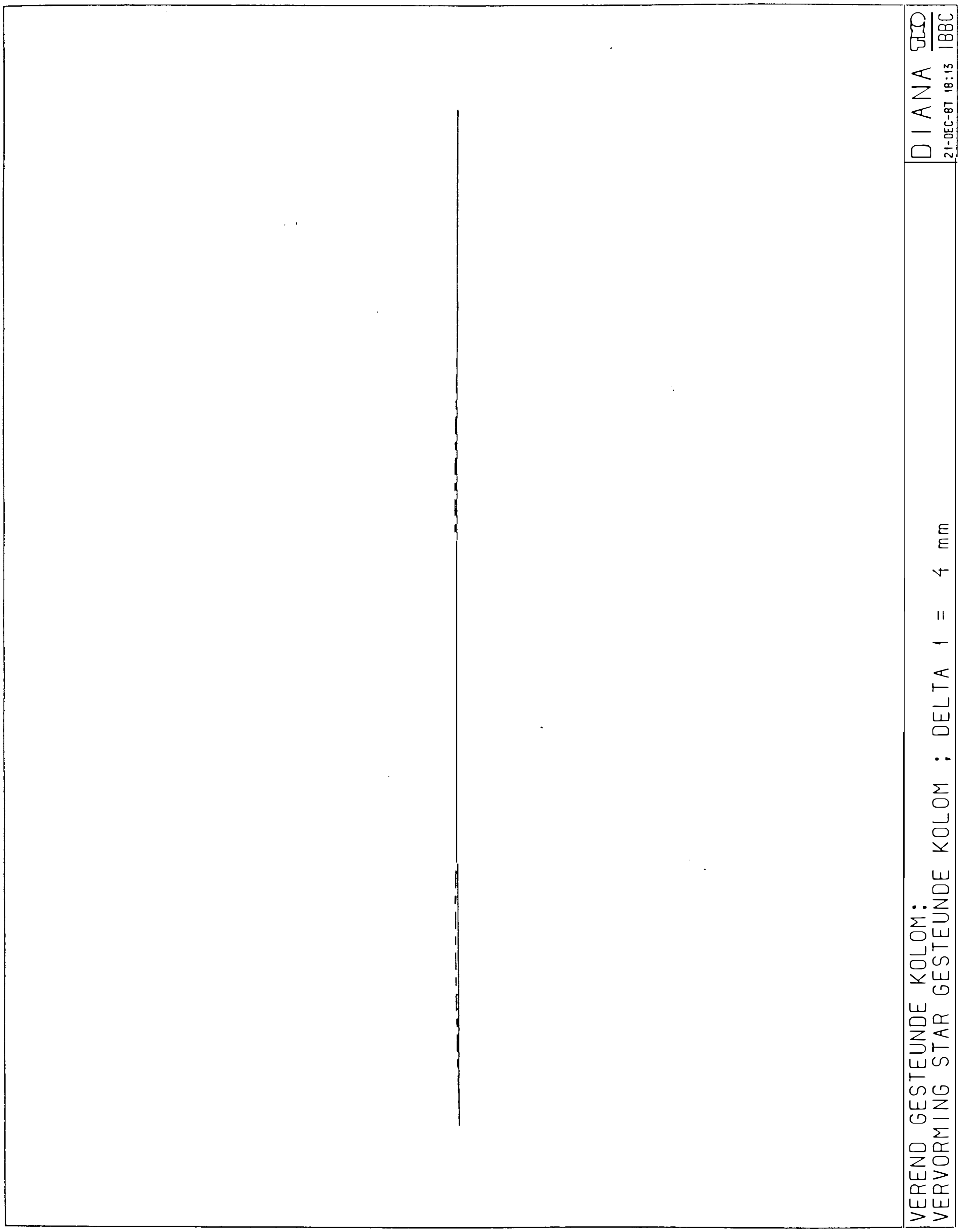
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_8 [mm]	δ_{18} [mm]	F_{11} [kN]
1832	4.075	0.06821	0.05528	13.43
1835	4.100	0.07050	0.05749	13.46
1838	4.125	0.07032	0.05723	13.64
1840	4.150	0.07067	0.05750	13.84
1843	4.175	0.07112	0.05788	13.55
1845	4.200	0.07157	0.05825	12.20
1848	4.225	0.0738	0.006039	12.10
1850	4.250	0.07706	0.06357	13.65
1851	4.260	0.07951	0.06599	14.05
1852	4.270	0.08324	0.06969	13.42
1853	4.280	0.08757	0.07399	13.79
1853	4.290	0.09160	0.07798	13.73
1854	4.300	0.09585	0.08220	13.29
1855	4.310	0.1003	0.08661	13.25
1855	4.320	0.1049	0.09123	13.50
1855	4.325	0.1078	0.09409	13.62
1856	4.330	0.1112	0.09749	13.55
1856	4.335	0.1146	0.1008	13.52
1856	4.340	0.1177	0.1040	13.51
1856	4.345	0.1213	0.1075	13.50
1856	4.350	0.1250	0.1112	13.48
1857	4.355	0.1287	0.1149	13.47
1857	4.360	0.1323	0.1185	13.46
1857	4.365	0.1360	0.1221	13.45
1857	4.370	0.1396	0.1257	13.43
1857	4.375	0.1432	0.1293	13.42
1858	4.380	0.1468	0.1329	13.41
1858	4.385	0.1504	0.1365	13.40
1858	4.390	0.1540	0.1400	13.39
1858	4.395	0.1578	0.1439	13.36
1858	4.400	0.1616	0.1476	13.35

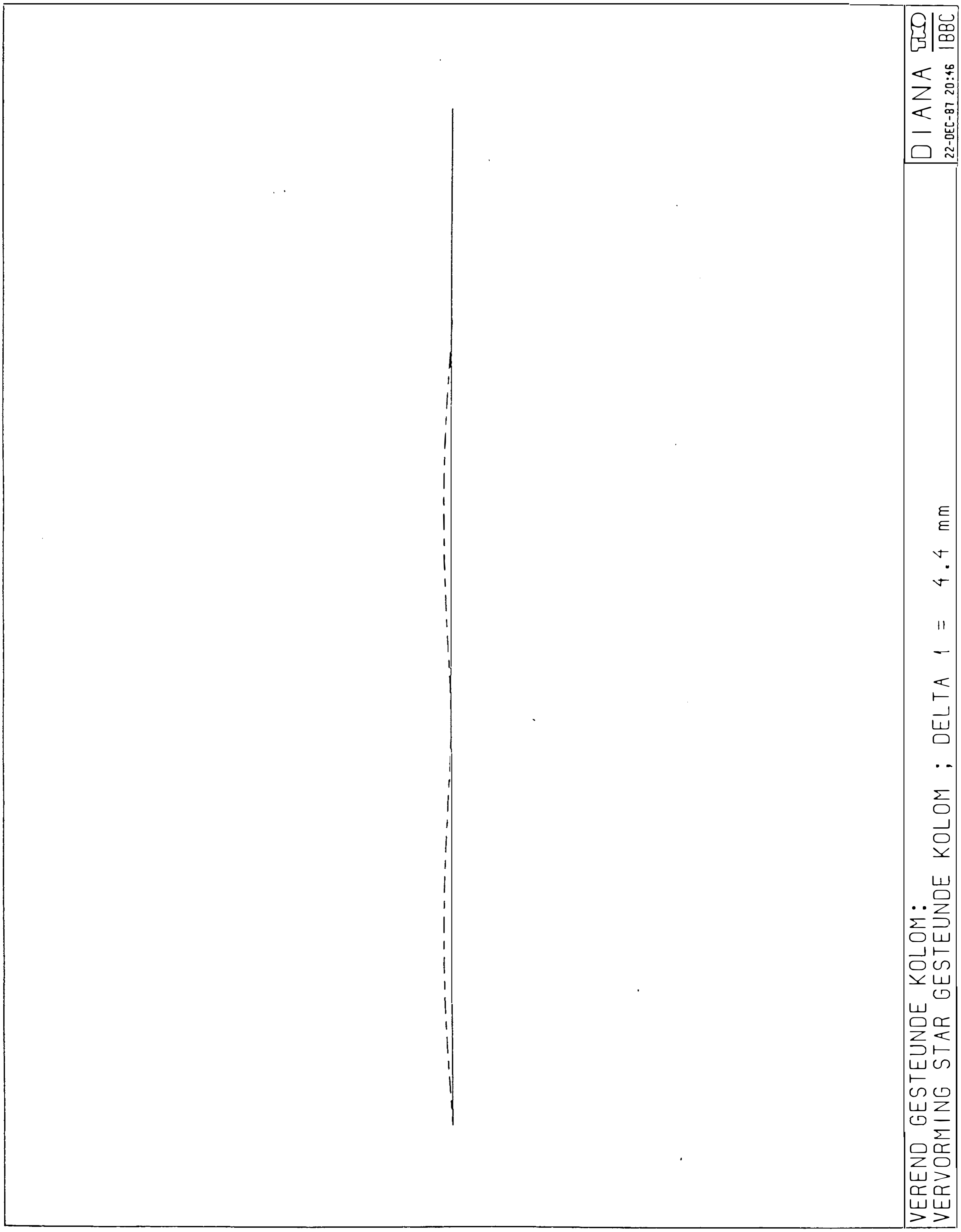
F_{DMAX} = 1858 kN bij δ_1 = 4.40 mm.


DIANA
VEREND GESTEUNDE KOLOM:


DIANA
21-DEC-87 11:28
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING STAR GESTEUNDE KOLOM : DELTA 1 = 2 mm


DIANA
21-DEC-87 11:01
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING STAR GESTEUNDE KOLOM ; DELTA 1 = 3 mm


DIANA
21-DEC-87 18:13
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING STAR GESTEUNDE KOLOM ; DELTA 1 = 4 mm

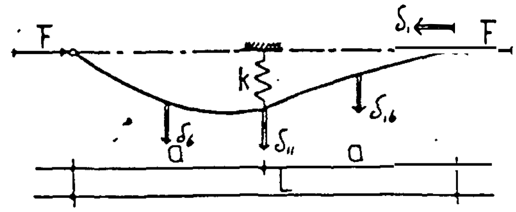

DIANA
IBBC
22-DEC-87 20:46
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING STAR GESTEUNDE KOLOM ; DELTA 1 = 4.4 mm

Tabel 3.3.1. :

-Geg: -Verend gest. kolom.

-Verv. gestuurd.

- a = 11904.277 mm.
- k = 59031 N/mm.
- $w(x) = 4.74 \sin \frac{\pi x}{2a}$

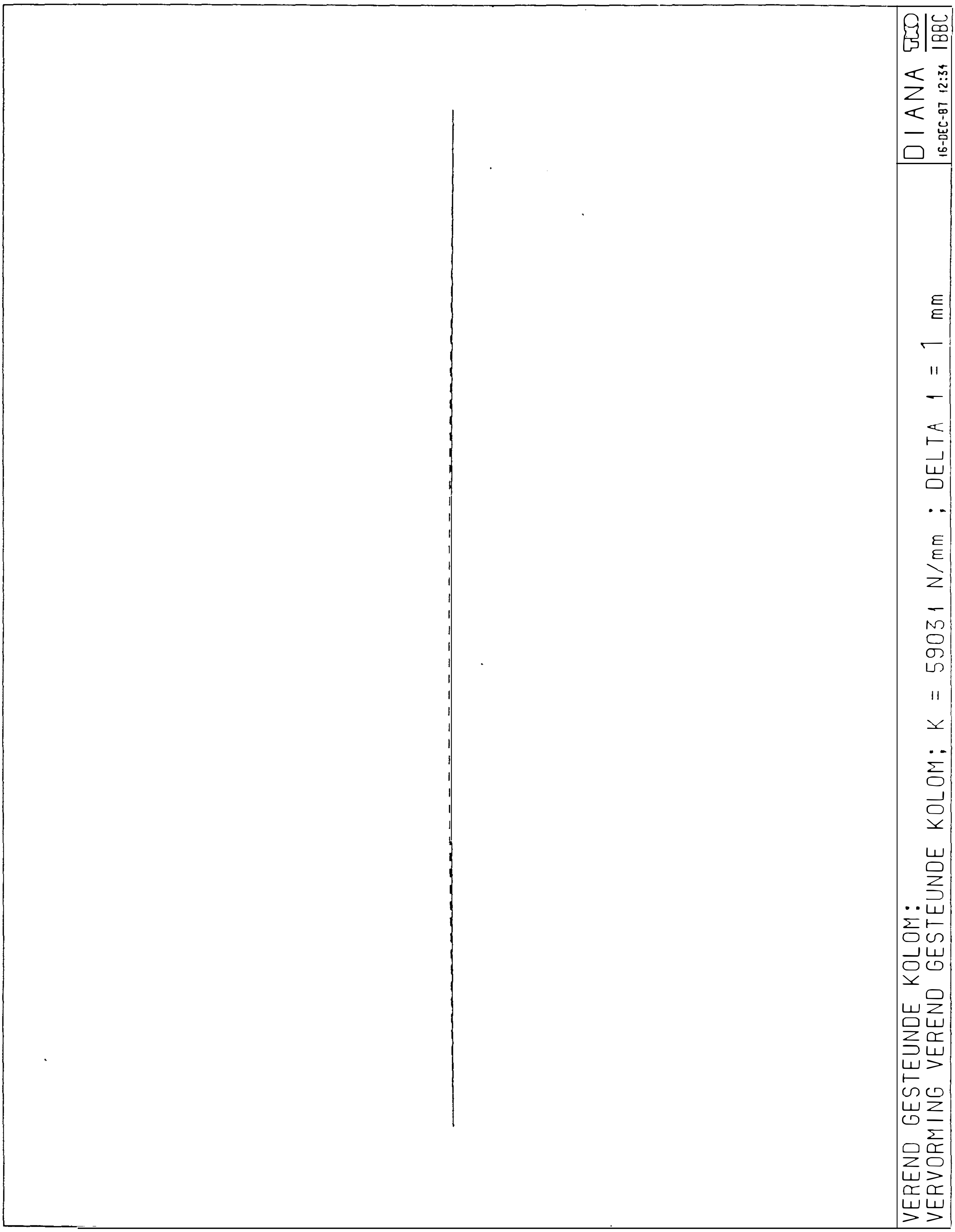


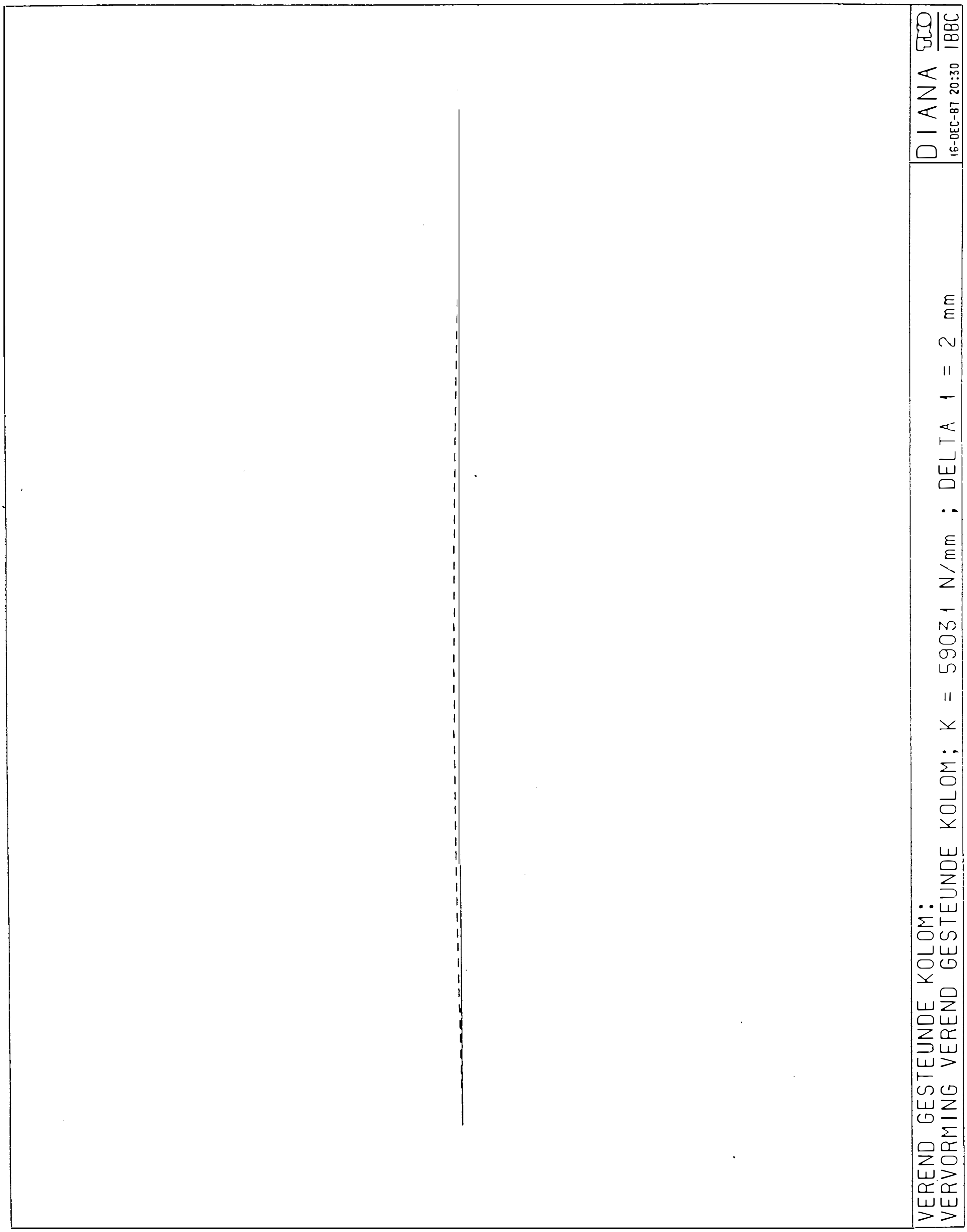
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
51.63	0.1	0.003817	0.0035	0.2852
154.9	0.3	0.01148	0.01052	0.8575
309.8	0.6	0.02303	0.02112	1.721
516.3	1.0	0.03855	0.03538	2.880
774.5	1.5	0.05815	0.05339	4.344
1033	2.0	0.07796	0.07612	5.825
1188	2.3	0.08996	0.08266	6.721
1340	2.6	0.1045	0.09626	7.757
1437	2.8	0.1123	0.1034	8.333
1533	3.0	0.1201	0.1106	8.912
1609	3.2	0.1341	0.1239	9.768
1691	3.4	0.1413	0.1305	10.29
1716	3.5	0.1534	0.1423	10.89
1750	3.6	0.1576	0.1461	11.14
1774	3.7	0.1812	0.1694	12.04
1791	3.8	0.1904	0.1784	12.28
1799	3.85	0.1850	0.1727	12.20
1808	3.90	0.1859	0.1736	12.26
1816	3.95	0.1898	0.1772	12.37
1822	4.00	0.2037	0.1910	12.74
1829	4.05	0.2150	0.2021	12.94
1835	4.10	0.2244	0.2114	13.09
1840	4.15	0.2302	0.2170	13.18

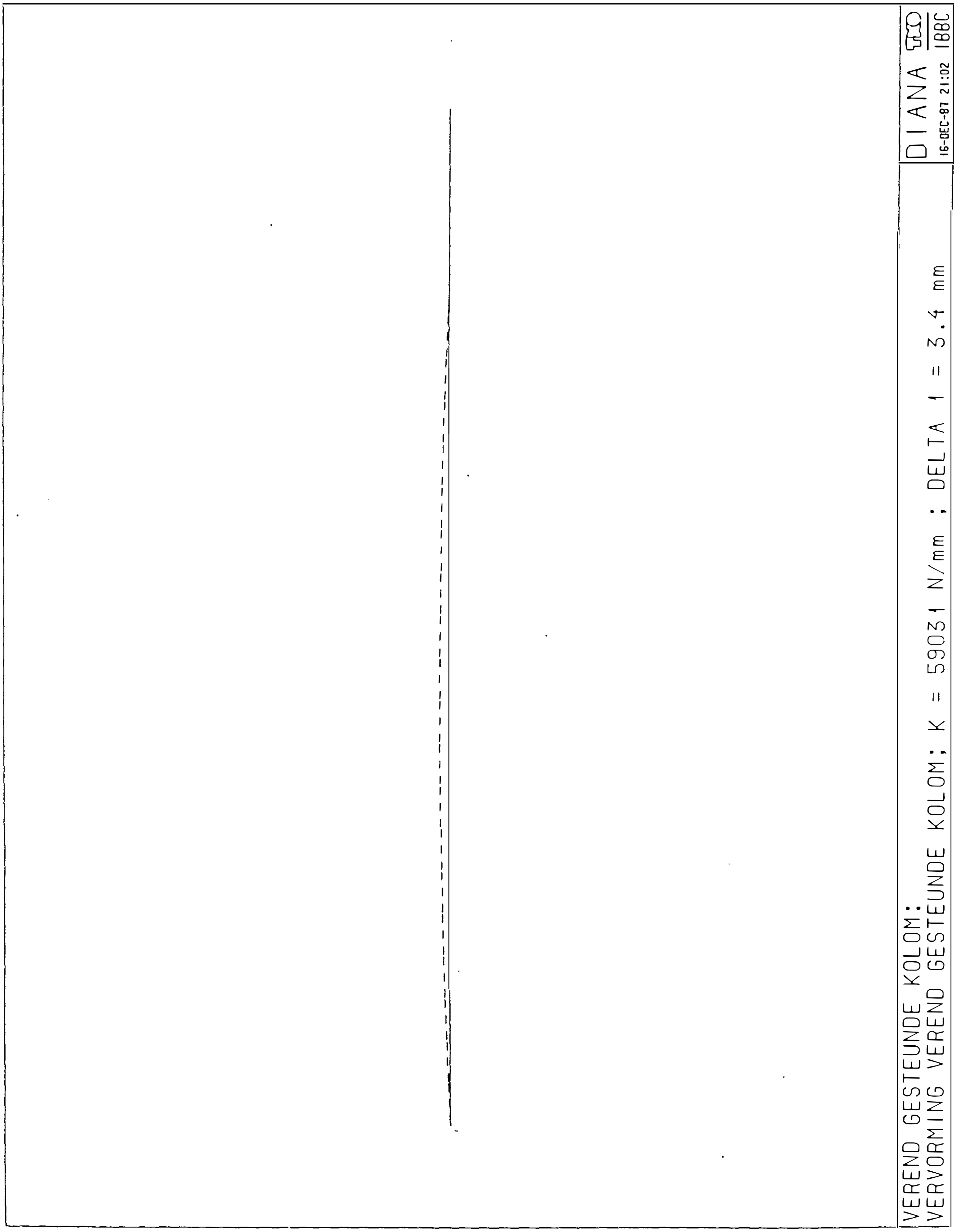
Vervolg tabel 3.3.1.:

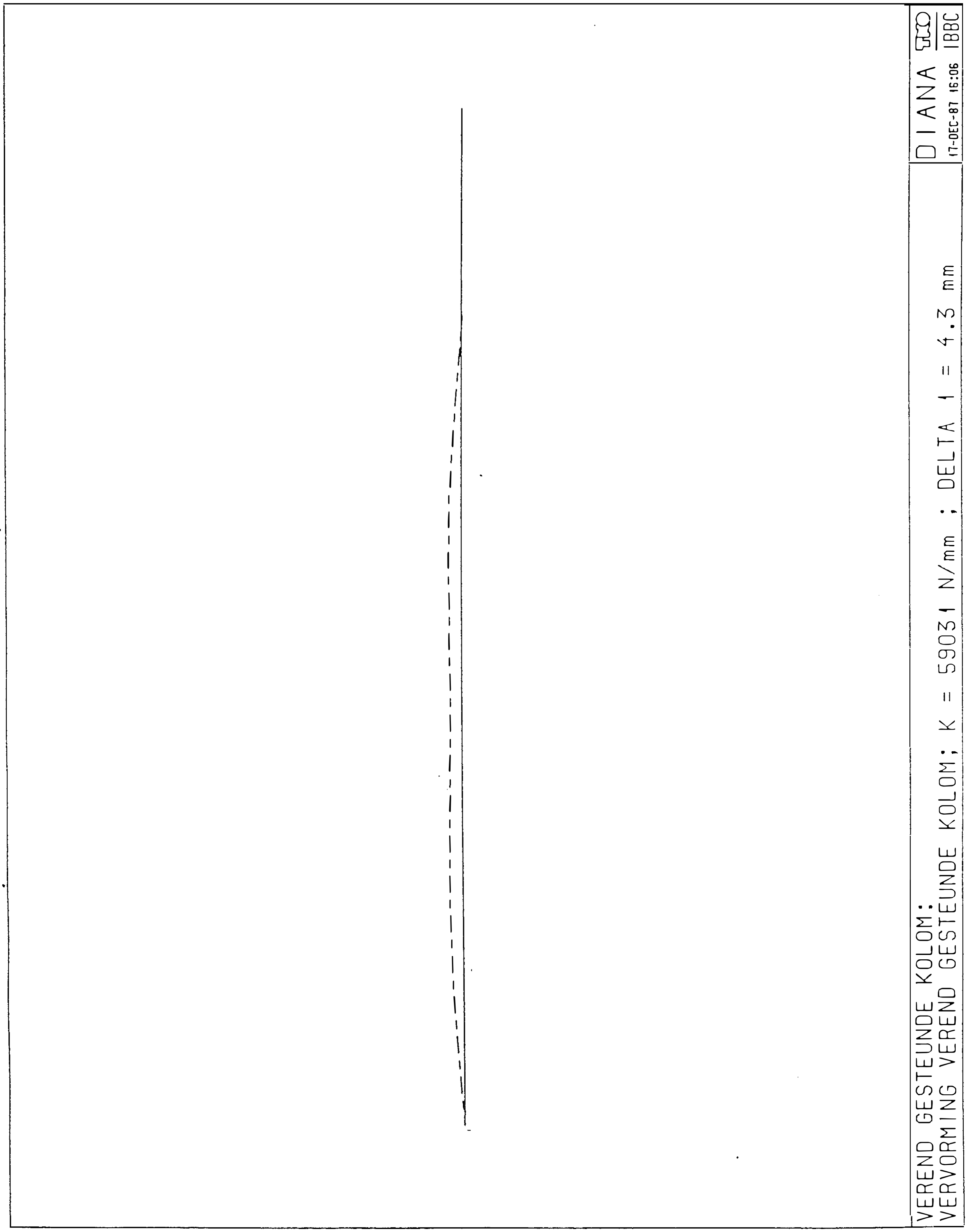
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
1843	4.175	0.2270	0.2138	13.16
1845	4.200	0.2274	0.2140	13.18
1847	4.22	0.2276	0.2143	13.19
1849	4.24	0.2325	0.2190	13.26
1851	4.26	0.2410	0.2275	13.37
1851	4.27	0.2457	0.2322	13.40
1852	4.28	0.2501	0.2366	13.44
1853	4.29	0.2543	0.2407	13.48
1853	4.30	0.2586	0.2450	13.51
1854	4.31	0.2631	0.2494	13.55
1854	4.32	0.2675	0.2538	13.58
1855	4.33	0.2719	0.2581	13.62
1856	4.34	0.2763	0.2625	13.66
1856	4.35	0.2808	0.2670	13.69
1857	4.36	0.2853	0.2715	13.72
1857	4.37	0.2948	0.2809	13.78
1858	4.38	0.2948	0.2809	13.78
1858	4.39	0.3007	0.2869	13.77
1859	4.40	0.3068	0.2929	13.77
1859	4.41	0.3135	0.2995	13.75

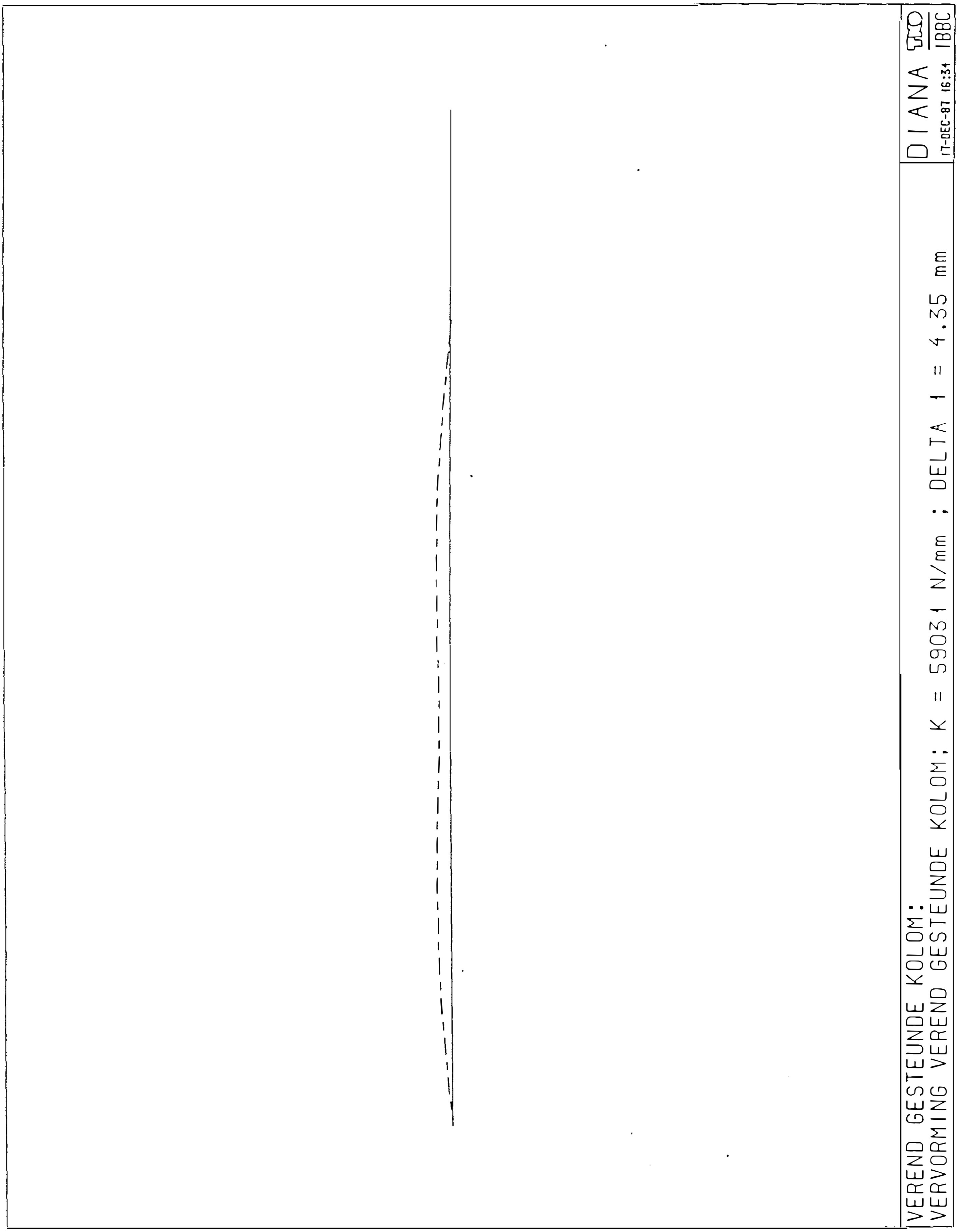
F_{DMAX} = 1859 kN bij δ_1 = 4.41 mm.


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 59031 N/mm ; DELTA 1 = 1 mm
DIANA
16-DEC-87 12:34
IBBC


DIANA
16-DEC-87 20:30
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 59031 N/mm ; DELTA 1 = 2 mm

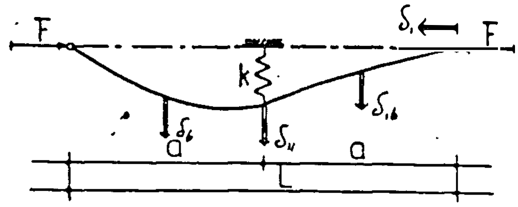

DIANA
16-DEC-87 21:02
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 59031 N/mm ; DELTA 1 = 3.4 mm


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 59031 N/mm ; DELTA 1 = 4.3 mm
DIANA
17-DEC-87 16:06
IBBC


DIANA
17-DEC-87 16:34
TNO
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM: K = 59031 N/mm ; DELTA 1 = 4.35 mm

Tabel 3.3.2. :

-Geg: -Verend gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- **a** = 11904.277 mm.
- **k** = 2361 N/mm.
- **w**(x) = 4.74 $\sin\frac{\pi x}{2a}$

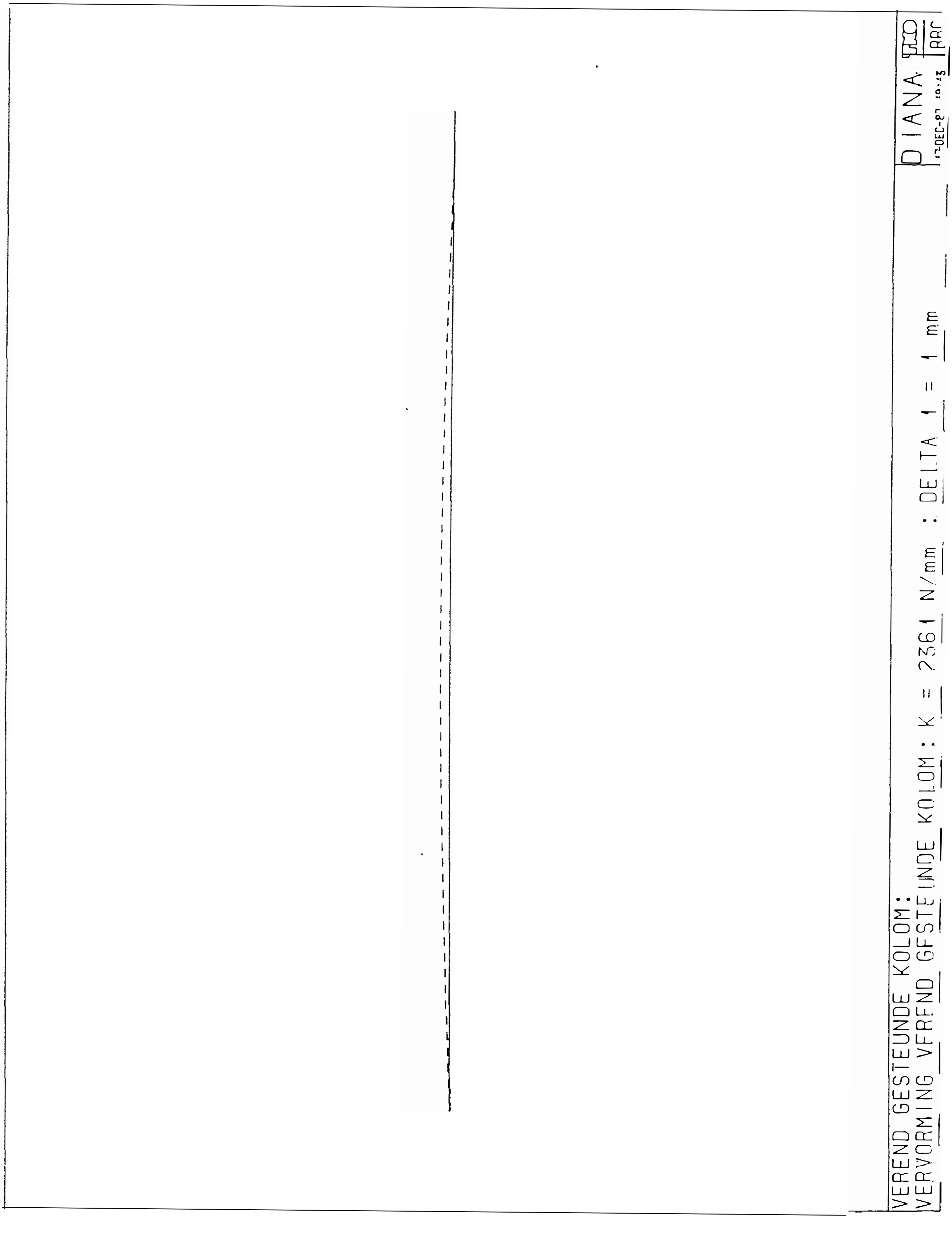


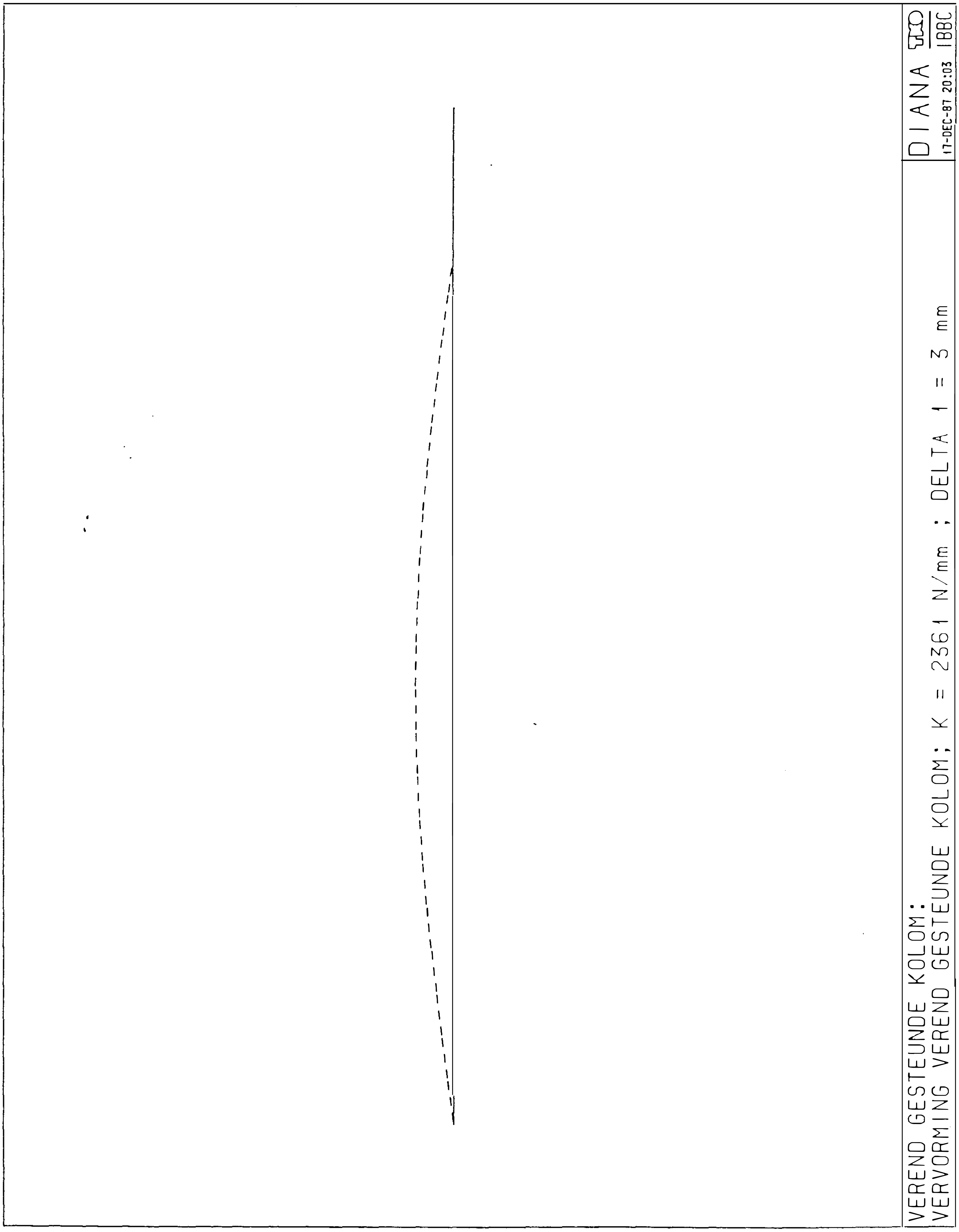
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
51.58	0.1	0.01311	0.01279	0.04332
154.7	0.3	0.03964	0.03869	0.1310
309.5	0.6	0.08021	0.07831	0.2651
515.8	1.0	0.1358	0.1326	0.4489
773.6	1.5	0.2079	0.2031	0.6871
1031	2.0	0.2829	0.2766	0.9353
1186	2.3	0.3295	0.3222	1.089
1338	2.6	0.3980	0.3897	1.315
1435	2.8	0.4394	0.4305	1.453
1525	3.0	0.5360	0.5265	1.780
1609	3.2	0.6370	0.6268	2.095
1640	3.3	0.7031	0.6926	2.325
1676	3.4	0.7601	0.7493	2.508
1692	3.45	0.8181	0.8072	2.715
1707	3.50	0.8746	0.8635	2.903
1721	3.55	0.9350	0.9238	3.102
1734	3.60	0.9962	0.9848	3.301
1746	3.65	1.072	1.061	3.566
1755	3.70	1.165	1.153	3.888
1760	3.725	1.211	1.199	4.036
1764	3.750	1.254	1.243	4.178
1768	3.775	1.297	1.285	4.314

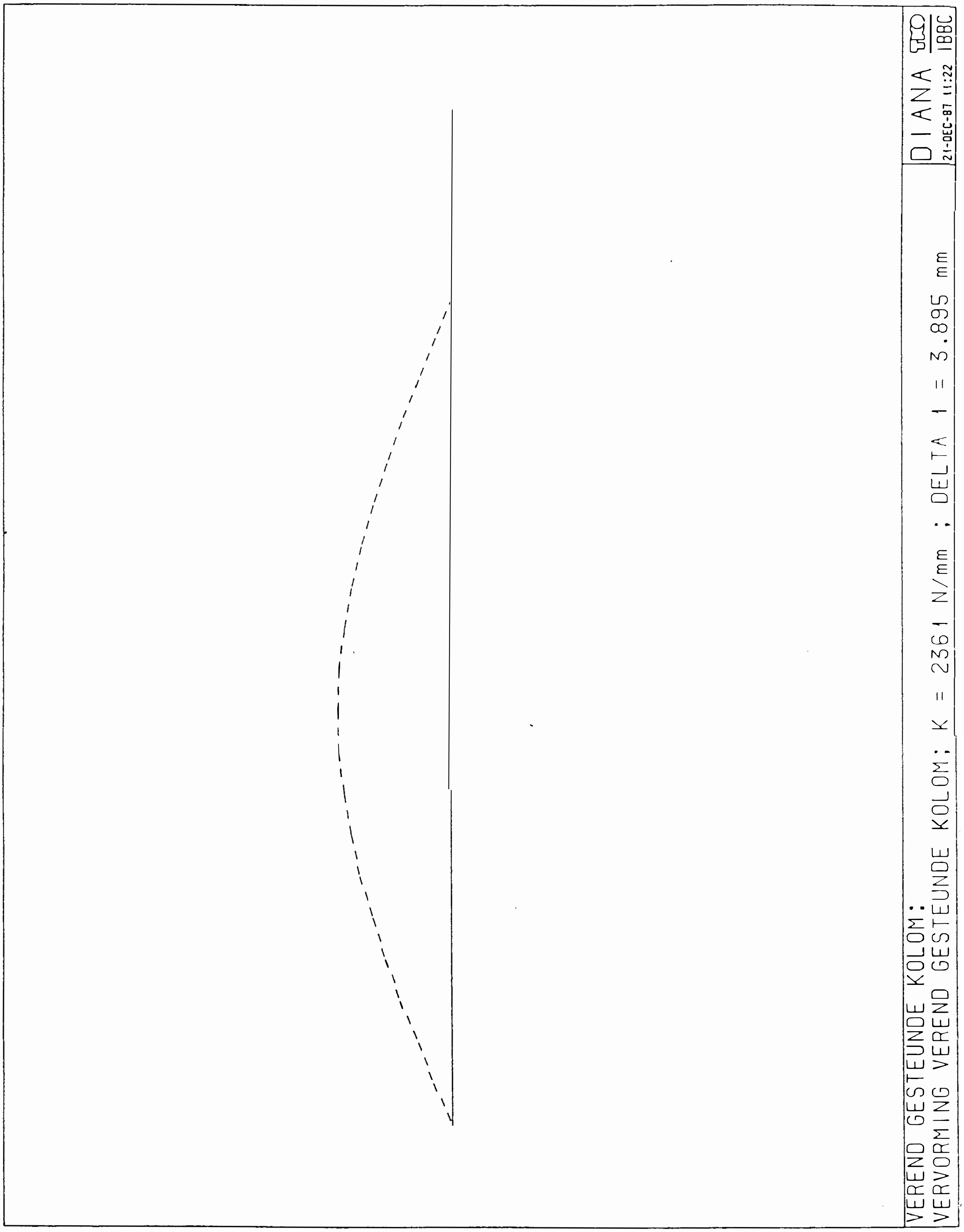
Vervolg tabel 3.3.2.:

F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
1772	3.800	1.343	1.331	4.471
1775	3.825	1.409	1.397	4.715
1777	3.850	1.478	1.466	4.968
1779	3.875	1.547	1.535	5.213
1780	3.885	1.576	1.564	5.314
1781	3.895	1.605	1.593	5.416
1782	3.905	1.637	1.624	5.532

F_{DMAX} = 1782 kN bij δ_1 = 3.91 mm.

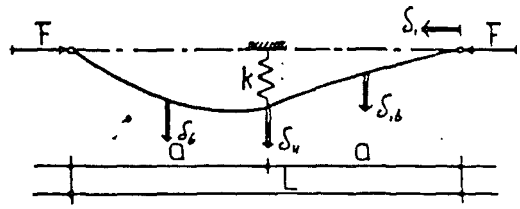

VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VERENDE GESTEUNDE KOLOM : K = 2361 N/mm : DELTA 1 = 1 mm
DIANA


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 2361 N/mm ; DELTA 1 = 3 mm
DIANA
17-DEC-87 20:03
IBBC


DIANA
21-DEC-87 11:22
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 2361 N/mm ; DELTA 1 = 3.895 mm

Tabel 3.3.3. :

-Geg: -Verend gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- k = 4641 N/mm.
- $w(x) = 4.74 \sin \frac{\pi x}{2a}$

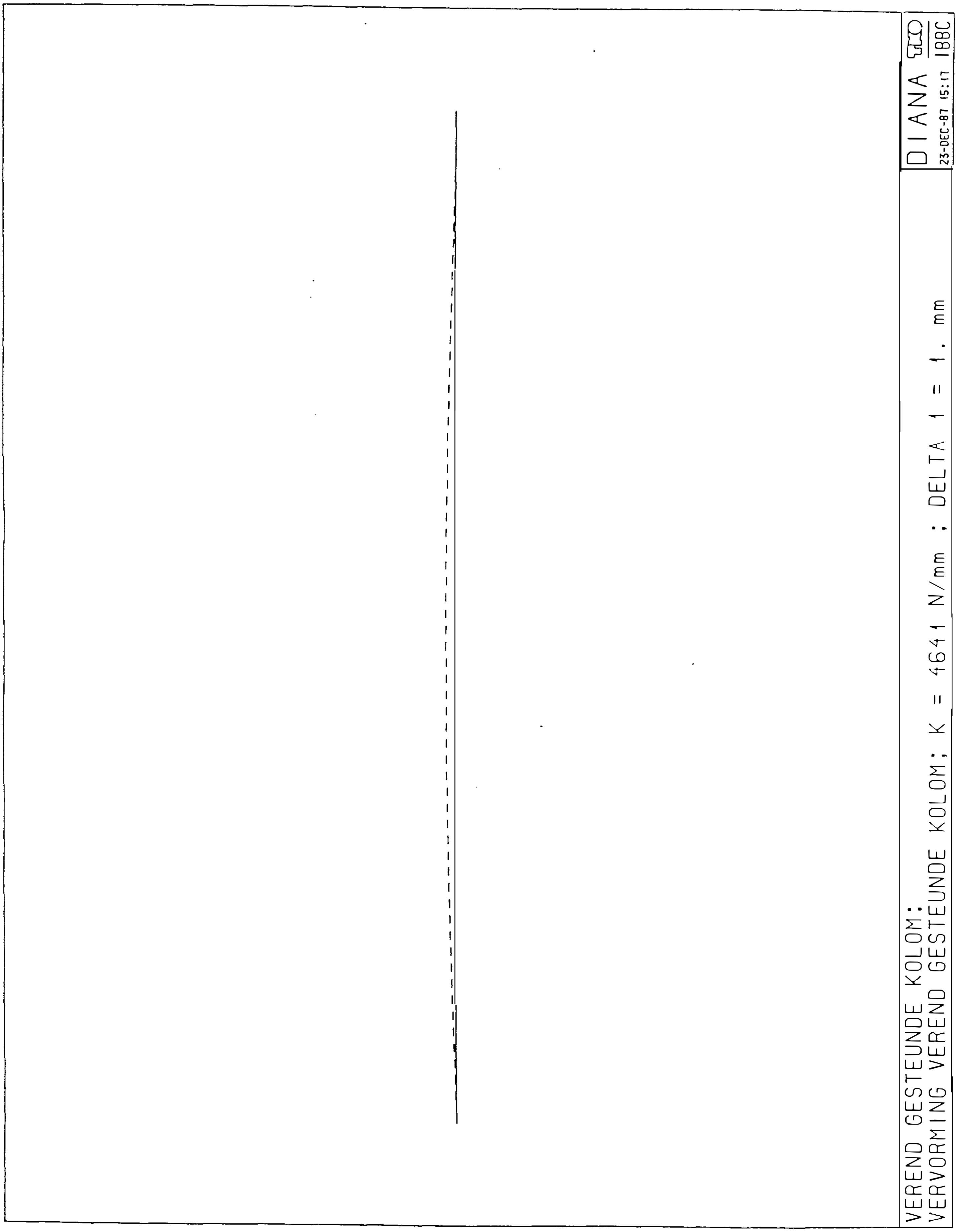


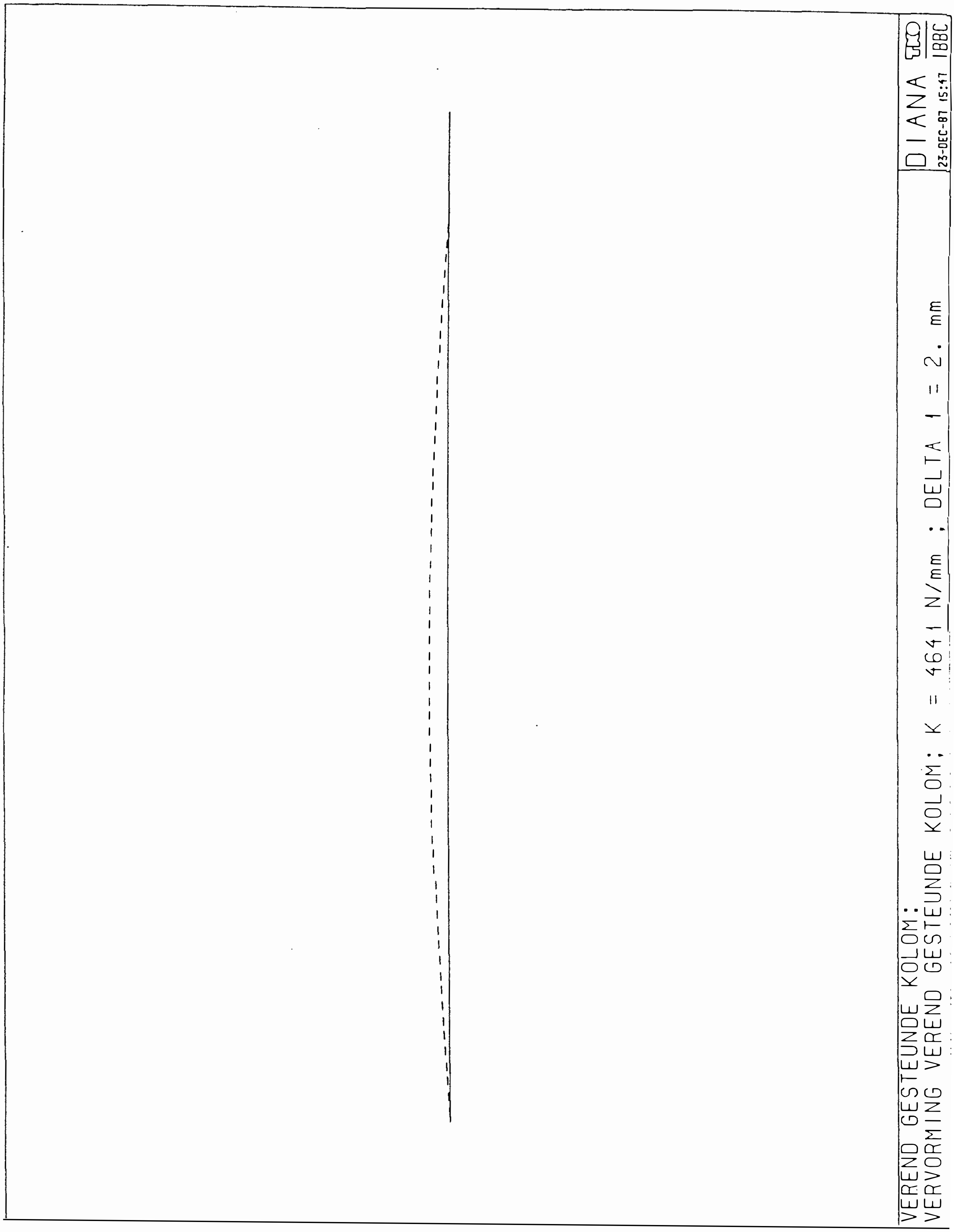
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
51.59	0.1	0.01183	0.01152	0.07654
154.8	0.3	0.03575	0.03480	0.2312
309.5	0.6	0.07226	0.07036	0.4674
515.9	1.0	0.1222	0.1190	0.7903
773.8	1.5	0.1866	0.1818	1.207
1032	2.0	0.2534	0.2471	1.640
1186	2.3	0.2947	0.2874	1.907
1338	2.6	0.3541	0.3459	2.289
1436	2.8	0.3888	0.3799	2.516
1526	3.0	0.4660	0.4565	3.034
1609	3.2	0.5544	0.5442	3.567
1679	3.4	0.6438	0.6330	4.152
1712	3.5	0.7096	0.6985	4.605
1739	3.6	0.8110	0.7996	5.258
1751	3.65	0.8464	0.8348	5.461
1763	3.7	0.8923	0.8805	5.748
1771	3.75	0.9604	0.9485	6.212
1780	3.80	1.024	1.012	6.612
1786	3.84	1.075	1.062	6.923
1791	3.87	1.110	1.098	7.142
1796	3.90	1.145	1.133	7.355
1800	3.93	1.190	1.177	7.646
1802	3.96	1.247	1.235	8.039

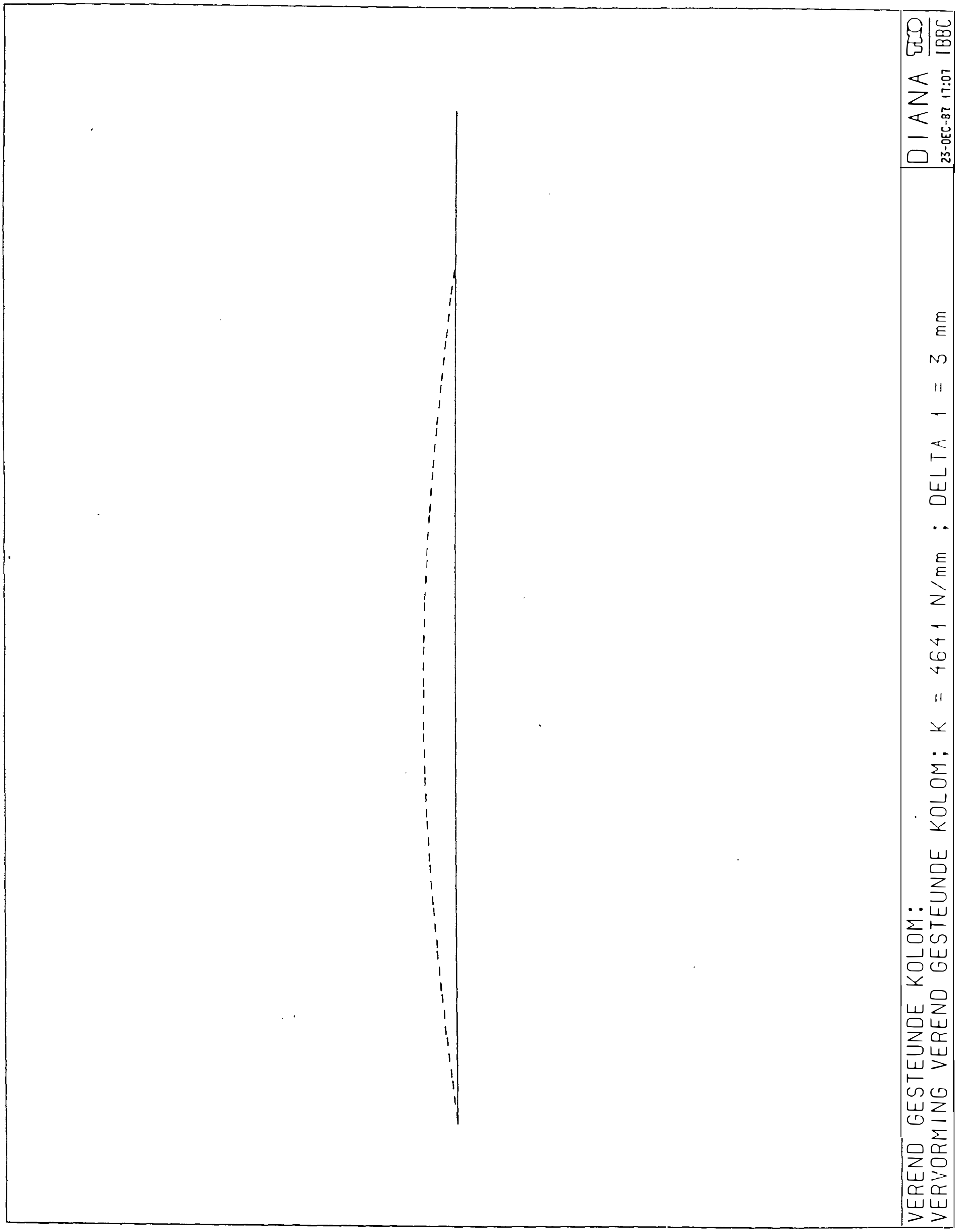
Vervolg tabel 3.3.3.:

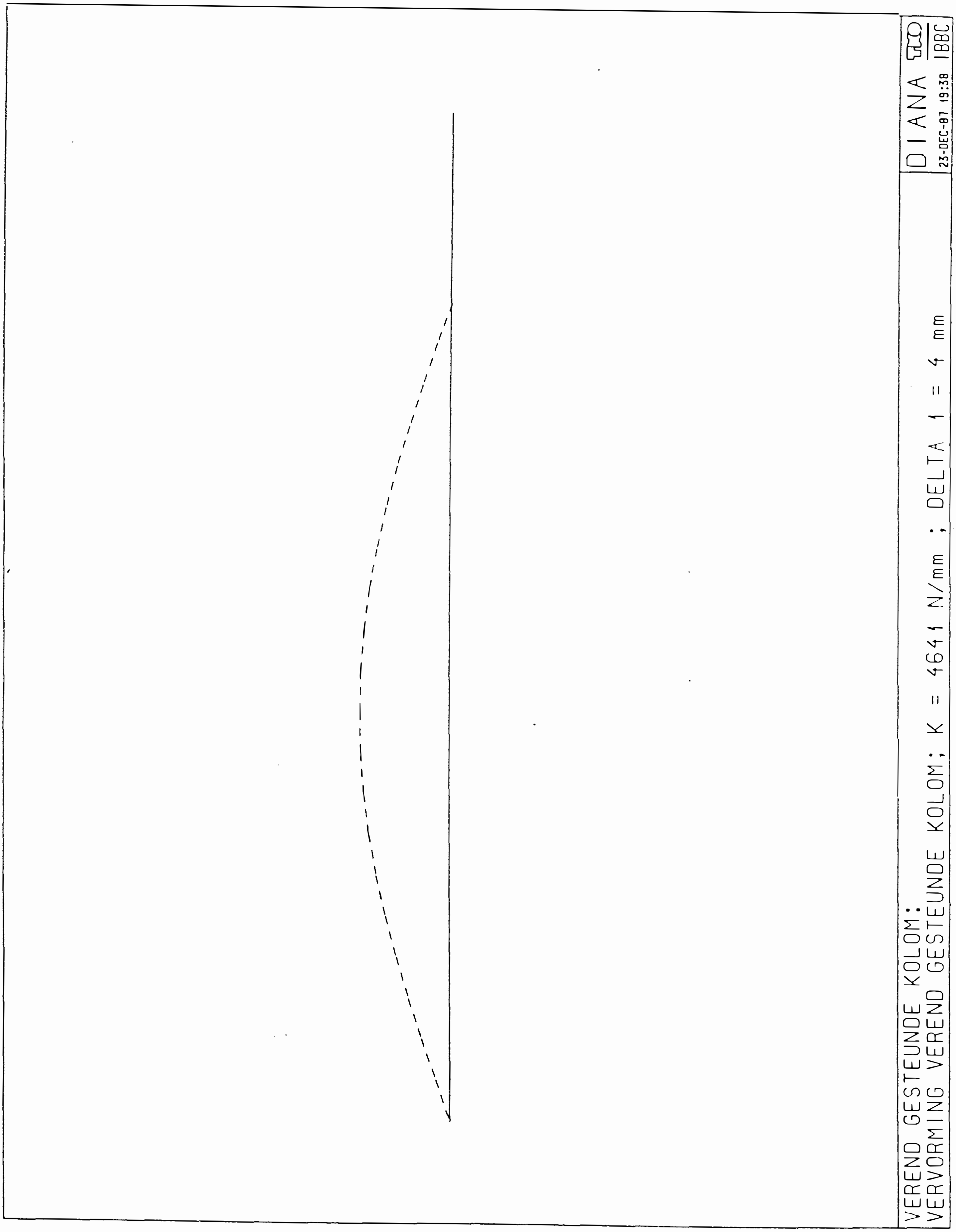
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
1804	3.98	1.286	1.273	8.292
1806	4.00	1.323	1.311	8.538
1808	4.02	1.361	1.349	8.783
1810	4.04	1.399	1.386	9.024
1812	4.06	1.439	1.426	9.278
1812	4.06	1.443	1.430	9.301

F_{DMAX} = 1812 kN bij δ_1 = 4.06 mm.


DIANA
23-DEC-87 15:17
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 4641 N/mm ; DELTA 1 = 1. mm

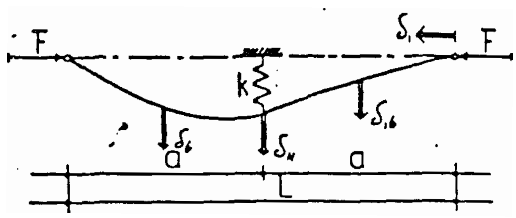

VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 4641 N/mm ; DELTA 1 = 2. mm
DIANA
23-DEC-87 15:47
IBBC


DIANA
23-DEC-87 17:07
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 4641 N/mm ; DELTA 1 = 3 mm


DIANA
23-DEC-87 19:38
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 4641 N/mm ; DELTA 1 = 4 mm

Tabel 3.3.4. :

-Geg: -Verend gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- k = 29515.5 N/mm.
- $w(x) = 4.74 \sin \frac{\pi x}{2a}$

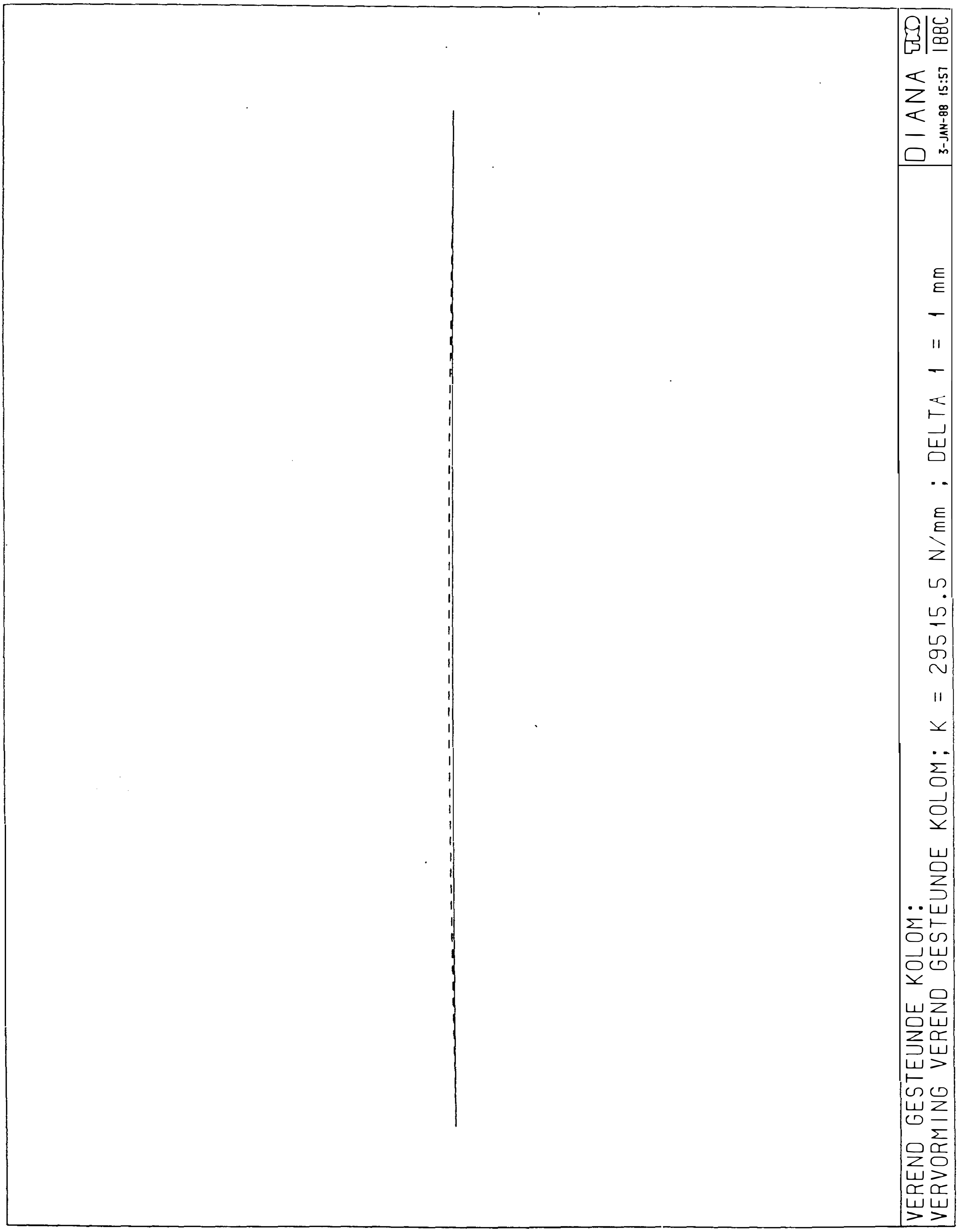


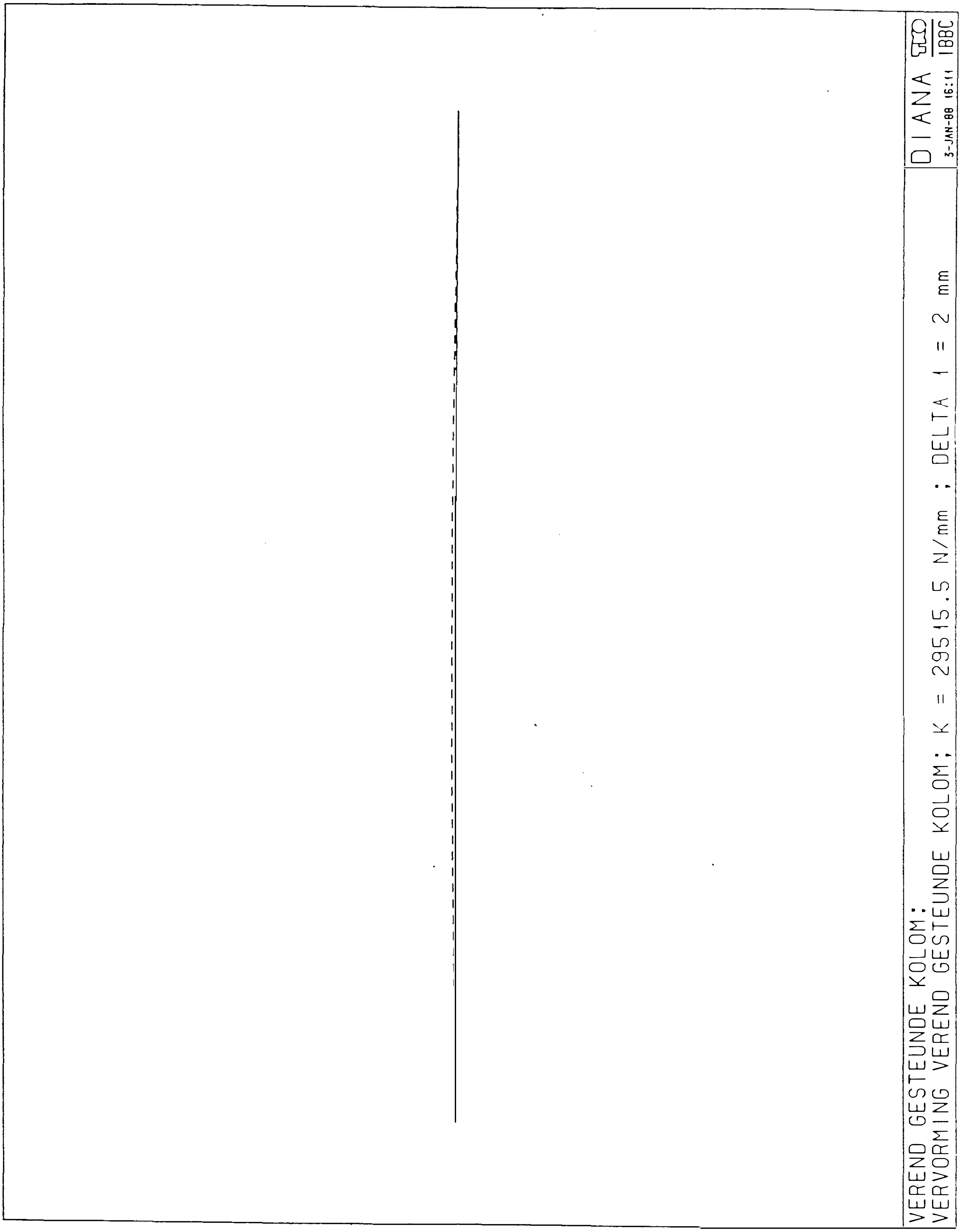
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
51.62	0.1	0.005885	0.005568	0.2314
154.9	0.3	0.01772	0.01676	0.6965
309.7	0.6	0.03561	0.03371	1.400
516.2	1.0	0.05977	0.05659	2.350
774.3	1.5	0.09043	0.08567	3.556
1032	2.0	0.1216	0.1153	4.783
1187	2.3	0.1406	0.1333	5.530
1340	2.6	0.1651	0.1568	6.471
1437	2.8	0.1776	0.1688	6.963
1533	3.0	0.1902	0.1807	7.456
1608	3.2	0.2172	0.2070	8.429
1687	3.4	0.2456	0.2348	9.397
1750	3.6	0.2599	0.2484	9.938
1794	3.8	0.3195	0.3074	11.78
1825	4.0	0.3128	0.3001	11.56
1828	4.05	0.3526	0.3397	12.49
1834	4.10	0.3649	0.3519	12.69
1839	4.14	0.3726	0.3595	12.81
1842	4.17	0.3764	0.3632	12.87
1845	4.20	0.3794	0.3661	12.91
1846	4.22	0.3895	0.3761	13.04
1848	4.24	0.3979	0.3844	13.16
1849	4.26	0.4060	0.3925	13.27

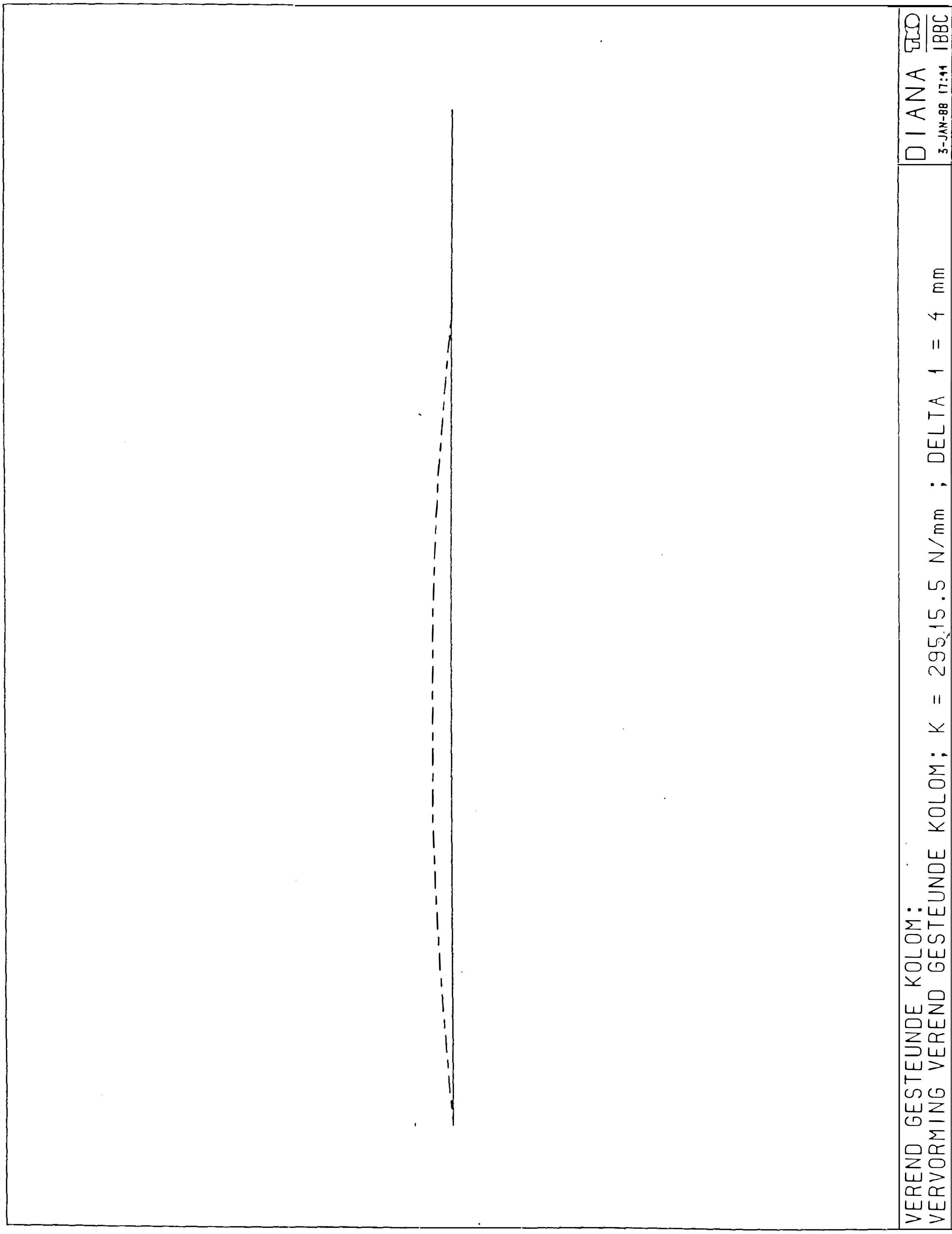
Vervolg tabel 3.3.4.:

F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
1851	4.28	0.4143	0.4008	13.39
1852	4.30	0.4229	0.4092	13.51
1854	4.32	0.4318	0.4181	13.61
1855	4.34	0.4412	0.4275	13.70
1856	4.36	0.4507	0.4368	13.79
1857	4.37	0.4556	0.4418	13.82
1857	4.38	0.4610	0.4471	13.87

F_{DMAX} = 1857 kN bij δ_1 = 4.38 mm.

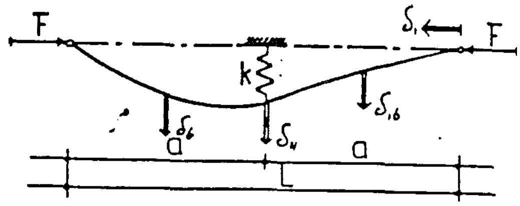

DIANA
3-JAN-88 15:57
IBBC
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 29515.5 N/mm ; DELTA 1 = 1 mm


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 29515.5 N/mm ; DELTA 1 = 2 mm
DIANA
3-JAN-88 16:11
IBBC


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 29515.5 N/mm ; DELTA 1 = 4 mm
DIANA
3-JAN-88 17:44
IBBC

Tabel 3.3.5. :

-Geg: -Verend gest. kolom.
-Verv. gestuurd.
- a = 11904.277 mm.
- k = 8854.65 N/mm.
- $w(x) = 4.74 \sin\frac{\pi x}{2a}$

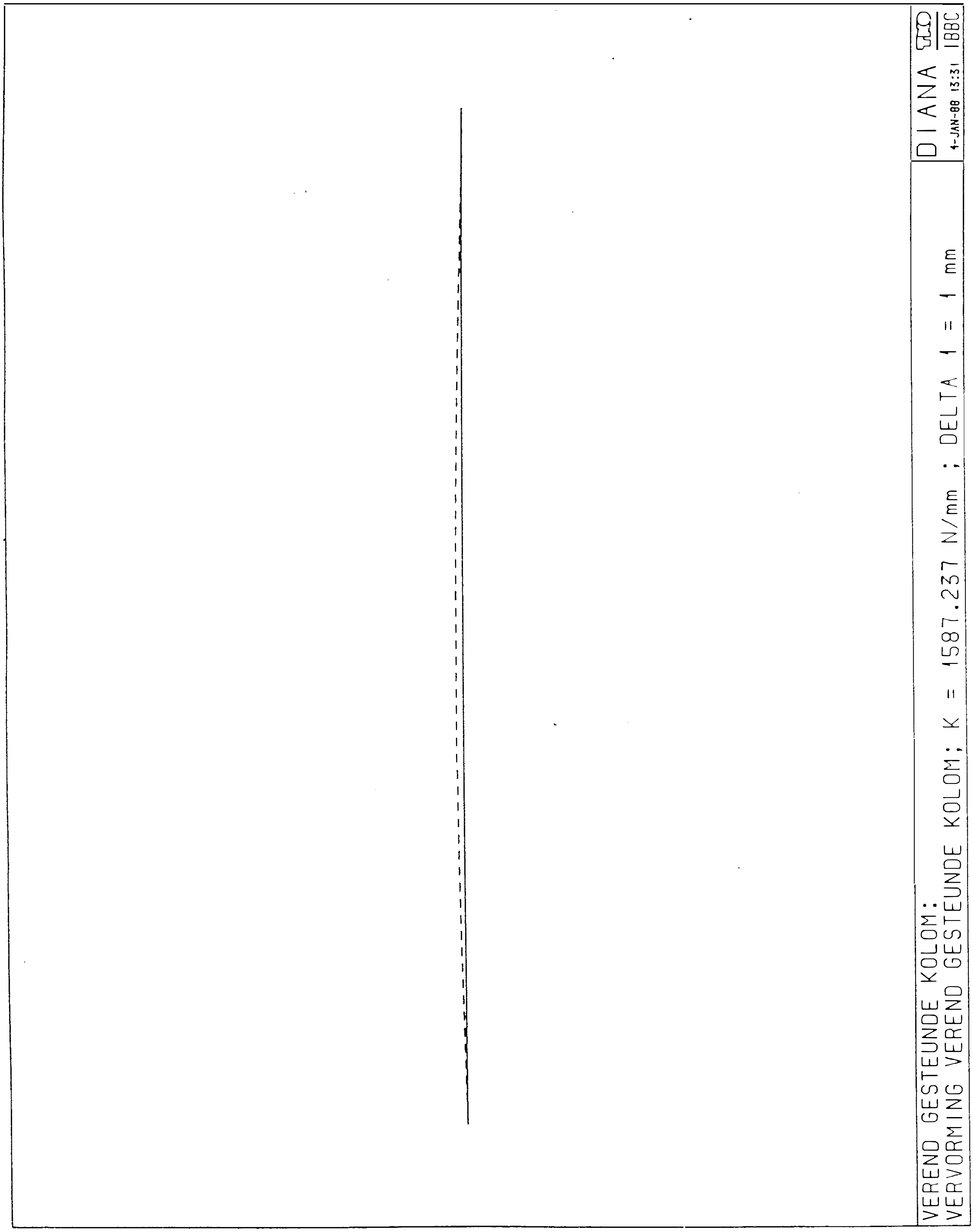


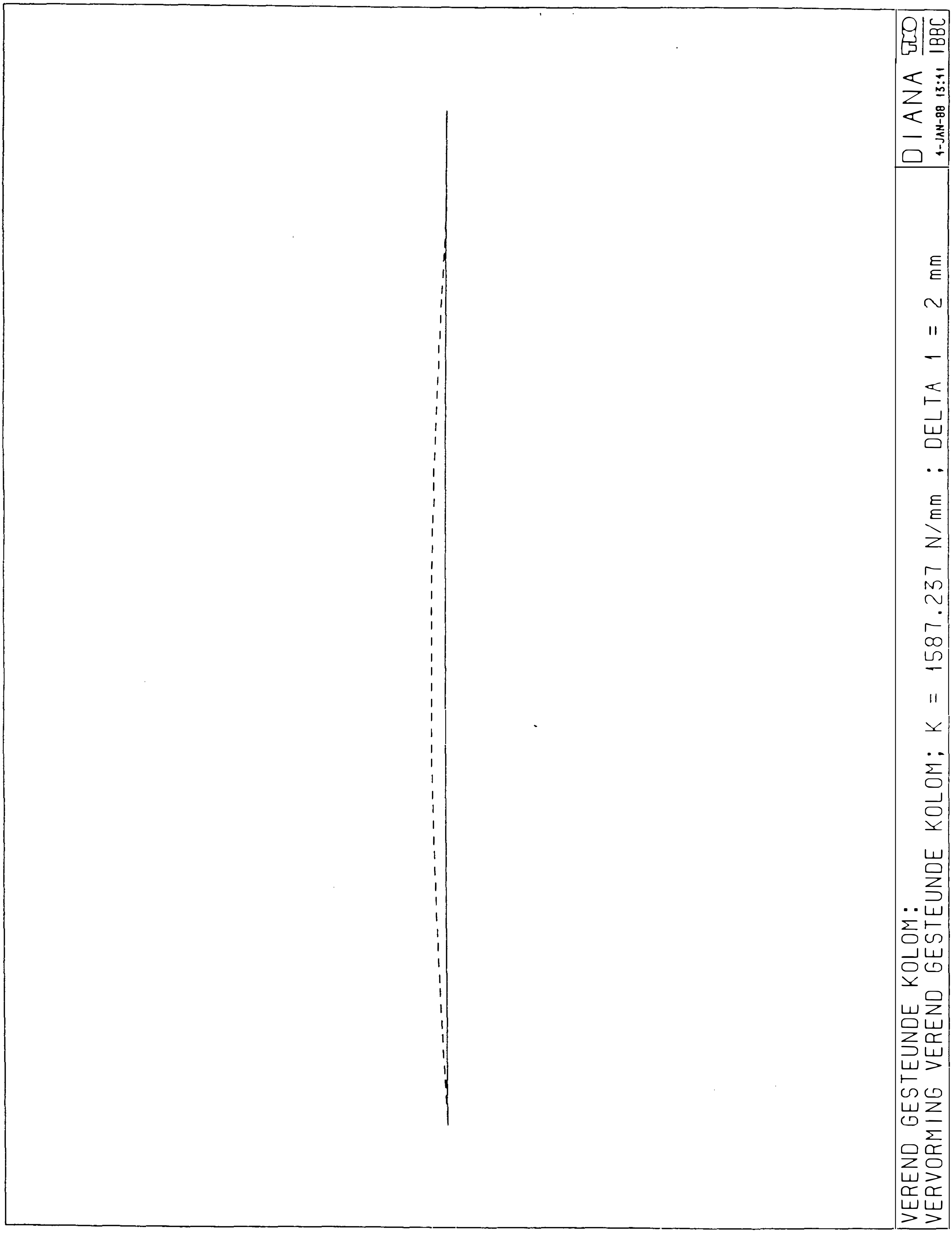
DIANA				
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
51.60	0.1	0.01005	0.009731	0.1230
154.8	0.3	0.03032	0.02937	0.3713
309.6	0.6	0.06119	0.05928	0.7493
516.0	1.0	0.1032	0.1000	1.264
773.9	1.5	0.1572	0.1524	1.925
1032	2.0	0.2129	0.2065	2.607
1187	2.3	0.2471	0.2398	3.027
1339	2.6	0.2948	0.2866	3.607
1436	2.8	0.3214	0.3126	3.935
1528	3.0	0.3727	0.3631	4.616
1610	3.2	0.4468	0.4366	5.444
1681	3.4	0.5037	0.4929	6.127
1749	3.6	0.5791	0.5676	7.038
1767	3.7	0.6540	0.6422	7.897
1788	3.8	0.7048	0.6927	8.469
1795	3.85	0.7552	0.7430	9.085
1802	3.90	0.7915	0.7791	9.501
1808	3.94	0.8139	0.8014	9.740
1812	3.97	0.8278	0.8152	9.890
1816	4.00	0.8429	0.8302	10.05
1819	4.02	0.8532	0.8405	10.16
1821	4.04	0.8667	0.8539	10.31
1823	4.06	0.8858	0.8729	10.51

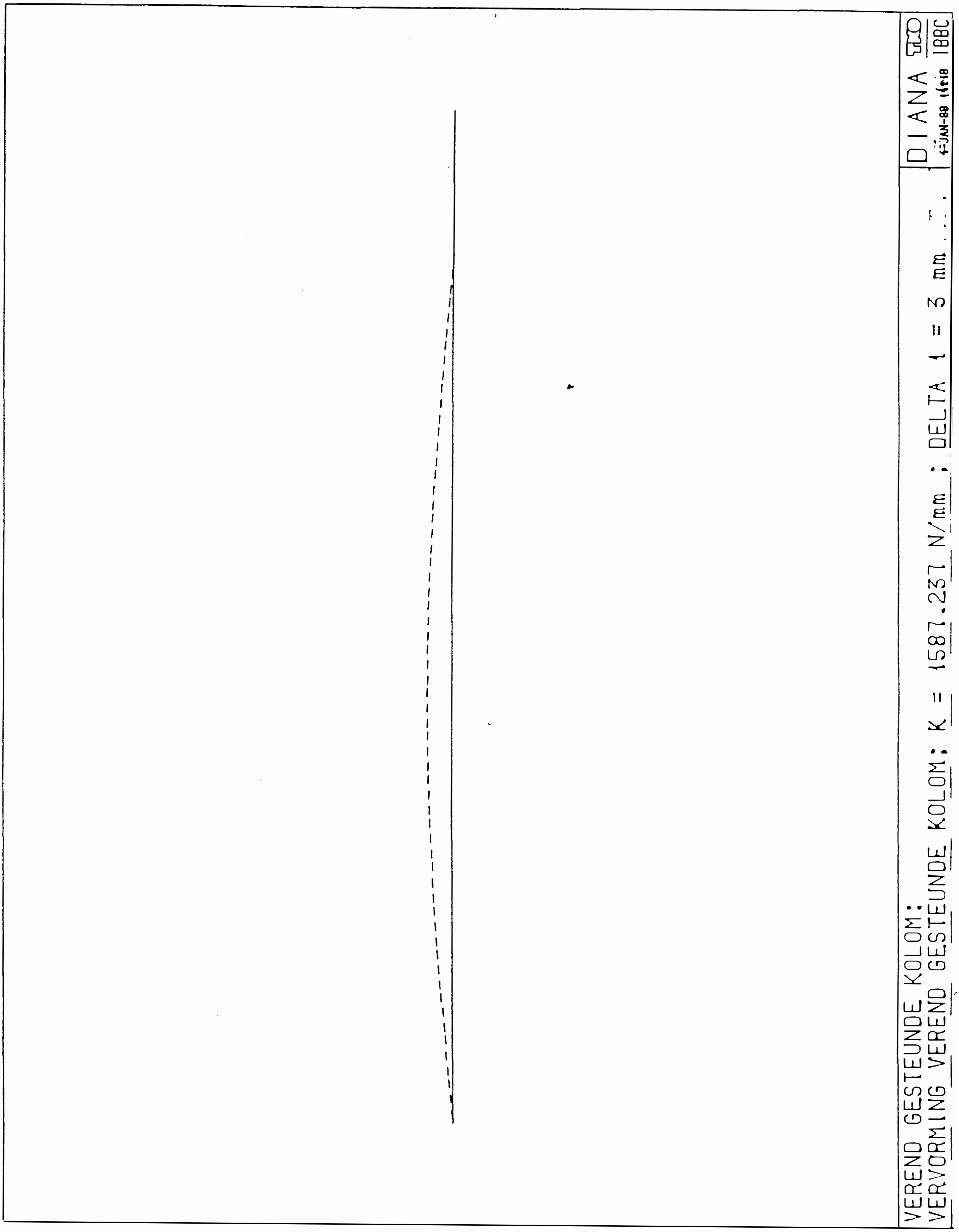
Vervolg tabel 3.3.4.:

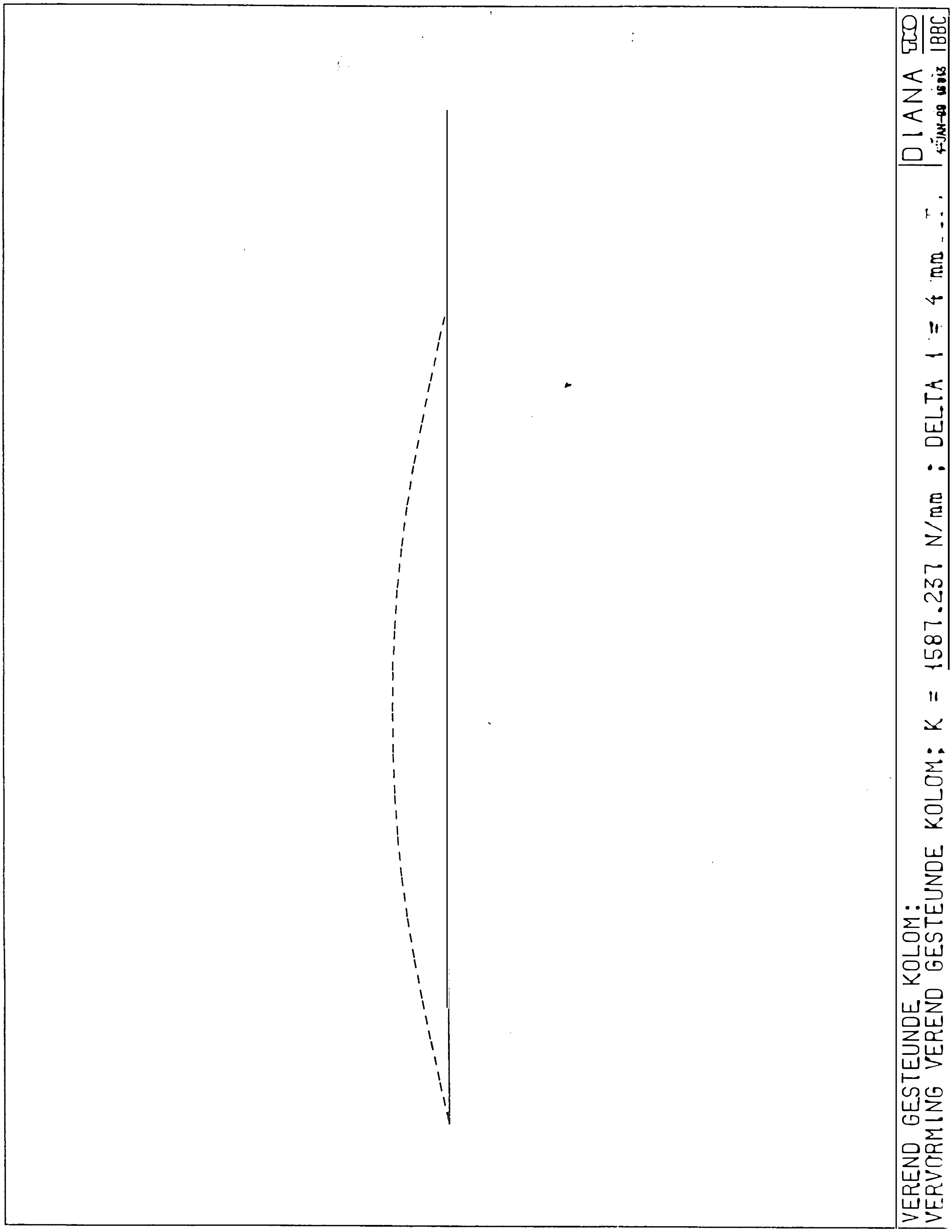
F [kN]	δ_1 [mm]	δ_6 [mm]	δ_{16} [mm]	F_{11} [kN]
1825	4.08	0.9063	0.8934	10.72
1827	4.10	0.9269	0.9139	10.94
1829	4.12	0.9484	0.9354	11.15
1831	4.14	0.9701	0.957	11.37
1833	4.16	0.9918	0.9787	11.58
1834	4.17	1.003	0.9898	11.69
1834	4.18	1.014	1.001	11.80
1835	4.19	1.025	1.012	11.91
1836	4.20	1.037	1.023	12.02
1837	4.21	1.049	1.036	12.14

F_{DMAX} = 1837 kN bij δ_1 = 4.21 mm.


DIANA
IBBC
4-JAN-88 13:31
VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 1587.237 N/mm ; DELTA 1 = 1 mm


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 1587.237 N/mm ; DELTA 1 = 2 mm
DIANA
4-JAN-88 13:41
IBBC


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 1587.237 N/mm ; DELTA 1 = 3 mm
DIANA
4-JAN-88 14:18
IBBC


VEREND GESTEUNDE KOLOM:
VERVORMING VEREND GESTEUNDE KOLOM; K = 1587.237 N/mm ; DELTA 1 = 4 mm
DIANA
IBBC